UIN IMAM BONJOL PADANG
MAp Journal
Mathematics & Applications
Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

S-RING KELAS INTERVAL NATURAL

S-RING OF NATURAL CLASS OF INTERVAL

Dyana Patty[1§], Henry W. M. Patty[2]

[1]Prodi Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon, Indonesia [pattydyana@gmail.com]
[2]Prodi Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon, Indonesia [henrywmpatty81@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

Received Mei 2020; Accepted Juni 2020; Published Juni 2020;

Abstrak

Artikel ini memperkenalkan kelas baru interval yang disebut kelas interval natural. Perlu dijelaskan bahwa kelas dalam artikel ini bukanlah kelas yang terbentuk karena relasi ekuivalensi dan kata natural tidak merujuk pada himpunan bilangan asli. Diberikan $[x, y]$ adalah interval tutup dari $\mathbb{Z}$ atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$. Interval tutup $[x, y]$ disebut interval naik jika $x < y$, interval tutup $[x, y]$ disebut interval turun jika $x > y$ dan interval tutup $[x, y]$ disebut interval merosot jika $x = y$. Hal yang sama juga berlaku untuk interval buka, interval buka tutup dan interval tutup buka. Koleksi interval naik, interval turun dan interval merosot selanjutnya disebut kelas interval natural. Dalam artikel ini akan dibahas struktur ring yang dibangun oleh kelas interval natural beserta sifat-sifatnya. Lebih lanjut akan diberikan syarat cukup agar suatu ring kelas interval natural merupakan S-ring kelas interval natural.

Kata Kunci: Interval merosot, interval naik, interval turun, ring kelas interval natural, S-ring kelas interval natural.

Abstract

This paper introduces a new class of interval called the natural class of interval. Throughout this paper, the word class does not refer to class that formed by equivalence relation, and the word natural does not refer to the set of natural numbers. Let $[x, y]$ be a closed interval from $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$ or $\mathbb{Z}_n$ where $n < \infty$. If $x < y$ then define $[x, y]$ as increasing closed interval. If $x > y$ then $[x, y]$ is decreasing closed intervals and if $x = y$ then define $[x, y]$ as degenerate closed interval. The same thing applied to an open interval, half open and half closed interval. Let the collection of all increasing intervals, decreasing intervals and degenerate intervals defined as natural class of interval. This paper discuss about structure of ring generated by natural class of interval and their properties. Furthermore we also give several conditions of ring of natural class of interval to be S-ring of natural class of interval.

Keywords: *decreasing intervals, degenerate intervals, increasing intervals, ring of natural class of interval, S-ring of natural class of interval.*

1. Pendahuluan

Dalam struktur aljabar abstrak, telah diketahui bahwa himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$, terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif, terhadap operasi perkalian merupakan semigrup dan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan. Struktur aljabar ini selanjutnya disebut ring bilangan bulat dan dinotasikan dengan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ [6]. Jika suatu struktur aljabar umumnya dibangun dari himpunan bilangan, himpunan matriks dan himpunan fungsi [7], maka pada tahun 2010 Kandasamy, Smarandache dan Chetry membangun suatu grupoid dari himpunan interval [2]. Selanjutnya pada tahun 2011 Kandasamy dan Smarandache melanjutkan dengan membangun semigrup interval [3] dan semiring interval [4]. Termotivasi dari struktur-struktur tersebut, di tahun yang sama, Kandasamy dan Smarandache kemudian membahas struktur aljabar ring yang dibangun oleh kelas interval natural.

Diberikan $[x, y]$ adalah interval tutup $\mathbb{Z}$ atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$. Interval tutup $[x, y]$ disebut interval naik jika $x < y$, $[x, y]$ disebut interval turun jika $x > y$ dan $[x, y]$ disebut interval merosot jika $x = y$. Hal yang sama juga berlaku untuk interval buka, interval setengah buka dan interval setengah tutup. Koleksi interval naik, interval turun dan interval merosot selanjutnya disebut kelas interval natural atau dengan kata lain kelas interval natural terdiri dari koleksi interval naik, interval turun dan interval merosot. Kelas interval natural selanjutnya merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian interval.

Jika diberikan R ring kelas interval natural dan dapat ditemukan $F \subset R$ dimana F adalah lapangan maka ring kelas interval natural R disebut S-ring kelas interval natural. Tetapi lapangan F tidak selalu dapat ditemukan. Untuk itu dalam penelitian ini akan diberikan beberapa syarat cukup agar suatu ring kelas interval natural merupakan S-ring kelas interval natural. Konsep S-ring kelas interval natural selanjutnya dapat dijadikan dasar untuk membangun S-ring matriks kelas interval natural dan S-ring polinomial kelas interval natural.

2. Sifat-Sifat Ring Kelas Interval Natural

Subbab ini akan menyajikan definisi ring kelas interval natural dan elemen-elemen yang mempunyai sifat khusus pada ring kelas interval natural. Pertama akan diberikan definisi ring kelas interval sebagai berikut.

Definisi 2.1. [5] *Misalkan* $R = \{N_o(\mathbb{Z})\}$ *adalah kelas interval buka natural* $\mathbb{Z}$ *dan didefiniskan operasi* " $+$ " *dan* " $\times$ " *pada R sebagai berikut :*

$$[(a, b) + (c, d)] = [(a + c, b + d)]$$

$$[(a, b) \times (c, d)] = [(ac, bd)]$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in R$. *Himpunan R merupakan ring terhadap operasi* " $+$ " *dan* " $\times$ " *yang selanjutnya disebut ring kelas interval buka natural dan dinotasikan dengan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}), +, \times\}$.

Selanjutnya dalam keseluruhan penelitian ini himpunan $\mathbb{Z}$ pada Definisi 2.1 dapat diganti dengan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$ dan interval natural buka N_o dapat diganti dengan interval natural tutup N_c atau interval setengah buka N_{oc} atau interval setengah tutup N_{co}.

Sama halnya dengan ring, pada ring kelas interval natural juga terdapat beberapa elemen yang mempunya sifat khusus seperti elemen pembagi nol, unit, elemen idempoten dan elemen nilpoten. Sebarang ring kelas interval natural selalu memiliki elemen pembagi nol yaitu $(0, a)$ dan $(a, 0)$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua pembagi nol $(0, a)$ dan $(a, 0)$ adalah ideal.

Teorema 2.2. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dan* $p < \infty$. *Berlaku sifat-sifat berikut.*

1. $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq R$ *ideal di* R.
2. $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq R$ *ideal di* R.

BUKTI

1. Akan ditunjukkan $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq R$ ideal di R.
   i. Diambil sebarang $(0, a_1), (0, a_2) \in J$ dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_p$. Akan ditunjukkan $(0, a_1) - (0, a_2) \in J$.
   $$\begin{aligned}(0, a_1) - (0, a_2) &= (0 - 0, a_1 - a_2)\\ &= (0, a_1 - a_2) \in J\end{aligned}$$
   ii. Diambil sebarang $(0, a_1) \in J, (x, y) \in R$ dengan $a_1, x, y \in \mathbb{Z}_p$. Akan ditunjukkan $(0, a_1) \times (x, y) \in J$.
   $$\begin{aligned}(0, a_1) \times (x, y) &= (0 \times x, a_1 \times y)\\ &= (0, a_1 y) \in J\\ (x, y) \times (0, a_1) &= (x \times 0, y \times a_1)\\ &= (0, y a_1) \in J\end{aligned}$$
   Jadi J ideal di R.
2. Akan ditunjukkan $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_p\} \subseteq R$ ideal di R.
   i. Diambil sebarang $(a_1, 0), (a_2, 0) \in K$ dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_p$. Akan ditunjukkan $(a_1, 0) - (a_2, 0) \in K$.
   $$\begin{aligned}(a_1, 0), (a_2, 0) &= (a_1 - a_2, 0 - 0)\\ &= (a_1 - a_2, 0) \in K\end{aligned}$$
   ii. Diambil sebarang $(a_1, 0) \in K, (u, v) \in R$ dengan $a_1, u, v \in \mathbb{Z}_p$. Akan ditunjukkan $(a_1, 0) \times (u, v) \in K$.
   $$\begin{aligned}(a_1, 0) \times (u, v) &= (a_1 \times u, 0 \times v)\\ &= (a_1 u, 0) \in K\\ (u, v) \times (a_1, 0) &= (u \times a_1, v \times 0)\\ &= (u a_1, 0) \in K\end{aligned}$$
   Jadi K ideal di R. ■

Berikut didefiniskan ring faktor kelas interval natural yang dibentuk oleh ideal J dan ideal K pada Teorema 2.2.

Definisi 2.3. *Misalkan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural* $\mathbb{Z}_n$ *dengan* $n < \infty$. *Ring* $\left({}^{R}/_{J}, +, \times\right)$ *dan* $\left({}^{R}/_{K}, +, \times\right)$ *disebut ring faktor kelas interval natural yang dibentuk oleh ideal* $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_n\}$ *dan ideal* $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_p\}$.

Berikut ini diberikan contoh ring faktor kelas interval natural.

Contoh 2.4. Misalkan $R = \{N_c(\mathbb{Z}_5), +, \times\}$ adalah ring kelas interval natural. Selanjutnya diberikan $P = \{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], [0,4]\} \subseteq R$. Berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh P adalah ideal di R. Selanjutnya akan dibentuk ring faktor ${}^{R}/_{P}$.

Pertama-tama akan didaftarkan elemen ring $R = \{N_c(\mathbb{Z}_5), +, \times\}$ yaitu :

$$R = \begin{Bmatrix} [0,0],[0,1],[0,2],[0,3],[0,4] \\ [1,0],[1,1],[1,2],[1,3],[1,4] \\ [2,0],[2,1],[2,2],[2,3],[2,4] \\ [3,0],[3,1],[3,2],[3,3],[3,4] \\ [4,0],[4,1],[4,2],[4,3],[4,4] \end{Bmatrix}$$

Selanjutnya elemen ring faktor $R/_P$ adalah

$$R/_P = \begin{Bmatrix} [0,0]+P,[1,0]+P,[1,1]+P, \\ [1,2]+P,[1,3]+P,[1,4]+P \\ [2,0]+P,[2,1]+P,[2,2]+P, \\ [2,3]+P,[2,4]+P,[3,0]+P, \\ [3,1]+P,[3,2]+P,[3,3]+P, \\ [3,4]+P[4,0]+P,[4,1]+P, \\ [4,2]+P,[4,3]+P,[4,4]+P \end{Bmatrix}$$

Terlihat bahwa $|R/_P| = 21$.

Berdasarkan Contoh 2.4 diperoleh sifat umum terkait order dan karakteristik ring faktor kelas interval natural $\mathbb{Z}_n$ dengan $n < \infty$.

Teorema 2.5. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dimana* $n < \infty$ *dan banyaknya elemen pada* R *adalah* n^2. *Jika* J *dan* K *adalah ideal-ideal di* R *maka ring faktor* $R/_J$ *dan* $R/_K$ *adalah ring berhingga dengan order* $n^2 - n + 1$ *dan memiliki karakteristik* (n, n).

BUKTI

Diketahui $|R|$ adalah n^2. Selanjutnya karena $|J| = |K| = n$, $J \cap K \subseteq R$ dan eksistensi elemen netral $(0,0) \in J \cap K$ maka diperoleh $|R/_J| = |R/_K| = |R| - |J| + 1 = n^2 - n + 1$. Ring faktor kelas interval natural $R/_J$ dan $R/_K$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $(a, b) \in R$ terdapat $(n, n) \in N_c(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga $(n, n) \times (a, b) = (0,0)$. Jadi ring faktor $R/_J$ *dan* $R/_K$ memiliki karakteristik (n, n). ■

Berikut ini diberikan contoh ring faktor kelas interval natural $\mathbb{Z}_n$ dengan n adalah bilangan komposit.

Contoh 2.6. Diberikan $R = \{N_o(\mathbb{Z}_{15}), +, \times\}$ ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dan misalkan $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_{15}\} \subseteq R$ ideal di R. Dapat dibentuk ring faktor $R/_J = \{0 + J, (a, a) + J, (a, 0) + J, (a, b) + J, (b, a) + J | a, b \in \mathbb{Z}_{15} \backslash \{0\}\}$. Selanjutnya ring faktor $R/_J$ memiliki elemen pembagi nol dan unit.

Elemen pembagi nol di $R/_J$ adalah $(3,5) + J$ dan $(5,3) + J$ karena

$[(3,5) + J][(5,3) + J] = (0,0) + J \ (mod\ 15)$.

$[(5,3) + J][(3,5) + J] = (0,0) + J \ (mod\ 15)$.

Elemen unit di $R/_J$ adalah $(14,14) + J$ karena $[(14,14) + J][(14,14) + J] \equiv (1,1) + P \ (mod\ 15)$.

Berdasarkan Contoh 2.6 diperoleh sifat umum terkait elemen pembagi nol dan elemen unit pada ring faktor kelas interval natural $\mathbb{Z}_n$ dengan n adalah bilangan komposit.

Teorema 2.7. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dimana* n *adalah bilangan komposit. Jika* $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *dan* $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *adalah ideal-ideal di* R *maka* $R/_J$ *dan* $R/_K$ *memiliki elemen pembagi nol dan unit.*

BUKTI

Diambil sebarang $(p_1, p_2) + J \in {}^{R}/_{J}$ dengan $(p_1, p_2) \in R$ dan $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_n$. Elemen $(p_1, p_2) + J \in {}^{R}/_{J}$ dan $(p_2, p_1) + J \in {}^{R}/_{J}$ merupakan elemen pembagi nol di ${}^{R}/_{J}$ karena terdapat $(p_2, p_1) + J$ dan $(p_1, p_2) + J \in {}^{R}/_{J}$ sedemikian sehingga $[(p_1, p_2) + J][(p_2, p_1) + J] = (0,0) + J\ (mod\ n)$ dan $[(p_2, p_1) + J][(p_1, p_2) + J] = (0,0) + J\ (mod\ n)$. Hal yang sama juga berlaku untuk ring faktor ${}^{R}/_{K}$ yaitu elemen pembagi nol di ${}^{R}/_{K}$ adalah $(p_1, p_2) + K$ dan $(p_2, p_1) + K$. ■

Teorema 2.8. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dimana* n *adalah bilangan komposit. Jika* $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *dan* $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *adalah ideal-ideal di R maka* ${}^{R}/_{J}$ *dan* ${}^{R}/_{K}$ *memiliki elemen unit.*

BUKTI

Diambil sebarang $(n-1, n-1) \in R$, elemen unit di ${}^{R}/_{J}$ *dan* ${}^{R}/_{K}$ adalah$(n-1, n-1) + J$ dan $(n-1, n-1) + K$. Diperhatikan bahwa

$[(n-1, n-1) + J][(n-1, n-1) + J]$

$= [((n-1)^2, (n-1)^2) + J]$

$= [(n^2 - 2n + 1, n^2 - 2n + 1) + J]$

$\equiv (1,1) + J\ (mod\ n)$

Hal yang sama juga berlaku untuk ${}^{R}/_{K}$ yaitu elemen unit di ${}^{R}/_{K}$ adalah $(n-1, n-1) + K$. ■

Selanjutnya akan diberikan sifat yang berkaitan dengan elemen idempoten dan elemen nilpoten di ring faktor kelas interval natural ${}^{R}/_{J}$ *dan* ${}^{R}/_{K}$.

Teorema 2.9. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dimana* $n < \infty$ *adalah bilangan komposit dan* $J = \{(0, a) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *serta* $K = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *adalah ideal-ideal di* S*. Jika* $n = 2p$*, untuk setiap* p *prima ganjil maka* ${}^{R}/_{J}$ *dan* ${}^{R}/_{K}$ *memiliki elemen idempoten.*

BUKTI

Diambil sebarang $(p, p) + J \in {}^{R}/_{J}$ dengan $(p, p) \in R$ dan p prima ganjil. Akan ditunjukkan $(p, p)^2 + J \equiv (p, p) + J\ (mod\ 2p)$.

Diperhatikan bahwa

$$(p, p)^2 + J \equiv (p, p) + J\ (mod\ n)$$

$$[(p, p)^2 + (p, p)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$(p, p)[(p, p) + (1,1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$(p, p)[(p + 1, p + 1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$[p(p + 1), p(p + 1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

Karena diketahui p prima ganjil maka $p + 1$ adalah genap. Dari sini diperoleh $p(p + 1)$ genap. Selanjutnya karena $n = 2p$ diperoleh $[p(p + 1), p(p + 1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ 2p)$ yaitu $(p, p) + J$ merupakan elemen idempoten di ${}^{R}/_{J}$. Sedangkan $(p, p) + K$ merupakan elemen idempoten di ${}^{R}/_{K}$. ■

Jika pada Teorema 2.9, $n = 2p$ dan p adalah bilangan genap maka diperoleh sifat yang berkaitan dengan elemen nilpoten pada ring faktor kelas interval natural.

Teorema 2.10. [5] *Misalkan diberikan* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$ *adalah ring kelas interval natural komutatif dengan elemen satuan dimana* $n < \infty$ *adalah bilangan komposit dan* $J = \{(0,a) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *serta* $K = \{(a,0) | a \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq R$ *adalah ideal-ideal di* R. *Jika* $n = 2p$, *untuk setiap* p *genap maka* $R/_J$ *dan* $R/_K$ *memiliki elemen nilpotent.*

BUKTI

Diambil sebarang $(p,0) + J \in R/_J$ dengan $(p,0) \in R$ dan p genap. Akan ditunjukkan $(p,0)^2 + J \equiv (0,0) + J\ (mod\ 2p)$.

Diperhatikan bahwa

$$(p,0)^2 + J \equiv (p,0) + J\ (mod\ n)$$

$$[(p,0)^2 + (p,0)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$(p,0)[(p,0) + (1,1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$(p,0)[(p+1,1)] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

$$[p(p+1), 0] + J \equiv 0 + J\ (mod\ n)$$

Karena diketahui p genap maka $p+1$ adalah ganjil. Dari sini diperoleh $p(p+1)$ genap. Selanjutnya karena $n = 2p$ diperoleh $[p(p+1), 0] + J \equiv 0 + J\ (mod\ 2p)$ yaitu $(p,0) + J$ merupakan elemen nilpoten di $R/_J$. Elemen nilpoten di $R/_K$ adalah $(0,p) + K$. ■

3. S-Ring Kelas Interval Natural

Konsep S-ring merupakan salah satu konsep struktur aljabar yang diperkenalkan oleh Florentin Smarandache dan Padila Raul pada tahun 1998. Jika diberikan R ring dan dapat ditemukan $A \subset R$ dimana A adalah lapangan maka ring R disebut S-ring [1]. Selanjutnya pada tahun 2011 Kandasamy dan Florentin mengembangkan struktur S-ring pada kelas interval natural. Pada bagian awal akan dijelaskan tentang definisi lapangan kelas interval natural dan dilanjutkan dengan definisi S-ring kelas interval natural.

Definisi 3.1. [5] *Diberikan ring kelas interval natural* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$. *Ring* R *disebut lapangan kelas interval natural jika setiap elemen tak nol di* R *merupakan unit, yaitu untuk setiap* $(a,b) \in R \backslash \{(0,0), (0,a), (a,0)\}$ *terdapat* $(a,b)^{-1} \in R$ *sedemikian sehingga* $(a,b)(a,b)^{-1} = (e,e)$, *dimana* (e,e) *adalah elemen identitas di* R.

Berikut diberikan contoh lapangan kelas interval natural untuk memperjelas definisi di atas.

Contoh 3.2. Diberikan ring kelas interval natural $R = \{N_o(\mathbb{Z}_3), +, \times\}$. Akan ditunjukkan ring R merupakan lapangan kelas interval natural. Elemen tak nol di R adalah $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Dari sini diperoleh

$$(1,1)(1,1) = (1,1)$$

$$(1,2)(1,2) = (1,1)$$

$$(2,1)(2,1) = (1,1)$$

$$(2,2)(2,2) = (1,1)$$

Diperhatikan bahwa invers setiap elemen tak nol adalah dirinya sendiri. Jadi R adalah lapangan kelas interval natural.

Selanjutnya diberikan definisi S-ring kelas interval natural.

Definisi 3.3. [5] *Diberikan ring kelas interval natural* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_n), +, \times\}$. *Ring* R *disebut* S-*ring kelas interval natural jika memuat subhimpunan sejati* F *sedemikian sehingga* F *nerupakan lapangan kelas interval natural terhadap operasi yang sama dengan* R.

Contoh 3.4. Diberikan ring kelas interval natural $R = \{N_o(\mathbb{Z}_6), +, \times\}$. Terdapat

$$F = \left\{ \begin{matrix} (0,0), (0,2), (0,4), \\ (2,0), (2,2), (2,4), \\ (4,0), (4,2), (4,4) \end{matrix} \right\} \subset \mathrm{R}$$

dimana F adalah ring dan elemen identitas di F adalah $(4,4)$. Akan ditunjukkan setiap elemen tak nol di F merupakan unit. Diperoleh,

$$(2,2)(2,2) = (4,4)$$
$$(2,4)(2,4) = (4,4)$$
$$(4,2)(4,2) = (4,4)$$
$$(4,4)(4,4) = (4,4)$$

Diperhatikan bahwa setiap elemen tak nol merupakan invers terhadap dirinya sendiri. Jadi F merupakan lapangan. Sehingga, R adalah S-ring kelas interval natural.

Dari pendefinisian di atas jelas bahwa tidak semua ring kelas interval natural merupakan S-ring kelas interval natural, sehingga diperlukan syarat cukup suatu ring disebut S-ring kelas interval natural.

Teorema 3.5. [5] *Untuk sebarang bilangan prima* p *di* $\mathbb{Z}$, *ring kelas interval* $R = \{N_o(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$ *merupakan* S-*ring kelas interval natural. Hal yang sama juga berlaku untuk ring* $\{N_c(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$ *atau* $\{N_{oc}(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$ *atau* $\{N_{co}(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$.

BUKTI

Misakan $F = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}\} \subset R$. Akan ditunjukkan F merupakan lapangan. Diambil sebarang $(p-1, p-1) \in F$. Akan ditunjukkan terdapat $(p-1, p-1)^{-1}$ sedemikian sehingga

$$(p-1, p-1)(p-1, p-1)^{-1} = (1,1)$$

Diperhatikan bahwa invers setiap elemen tak nol di F adalah dirinya sendiri. Dari sini diperoleh

$$[(p-1, p-1)(p-1, p-1)]$$
$$= [(p-1)^2, (p-1)^2] (mod\ p)$$
$$= (p^2 - 2p + 1, p^2 - 2p + 1)\ (mod\ p)$$
$$= (1,1)$$

Diperoleh $F \subset R$ lapangan, jadi R adalah S-ring kelas interval natural. ■

Berikut ini diberikan syarat cukup S-ring kelas interval natural yang berkaitan dengan ring faktor.

Teorema 3.6. [2] *Diberikan ring kelas interval natural* $R = \{N_c(\mathbb{Z}_p), +, \times\}$ *dengan p prima. Jika* $J = \{[0, a] | a \in \mathbb{Z}_p\}$ *adalah ideal di* R *maka ring faktor* $R/_J$ *adalah* S-*ring kelas interval natural.*

BUKTI

Diperhatikan bahwa elemen dari ring faktor $R/_J = \{[0,0] + J, [a,a] + J, [a,0] + J, [a,b] + J | a, b \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}\}$. Selanjutnya sesuai dengan Teorema 2.7 diperoleh ring faktor $R/_J$ memiliki unit. Misalkan diambil $V = \{[a,a] + J | a \in \mathbb{Z}_p\} \subset {}^{R}/_{J}$. Akan ditunjukkan V merupakan lapangan. Diambil sebarang $a \in \mathbb{Z}_p$ dimana $a = p - 1$. Sesuai dengan Teorema 3.5 diperoleh $(a,a) \in R$ merupakan unit di R. Dari sini diperoleh $(a,a) + J$ unit di V. Jadi V merupakan lapangan sehigga ring faktor kelas interval natural ${}^{R}/_{J}$ adalah S-ring. ■

4. Kesimpulan Dan Saran

Beberapa hasil penting atau sifat yang dapat dijadikan kesimpulan dan saran dalam adalah sebagai berikut :

1. Struktur ring dapat dibangun dari kelas interval natural.
2. Struktur S-ring kelas interval natural merupakan kejadian khusus dari struktur ring.
3. Jika R merupakan ring kelas interval natural $\mathbb{Z}_p$ dengan p prima dan $J = \{[0,a] | a \in \mathbb{Z}_p\}$ adalah ideal di R maka ring faktor ${}^{R}/_{J}$ adalah S-ring kelas interval natural.
4. Penelitian ini masih bisa dilanjutkan untuk membangun struktur yang lain pada kelas interval natural yaitu struktur ring matriks kelas interval natural dan ring polinomial kelas interval natural.

5. Ucapan Terima Kasih

Pada artikel ini penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Pengelola Rumah Jurnal UIN Imam Bonjol Padang.
2. MAp Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang.
3. Rekan-rekan Dosen Program Studi Matematika FMIPA Universitas Pattimura.
4. Para penulis MAp Journal Program Studi Matematika UIN Imam Bonjol Padang.

Daftar Pustaka

[1] Kandasamy, W. B. V., (2002). *Smarandache Rings*. United States of Amerika : The American Research Press..

[2] Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F., Chetry, M. K. (2010). *Interval Grupoids.* United States of Amerika: Infolearnquest.

[3] Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. (2011). *Intervals Semigroups.* United States of Amerika: Kappa and Omega.

[4] Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. (2011). *Intervals Semirings.* United States of Amerika: Kappa and Omega.

[5] Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. (2011). *Algebraic Structures Using Natural Class of Intervals*. United States of Amerika : The Educational Publisher, Inc.

[6] Malik, D. S., Mordeson, J. N., Sen, M. K (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. United States of America : Scientific Word.

[7] Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Susanti, Y. (2016). Teori Ring dan Modul. Yogyakarta : Gadjah Mada University Press