MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

# PENERAPAN SIFAT JARAK RUANG METRIK $\mathbb{R}^2$ PADA LINGKARAN

## *APPLICATIONS OF THE DISTANCE PROPERTY OF METRIC SPACE $\mathbb{R}^2$ ON CIRCLES*

**Ilham Dangu Rianjaya[1§], Lilis Harianti Hasibuan[2], Indah Permata Sari[3]**

[1] Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: ilham.rianjaya@uinib.ac.id]
[2] Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: lilisharianti@uinib.ac.id]
[3] Program Studi Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [Email: indahpermata010318@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

Received Nov 09th 2021; Accepted Nov 18th 2021; Published Dec 01st 2021;

**Abstrak**

Suatu himpunan $X$ disebut ruang metrik dengan fungsi metrik $d$ apabila memenuhi sifat tak negatif, simetris dan ketaksamaan segitiga. Jarak pada $\mathbb{R}^2$ adalah jarak terpendek dari dua buah titik yang dihubungkan dengan sebuah garis lurus. Beberapa karakteristik jarak pada $\mathbb{R}^2$ antara lain diameter suatu himpunan, jarak antara titik dan himpunan, dan jarak antara dua himpunan. Pada penelitian ini dipelajari karakteristik jarak pada ruang metrik $\mathbb{R}^2$ yang diterapkan pada lingkaran sebagai salah satu himpunan yang ada di $\mathbb{R}^2$.

**Kata Kunci**: Ruang Metrik, Jarak, Lingkaran

***Abstract***

*The set $X$ be called metric space with metric $d$ if it satisfies the nonnegative property, symmetry property, and triangle inequality property. Distance of two points on $\mathbb{R}^2$ is the shortest distance that connected the points by a line. Metric space $\mathbb{R}^2$ has some distance characteristics such as the set's diameter, the distance of point and set, and the distance of two sets. This article study about the applications of metric space $\mathbb{R}^2$on the circle as a subset of $\mathbb{R}^2$*

***Keywords**: Metric Space, Distance, Cirlce*

## 1. Pendahuluan

Metrik adalah fungsi yang memiliki sifat kepositifan, simetris dan pertidaksamaan segitiga. Suatu himpunan $X$ yang dilengkapi dengan suatu metrik $d$ disebut ruang metrik dan sering dituliskan dengan $(X, d)$. Misalkan himpunan $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi dengan fungsi metrik $d$ yang menunjukkan jarak antara dua titik $A$ dan $B$ di $\mathbb{R}^2$ dengan $d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 - (y_a - y_b)^2}$. Ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ sering disebut sebagai ruang metrik $\mathbb{R}^2$

Berdasarkan [1] ruang metrik memiliki beberapa sifat jarak antara lain diameter himpunan, jarak antara dua himpunan, dan jarak antara titik dan himpunan.

Lingkaran merupakan salah satu himpunan bagian dari $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $\{(x,y)|x^2+y^2=r^2, x,y,r \in \mathbb{R}$ dan $r \geq 0\}$. Pada artikel ini, akan terfokus pada sifat jarak pada ruang metrik $\mathbb{R}^2$ yang diterapkan untuk pada lingkaran

## 2. Landasan Teori

**Definisi 2.1.** [2] *Misalkan $f: A \to B$ merupakan suatu fungsi dan $A_1 \subseteq A$, dapat didefinisikan fungsi $f_1: A_1 \to B$ dengan $f_1(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in A_1$. Fungsi $f_1$ ini disebut sebagai restriksi dari $f$ ke $A_1$. Terkadang $f_1$ dinotasikan juga dengan $f|_{A_1}$.*

**Teorema 2.2.** [3] *Setiap himpunan bagian dari $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mempunyai supremum dan infimum di $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

**Bukti.** Ambil sebarang himpunan $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Karenanya untuk sebarang $a \in A$, berlaku $a \leq \infty$ sehingga diperoleh $A$ terbatas di atas. Berdasarkan sifat kelengkapan, diperoleh bahwa terdapat $M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sehingga $\sup A = M$ atau $A$ memiliki supremum di $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Selain itu karena $a \in A$ berlaku juga $-\infty \leq a$ sehingga diperoleh bahwa $A$ terbatas di bawah. Akibatnya terdapat $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sehingga $\inf A = m$. Atau dengan kata lain, $A$ memiliki infimum di $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. □

**Teorema 2.3.** [3] *Misalkan suatu himpunan tak kosong $A, B \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Jika $A \subseteq B$, maka $inf\ B \leq inf\ A \leq sup\ A \leq sup\ B$*

**Bukti.** Diketahui $A, B \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, sehingga menurut Teorema 2.2 himpunan $A$ dan $B$ mempunyai supremum dan infimum di $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Sehingga untuk setiap $b \in B$ berlaku $inf\ B \leq b$ karena $A \subseteq B$, maka untuk setiap $a \in A$ terdapat $b' \in B$ sedemikian sehingga $b' \leq a$, dengan kata lain $b'$ adalah salah satu batas bawah dari $A$. Karena A mempunyai infimum sehingga berlaku

$$inf\ B \leq b' \leq inf\ A \leq a$$

atau

$$inf\ B \leq inf\ A \leq a$$

Selanjutnya, karena $B$ mempunyai supremum, maka untuk setiap $b \in B$ berlaku

$$b \leq sup\ B$$

karena $A \subseteq B$, maka untuk setiap $a \in A$ terdapat $b'' \in B$ sedemikian sehingga $a \leq b''$, dengan kata lain $b''$ adalah salah satu batas atas dari $A$. Karena $A$ mempunyai supremum, berlaku

$$a \leq sup\ A \leq b'' \leq sup\ B$$

atau

$$a \leq sup\ A \leq sup\ B$$

akibatnya diperoleh:

$$inf\ B \leq inf\ A \leq sup\ A \leq sup\ B \quad \square$$

**Definisi 2.4.** [4] *Misalkan $A$ dan $B$ adalah himpunan. Hasil Kali Kartesius dari $A$ dan $B$, dinotasikan dengan $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut yang mana elemen pertama adalah anggota dari $A$ dan yang kedua adalah anggota dari $B$, atau dapat dituliskan sebagai berikut*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A\ dan\ b \in B\}$$

**Definisi 2.5.** [1] *Suatu metrik pada himpunan tak kosong $X$ adalah pemetaan $d: X \times X \to [0, +\infty)$*

*yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

(i) *(Sifat Kepositifan)* $d(x,y)=0$ *jika dan hanya* $x=y$

(ii) *(Sifat Simetris)* $d(x,y)=d(x,y)$, *dan*

(iii) *(Pertidaksamaan Segitiga)*

$$d(a,b)\le d(a,c)+d(c,b)$$

Dalam hal ini himpunan $X$ yang dilengkapi dengan metrik $d$ disebut sebagai ruang metrik dan biasanya dituliskan dengan $X$ saja. Namun apabila perlu untuk memperjelas metrik maka dapat dituliskan dengan $(X,d)$.

**Definisi 2.6** [5] *Himpunan* $M^O$ *merupakan subruang metrik dari ruang metrik* $(M,d)$ *apabila* $M^O\subset M$ *dan* $M^O$ *merupakan ruang metrik yang dilengkap dengan metrik* $d|_{M^O\times M^O}$.

## 3. Hasil Dan Pembahasan

### 3.1 Diameter dua lingkaran

**Definisi 3.1.** [3] *Diberikan suatu ruang metrik* $(X,d)$ *dan* $A$ *himpunan bagian dari* $X$. *Diameter dari A didefinisikan sebagai*

$$diam(A)=sup\,\{d(r,s)|r,s\in A\}$$

*Dalam hal ini diameter yang dimaksud bergantung pada metrik.*

**Teorema 3.2.** [3] *Diberikan* $(X,d)$ *adalah suatu ruang metrik. Jika* $A,B\subseteq X$ *dan* $A\subseteq B$, *maka*

$$diam(A)\le diam(B)$$

**Bukti.** Diketahui suatu ruang metrik $(X,d)$ dengan $A,B\subseteq X$ dan $A\subseteq B$. Karena $A,B\subseteq X$ menurut Definisi 2.6 berlaku $d(x,y)$ untuk setiap $x,y\in B$ dan $d(u,v)$ untuk setiap $u,v\in A$. Karena $A\subseteq B$, diperoleh:

$$\{d(u,v)|u,v\in A\}\subseteq\{d(x,y)|x,y\in B\}$$

menurut Teorema 2.7.6 diperoleh $\{d(u,v)|u,v\in A\}$ dan $\{d(x,y)|x,y\in B\}$ mempunyai infimum dan supremum. Selanjutnya menurut Teorema 2.7.7 diperoleh:

$$sup\{d(u,v)|u,v\in A\}\le sup\{d(x,y)|x,y\in B\}$$

akibatnya diperoleh bahwa

$$diam(A)\le diam(B)\quad\square$$

### 3.2 Pertidaksamaan Diameter Dua Lingkaran

Misalkan $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dengan $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathbb{R}^2$ dan $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ serta $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{A}\coloneqq x^2+y^2\le r^2$$
$$\mathcal{B}\coloneqq x^2+y^2=s^2$$

dengan $r\ge 0$, $s\ge 0$ dan $s\le r$, akan ditunjukkan bahwa

$$diam(\mathcal{B})\le diam(\mathcal{A})$$

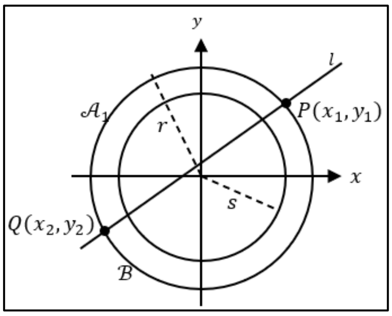
**Penyelesaian.** Diketahui $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dengan $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathbb{R}^2$ dan $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$, Ambil lingkaran terluar $\mathcal{A}_1$ dari $\mathcal{A}$ dengan

$$\mathcal{A}_1\coloneqq x^2+y^2=r^2$$

Kemudian misalkan suatu garis lurus

$$l\coloneqq y=mx+c$$

yang memotong lingkaran $\mathcal{A}_1$ di titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$. Perhatikan gambar berikut




Gambar 1. Garis $l$ memotong lingkaran $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$

Dengan menyubstitusikan persamaan garis $l$ ke persamaan lingkaran $\mathcal{A}_1$ diperoleh:

$$x^2+(mx+c)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+m^2x^2+2cmx+c^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow m^2x^2+x^2+2cmx+c^2-r^2=0$$

$\Leftrightarrow (m^2+1)x^2 + (2cm)x + c^2 - r^2 = 0$

dengan mencari akar-akar kuadrat persamaannya, diperoleh:

$$x_{1,2} = \frac{-cm \pm \sqrt{r^2(m^2+1) - c^2}}{(m^2+1)}$$

Kemudian dapat dicari selisih antara $x_1$ dan $x_2$ sebagai:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-cm + \sqrt{r^2(m^2+1) - c^2}}{(m^2+1)} - \frac{-cm - \sqrt{r^2(m^2+1) - c^2}}{(m^2+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{2\sqrt{r^2(m^2+1) - c^2}}{m^2+1} \right|$$

dan

$$(x_1 - x_2)^2 = \left( \frac{2\sqrt{r^2(m^2+1) - c^2}}{m^2+1} \right)^2$$

$$= \frac{4(r^2(m^2+1) - c^2)}{(m^2+1)^2}$$

Selanjutnya diketahui bahwa kemiringan dari garis $l$ adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

sehingga diperoleh $m^2(x_2 - x_1)^2 = (y_2 - y_1)^2$. Akibatnya diperoleh bahwa jarak antara titik $P$ dan $Q$ adalah

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - \frac{c^2}{m^2+1}}$$

Jarak terjauh antara $P$ dan $Q$ dapat diperoleh dengan menjadikan $\frac{c^2}{m^2+1} = 0$ yakni saat $c = 0$, sehingga diperoleh

$$diam(\mathcal{A}_1) = \sup\{d(P,Q) | P, Q \in \mathcal{A}_1\}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - 0}$$

$$= 2r$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk mencari $diam(\mathcal{B})$, diperoleh:

$$diam(\mathcal{B}) = 2s$$

karena $s \leq r$, akibatnya diperoleh bahwa

$$2s \leq 2r$$

$$diam(\mathcal{B}) \leq diam(\mathcal{A}_1)$$

karena $\mathcal{A}_1$ merupakan lingkaran terluar dari $\mathcal{A}$, akibatnya diperoleh

$$diam(\mathcal{B}) \leq diam(\mathcal{A}) \ \square$$

### 3.3 Pertidaksamaan Jarak Titik dan Himpunan terhadap Diameter Himpunan dan Jarak Titik dan Himpunan

**Definisi 3.3.** [3] *Diberikan suatu ruang metrik* $(X,d)$, $A \subseteq X$ *dan* $x \in X$. *Jarak dari* $x$ *ke* $A$ *didefinisikan dengan*

$$dist(x,A) = inf\{d(x,a) | a \in A\}$$

*Dalam hal ini jarak yang dimaksud bergantung pada metrik* $d$.

**Teorema 3.4.** [3] *Diberikan* $(X,d)$ *adalah ruang metrik. Jika* $x \in X$ *dan* $A, B \subseteq X$ *serta* $A \subseteq B$, *maka*

$$dist(x,B) \leq dist(x,A)$$

$$\leq dist(x,B) + diam(B)$$

**Bukti**. Diketahui ruang metrik $(X,d)$ dengan $x \in X$ dan $A, B \subseteq X$ dengan $A \subseteq B$. Karena $x \in X$ dan $A, B \subseteq X$ maka jarak antara $x$ dan $a$ dapat dituliskan sebagai $d(x,a)$ untuk sebarang $a \in A$ dan $d(x,b)$ untuk sebarang $b \in B$ sebagai jarak antara $x$ dan $b$. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh $\{d(x,a) | a \in A\}$ dan $\{d(x,b) | b \in B\}$ masing-masing memiliki supremum dan infimum. Karena $A \subseteq B$, maka diperoleh

$$\{d(x,a) | a \in A\} \subseteq \{d(x,b) | b \in B\}$$

Berdasarkan Definisi 3.3 diperoleh

$$dist(x, A) = inf\{d(x, a) | a \in A\}; \text{ dan}$$
$$dist(x, B) = inf\{d(x, b) | b \in B\}$$

Kemudian dengan menggunakan Teorema 2.3 diperoleh bahwa $dist(x, B) \leq dist(x, A)$. Selanjutnya dengan menggunakan sifat pertaksamaan segitiga pada ruang metrik diperoleh

$$dist(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a)$$

Ingat bahwa $d(b, a) \leq diam(B)$, akibatnya diperoleh bahwa

$$dist(x, A) \leq d(x, b) + diam(B)$$

yang berlaku untuk setiap $b \in B$. Sehingga diperoleh

$$dist(x, B) \leq dist(x, A)$$
$$\leq dist(x, B) + diam(B) \ \square$$

## 3.4 Pertidaksamaan Jarak Titik dan Lingkaran terhadap Diameter Lingkaran dan Jarak Titik dan Lingkaran

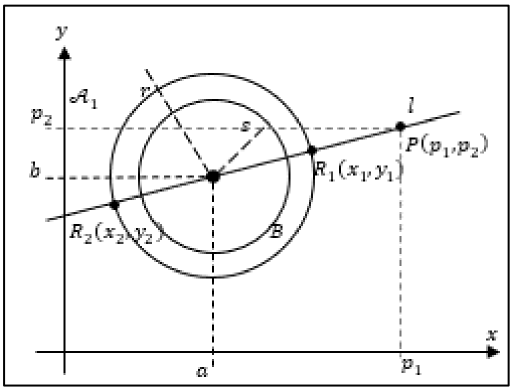
Misalkan $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dengan $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ serta $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{A} \coloneqq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$
$$\mathcal{B} \coloneqq (x - a)^2 + (y - b)^2 = s^2$$

dengan $r \geq 0, s \geq 0$ dan $s \leq r$. Diberikan sebarang titik $P(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ di luar $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$dist(P, \mathcal{A}) \leq dist(P, \mathcal{B})$$
$$\leq dist(P, \mathcal{A}) + diam(\mathcal{A})$$

**Penyelesaian.** Diketahui $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dengan $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ dan sebarang $P(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ di luar $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$. Diambil lingkaran terluar $\mathcal{A}_1$ dari $\mathcal{A}$ dengan $\mathcal{A}_1 \coloneqq (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Kemudian misalkan $l$ garis lurus yang didefinisikan sebagai $l \coloneqq \frac{y-b}{x-a} = \frac{p_2-b}{p_1-a} = m$ atau $y - b = m(x - a)$, di mana garis $l$ melalui titik $P$ dan titik pusat dari lingkaran $\mathcal{A}_1$ sedemikian sehingga memotong lingkaran $\mathcal{A}_1$ di $R_1(x_1, y_1)$ dan $R_2(x_2, y_2)$.




Gambar 2. Garis $l$ memotong $\mathcal{A}_1$ dan $\mathcal{B}$ serta melalui titik $P$

Kemudian dengan menyubstitusikan persamaan garis $l$ ke persamaan $\mathcal{A}_1$, diperoleh

$$(x - a)^2 + \left(m(x - a)\right)^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)(x^2 - 2ax + a^2) - r^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar-akar persamaannya adalah

$$x_1 = a + \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}; \text{dan}$$
$$x_2 = a - \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Mengingat bahwa $m = \frac{p_2-b}{p_1-a}$, diperoleh bahwa

$$x_1 = a + \frac{r(p_1 - a)}{\sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}} \text{ ; dan}$$
$$x_2 = a - \frac{r(p_1 - a)}{\sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}}$$

Selanjutnya dengan menyubstitusikan $x_1$ dan $x_2$ ke persamaan garis $l$ diperoleh

$$y_1 = b + \frac{r(p_2 - b)}{\sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}}; \text{dan}$$
$$y_2 = b - \frac{r(p_2 - b)}{\sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}}$$

Kemudian dapat dicari jarak antara titik $P(p_1, p_2)$ dan $R(x_1, y_1)$ sebagai berikut

$$d(P,R_1) = \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (P_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2} - r$$

sedangkan jarak antara $P$ dan $R_2(x_2, y_2)$ adalah

$$d(P,R_2) = \sqrt{(p_1 - x_2)^2 + (P_2 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2} + r$$

Karena $r \geq 0$, maka $d(P,R_1) \leq d(P,R_2)$. Serta karena $\mathcal{A}_1$ adalah lingkaran terluar dari $\mathcal{A}$ diperoleh

$$dist(d,\mathcal{A}) = dist(P,\mathcal{A}_1)$$
$$= \inf\{d(P,R_1), d(P,R_2)\}$$
$$= d(P,R_1)$$
$$dist(d,\mathcal{A}) = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2} - r$$

Dengan menggunakan cara yang sama diperoleh

$$dist(P,\mathcal{B}) = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2} - s$$

Karena $s \leq r$, $s, r \geq 0$, diperoleh

$$dist(P,\mathcal{A}) \leq dist(P,\mathcal{B}) \leq dist(P,\mathcal{A}) + 2r$$

Dalam hal ini $2r = diam(\mathcal{A})$ sehingga diperoleh

$$dist(P,\mathcal{A}) \leq dist(P,\mathcal{B})$$
$$\leq dist(P,\mathcal{A}) + diam(\mathcal{A}) \quad \square$$

### 3.5 Pertidaksamaan Jarak Titik dan Himpunan terhadap Jarak antara Dua Titik

**Teorema 3.5** [3] *Diberikan $(X,d)$ adalah ruang metrik. Jika $a, b \in X$ dan himpunan tak kosong $S \subseteq X$, maka:*

(1) $dist(a,S) \leq d(a,b) + dist(b,S)$

(2) $|dist(a,S) - dist(b,S)|$
$$\leq d(a,b) \leq dist(a,S) + diam(S) + dist(b,S)$$

**Bukti.** (1) Diketahui $(X,d)$ adalah sebarang ruang metrik, $a, b \in X$, $S \subseteq X$ dan $S \neq \emptyset$. Diambil sebarang $s \in S$ sedemikian sehingga diperoleh: $inf\{d(a,s)\} = dist(a,S) \leq d(a,s)$, menurut sifat pertidaksamaan segitiga pada metrik berlaku $d(a,s) \leq d(a,b) + d(b,s)$. Karena pertidak-samaan di atas berlaku untuk setiap $b \in X$ sehingga untuk setiap $s \in S$ berlaku

$$\inf\{d(b,s) | b \in X, s \in S\} = dist(b,S)$$

akibatnya

$$dist(a,S) \leq d(a,s) \leq d(a,b) + dist(b,S)$$
$$\Leftrightarrow dist(a,S) \leq d(a,b) + dist(b,S)$$

(2) Diketahui $(X,d)$ adalah ruang metrik, $a, b \in X$, $S \subseteq X$ dan $S \neq \emptyset$. Menurut bagian (1) diperoleh:

$$dist(a,S) \leq d(a,b) + dist(b,S)$$
$$\Leftrightarrow dist(a,S) - dist(b,S) \leq d(a,b)$$

Selain itu juga diperoleh bahwa

$$dist(b,S) \leq d(a,b) + dist(a,S)$$
$$\Leftrightarrow -d(a,b) \leq dist(a,S) - dist(b,S)$$

Akibatnya diperoleh:

$$-d(a,b) \leq dist(a,S) - dist(b,S) \leq d(a,b)$$

karena $d(a,b) \geq 0$ pertidaksamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$|dist(a,S) - dist(b,S)| \leq d(a,b)$$

Selanjutnya, diambil sebarang $r, t \in S$ sedemikian sehingga berdasarkan sifat pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik diperoleh:

$$d(a,b) \leq d(a,r) + d(r,b)$$
$$\leq d(a,r) + d(r,t) + d(t,b)$$
$$= d(a,r) + d(r,t) + d(b,t)$$

dengan kata lain

$$d(a,b) \leq d(a,r) + d(r,t) + d(b,t)$$

karena pengambilan sebarang $r, t \in S$ akibatnya terdapat $r', t', r'', t'' \in S$ sedemikian sehingga untuk $a, b \in X$ berlaku

$$d(a,r') = inf\{d(a,r)\} = dist(a,S)$$

$$d(b,t') = inf\{d(b,t)\} = dist(b,S)$$
$$d(r'',t'') = sup\{d(r,t)\} = diam(S)$$

sehingga

$$d(a,b) \leq dist(a,S) + diam(S) + dist(b,S)$$

Akibatnya terbukti bahwa pertidaksamaan berikut berlaku

$$|dist(a,S) - dist(b,S)| \leq d(a,b) \leq dist(a,S) + diam(S) + dist(b,S) \quad \square$$

**3.6 Pertidaksamaan Jarak Titik dan Lingkaran terhadap Jarak antara Dua Titik**

Misalkan suatu lingkaran $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan dengan

$$\mathcal{A} \coloneqq x^2 + y^2 = r^2$$

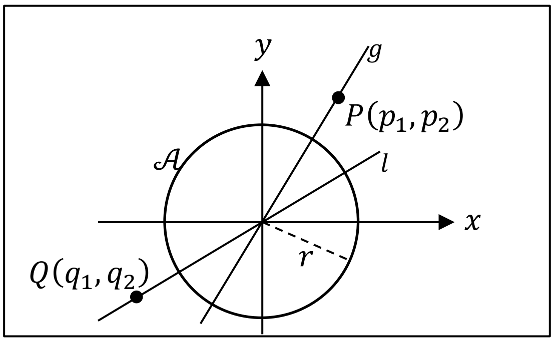
dan diberikan sebarang titik $P, Q \in \mathbb{R}^2$ dengan $P(p_1, p_2)$ dan $Q(q_1, q_2)$, akan ditunjukkan bahwa:

(1) $dist(P,\mathcal{A}) \leq d(P,Q) + dist(Q,\mathcal{A})$

(2) $|dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A})| \leq d(P,Q) \leq dist(Q,\mathcal{A}) + diam(\mathcal{A}) + dist(Q,\mathcal{A})$

**Penyelesaian.** Diketahui suatu lingkaran $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan sebarang titik $P, Q \in \mathbb{R}^2$ dengan $P(p_1, p_2)$ dan $Q(q_1, q_2)$.

(1) Tarik garis $l$ yang melalui titik $P$ dan pusat lingkaran $\mathcal{A}$ dan garis $g$ yang melalui titik $Q$ dan pusat lingkaran $\mathcal{A}$. Perhatikan gambar berikut:




Gambar 3. Lingkaran $\mathcal{A}$ dan titik-titik $P$ dan $Q$

Pada subbab 3.3 dan 3.4 telah diketahui bahwa jarak antara titik $P$ dan lingkaran $\mathcal{A}$ adalah

$$d(P,\mathcal{A}) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - r$$

dan jarak antara titik $Q$ dan lingkaran $\mathcal{A}$ diperoleh:

$$dist(Q,\mathcal{A}) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} - r$$

Selanjutnya, berdasarkan Sifat Pertidaksamaan segitiga diperoleh,

$$\begin{aligned} dist(P,\mathcal{A}) &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - r \\ &\leq \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_1 - q_1)^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} - r \\ &\leq d(P,Q) + dist(Q,\mathcal{A}) \end{aligned}$$

atau dengan kata lain,

$$dist(P,\mathcal{A}) \leq d(P,Q) + dist(Q,\mathcal{A})$$

(2) Pada bagian (1) telah diperoleh:

$$dist(P,\mathcal{A}) \leq d(P,Q) + dist(Q,\mathcal{A})$$
$$\Leftrightarrow dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A}) \leq d(P,Q)$$

Selain itu juga diperoleh bahwa

$$dist(Q,\mathcal{A}) \leq d(P,Q) + dist(P,\mathcal{A})$$
$$\Leftrightarrow -d(P,Q) \leq dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A})$$

sehingga diperoleh bahwa

$$-d(P,Q) \leq dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A}) \leq d(P,Q)$$
$$\Leftrightarrow |dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A})| \leq d(P,Q)$$

Selanjutnya, diambil sebarang titik $a, b \in \mathcal{A}$ dengan $a(a_1, a_2)$ dan $b(b_1, b_2)$ sedemikian sehingga menurut Teorema 2.3.5 diperoleh:

$$d(P,Q) \leq d(P,a) + d(Q,a)$$
$$\leq d(P,a) + d(a,b) + d(Q,a)$$

Akibatnya

$$d(P,Q) \leq \sup\{d(P,a)|a \in S\} + d(a,b)$$
$$+ \sup\{d(Q,a)|a \in S\}$$
$$= d(P,\mathcal{A}) + d(a,b) + d(Q,\mathcal{A})$$

Karena $a, b \in S$ sembarang, maka diperoleh bahwa

$$d(a,b) \leq \sup\{(d(a,b)|a,b \in S\} = diam(\mathcal{A})$$

Jadi $d(P,Q) \leq d(P,\mathcal{A}) + diam(\mathcal{A}) + d(Q,\mathcal{A})$. Hal ini mengakibatkan berlakunya pertidaksamaan

$$|dist(P,\mathcal{A}) - dist(Q,\mathcal{A})|$$
$$\leq d(P,Q) \leq dist(Q,\mathcal{A}) + diam(\mathcal{A})$$
$$+ dist(Q,\mathcal{A}) \ \square$$

### 3.7 Pertidaksamaan Jarak Dua Himpunan terhadap Jarak Titik dan Himpunan

**Definisi 3.6** [3] *Diberikan suatu ruang metrik $(X, d)$ dan $A, B \subseteq X$. Jarak antara himpunan $A$ dan $B$ didefinisikan sebagai*

$$dist(A,B) = inf\{d(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

**Teorema 3.7** [3] *Diberikan $(X, d)$ adalah ruang metrik. Jika $x \in X$ dan $A, B \subseteq X$, maka*

$$dist(A,B) \leq dist(x,A) + dist(x,B)$$

**Bukti.** Diketahui sebarang ruang metrik $(X, d)$, $x \in X$ dan $A, B \subseteq X$. Diambil sebarang $a \in A$ dan $b \in B$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dengan $\varepsilon > 0$ berlaku

$$dist(x,A) \leq d(x,a) \leq dist(x,A) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$dist(x,B) \leq d(x,b) \leq dist(x,B) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan Definisi 3.6 dan sifat pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik diperoleh

$$dist(A,B) \leq d(a,b)$$
$$\leq d(x,a) + d(x,b)$$
$$\leq dist(x,A) + \frac{\varepsilon}{2} + dist(x,B) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq dist(x,A) + dist(x,B) + \varepsilon$$

atau dengan kata lain,

$$d(A,B) \leq dist(x,A) + dist(x,B) + \varepsilon$$

Karena Pertidaksamaan di atas berlaku untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dengan $\varepsilon > 0$, sehingga diperoleh

$$dist(A,B) \leq dist(x,A) + dist(x,B) \ \square$$

### 3.8 Pertidaksamaan Jarak Dua Lingkaran terhadap Jarak Titik dan Lingkaran

Misalkan sebarang lingkaran $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{A} \coloneqq x^2 + y^2 = r^2$$
$$\mathcal{B} \coloneqq (x-a)^2 + (y-b)^2 = s^2$$

dengan $r \geq 0$ dan $s \geq 0$ dan titik $P(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ yang terletak di luar lingkaran $\mathcal{A}$ dan lingkaran $\mathcal{B}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$dist(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq dist(P,\mathcal{A}) + dist(P,\mathcal{B})$$

**Penyelesaian.** Diketahui lingkaran $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan sebarang titik $P(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ di luar lingkaran $\mathcal{A}$ dan lingkaran $\mathcal{B}$. Berdasarkan Definisi 3.6, jarak antara titik $P$ dan lingkaran $\mathcal{A}$ adalah

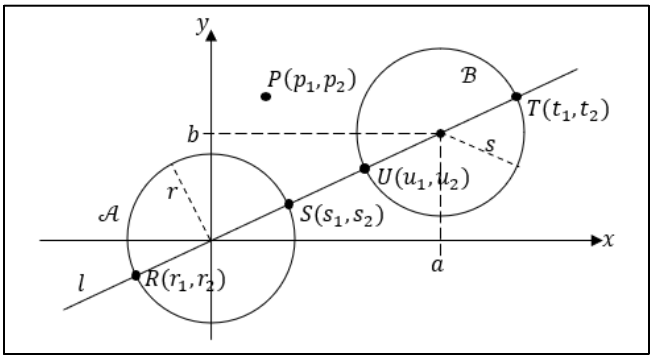
$$dist(P,\mathcal{A}) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - r$$

Sedangkan jarak antara $P$ dan lingkaran $\mathcal{B}$ adalah

$$dist(P,\mathcal{B}) = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2} - s$$

Kemudian ditarik garis $l$ yang melalui titik pusat lingkaran $\mathcal{A}$ dan lingkaran $\mathcal{B}$ sedemikian sehingga garis $l$ memotong lingkaran $\mathcal{A}$ di titik

$R(r_1, r_2)$ dan $S(s_1, s_2)$ dengan $R, S \in \mathcal{A}$ dan memotong lingkaran lingkaran $\mathcal{B}$ di titik $T(t_1, t_2)$ dan $U(u_1, u_2)$ dengan $T, U \in \mathcal{B}$. Perhatikan gambar berikut




Gambar 3. 4 Lingkaran $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ terpisah dan titik *P*

Garis $l$ didefinisikan sebagai berikut:

$$l := \frac{y-0}{x-0} = \frac{b-0}{a-0} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Akibatnya diperoleh bahwa

$$R(r_1, r_2) = R\left(\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$S(s_1, s_2) = S\left(-\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$T(t_1, t_2) = T\left(a + \frac{as}{\sqrt{a^2+b^2}}, b + \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$U(u_1, u_2) = U\left(a - \frac{as}{\sqrt{a^2+b^2}}, b - \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Karena titik-titik $T$ dan $U$ berada di luar lingkaran $\mathcal{A}$, maka jarak titik $T$ terhadap $\mathcal{A}$ dan titik $U$ terhadap $\mathcal{A}$ berturut-turut adalah sebagai berikut

$$dist(T, \mathcal{A}) = \sqrt{\left(a + \frac{as}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(b + \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} - r$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} + s - r$$

selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh:

$$dist(U, \mathcal{A}) = \sqrt{a^2+b^2} - s - r$$

karena $\sqrt{(a^2+b^2)} \geq 0$, $s \geq 0$ dan $r \geq 0$ diperoleh:

$$dist(U, \mathcal{A}) \leq dist(T, \mathcal{A})$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} dist(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \inf\{dist(T, \mathcal{A}), dist(U, \mathcal{A})\} \\ &= dist(U, \mathcal{A}) \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)} - s - r \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan sifat pertidaksamaan segitiga diperoleh:

$$\begin{aligned} dist(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sqrt{a^2+b^2} - s - r \\ &\leq \sqrt{(a-p_1)^2 + (b-p_2)^2} - s \\ &\quad + \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - r \\ &= dist(P, \mathcal{A}) + dist(P, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

Jadi pertidaksamaan

$$dist(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq dist(P, \mathcal{A}) + dist(P, \mathcal{B})$$

Terbukti □

## 4. Kesimpulan Dan Saran

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini adalah

1. Misalkan cakram $\mathcal{A}$ dan lingkaran $\mathcal{B}$ dengan $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ serta $P \in \mathbb{R}^2$, berlaku
   a. $diam(\mathcal{B}) \leq diam(\mathcal{A})$
   b. $dist(P, \mathcal{A}) \leq dist(P, \mathcal{B}) \leq dist(P, \mathcal{A}) + diam(\mathcal{A})$
2. Misalkan lingkaran $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $P, Q \in \mathbb{R}^2$, berlaku
   a. $dist(P, \mathcal{A}) \leq d(P, Q) + dist(Q, \mathcal{A})$
   b. $|dist(P, \mathcal{A}) - dist(Q, \mathcal{A})| \leq d(P, Q) \leq dist(Q, \mathcal{A}) + diam(\mathcal{A}) + dist(Q, \mathcal{A})$
3. Misalkan lingkaran $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $P \in \mathbb{R}^2$, berlaku
   $$dist(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq dist(P, \mathcal{A}) + dist(P, \mathcal{B})$$

## 5. Ucapan Terima Kasih

Ungkapan Terima kasih disampaikan kepada pihak-pihak yang terlibat dalam pelaksanaan kegiatan penelitian ini.

## Daftar Pustaka

[1] N. Y. Özgür and N. Taş. 2019. Some Fixed-Circle Theorems on Metric Spaces. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, vol. 42, no. 4, pp. 1433–1449. doi: 10.1007/s40840-017-0555-z.

[2] R. G. Bartle and D. R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis*, 4th ed. Wiley, New York.

[3] M. Ó. Searcóid. 2007. *Metric Space*. Springer, London.

[4] D. J. Velleman. 2019. *How to Prove It: A Structured Approach*, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] A. Brudnyi and Y. Brudnyi. 2006. Extension of Lipschitz functions defined on metric subspaces of homogeneous type. *arXiv Prepr. math/0609535*.