Volume 1 Issue 1 (2021) Pages 105-114
JOSTECH
Journal of Science and Technology
Website: https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/jostech Email: jostech@uinib.ac.id

Pembuktian Ketegaklurusan Garis terhadap Bidang pada Kubus dan Balok

Yuliani Fitri ✉[1], Prima Yudhi[2]
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Ekasakti Padang[1]
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Sumatera barat[2]
email: yulianifitri020784@gmail.com[1]

Received 31 January 2021, Accepted 19 March 2021, Published 31 March 2021

Abstrak

Geometri merupakan mata kuliah wajib yang diajarkan di jurusan matematika tingkat universitas. Dalam pembelajaran, geometri dibagi menjadi dua bagian; geometri bidang dan geometri ruang. Geometri bidang focus pada titik, garis, bidang, dan sudut. Sedangkan geometri ruang focus pada bangun yang dibatasi oleh beberapa bidang, contohnya pada kubus, balok, prisma, limas, dan sebagainya. Pada artikel ini, aspect geometri difokuskan pada ketegaklurusan garis dengan bidang pada kubus dan balok karena hubungan ketegaklurusan garis dan bidang pada dasarnya banyak ditemukan pada bangunan ruang kubus dan balok. Diharapkan dengan adanya pembuktian teorema hubungan tersebut, bisa membantu atau mempermudah memahami sifat-sifat dari kubus dan balok.

Kata Kunci: ketegaklurusan, garis, bidang, kubus, balok

Abstract

Geometry is a compulsory course conducted in mathematics department at university level. In mathematics syllabus, geometry is divided into two dimensional and three dimensional figures. Two dimensional geometry focuses on points, lines, dimension, and angle. Meanwhile, three dimensional geometry focuses on three dimensional figures consisting of some two dimensional figures such as cubes, beams, prisms, pyramids, extra. In this article, geometry aspects are focused on line perpendicularity to dimension in cubes and beams because connectivity between line perpendicularity and dimension is, generally, found on cubes and beams. Hopefully, by proving theorem of line perpendicularity, it can be useful in understanding the characteristics of cubes and beams.

Keywords: *perpendicularity, line, dimension, cube, beam.*

✉ Corresponding author

PENDAHULUAN

Geometri bagian terpenting dari matematika. Geometri merupakan cabang matematika yang membahas secara mendalam konsep-konsep aksioma dasar, definisi, dan teorema atau dalil yang berkaitan dengan segment garis dan sudut, kekongruenan segitiga, ketegaklurusan dan kesejajaran dalam bidang, kesebangunan segitiga, lingkaran, dan tempat kedudukan pada bidang dan ruang [1]

Ruang lingkup geometri terdiri dari bidang dan ruang. Ilmu geometri mempelajari titik, garis, bidang, dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya [2]. Kubus dan balok merupakan bangun ruang yang sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Kubus dan balok merupakan bangun dimensi tiga dengan sisi datar (bangun ruang sisi datar) [3]. Ada banyak benda atau bangunan yang dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan refresentatif dari kubus dan balok. Berbagai benda berbentuk kubus dan balok seperti kardus, kotak kemasan barang, dadu, dan lainnya. Benda-banda tersebut bisa berdiri kokoh karena susunan permukaan-permukaan bidang tersebut ada yang saling sejajar dan ada yang saling saling tegak lurus. Di sekitar kita sering ditemukan benda yang memuat garis-garis yang sejajar atau garis dan bidang yang sejajar. Benda-benda itu, antara lain lemari dengan jendela, lantai rumah dengan langit-langit, dinding rumah bagian kiri dengan bagian kanannya beserta yang lainnya. Selain itu, dapat dilihat hubungan yang ditunjukkan, antara lain oleh tiang bangunan terhadap permukaan lantai, atau dua dinding kamar terhadap permukaan lantai, yang keduanya merupakan fakta tentang hubungan ketegaklurusan garis terhadap bidang.

Kubus dan balok sudah dikenalkan sejak Sekolah Dasar. Salah satu topik penting yang diajarkan dalam pembelajaran bangun ruang di sekolah dasar adalah volume. Materi tentang volume yang dipelajari pertama kali di tingkat SD yaitu volume kubus dan balok sebelum mempelajari tentang volume bangun ruang lainnya [4]. Volume kubus dan balok merupakan hasil perkalian antara panjang alas dengan lebar alas yang disebut dengan luas alas, kemudian dikalikan dengan tingginya atau rusuk tinggi kubus dan balok. Syarat sebuah bidang alas dengan tinggi, posisinya harus saling tegak lurus. Hubungan ketegaklurusan ini lebih mendalam dipelajari di perguruan tinggi. Secara teorinya perlu dibuktikan tentang ketegaklurusan antara garis dan bidang tersebut karena sering berkaitan dengan fenomene-fenomena yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari.

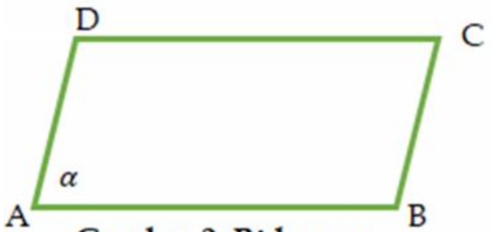
Unsur-Unsur Kubus dan Balok

Kubus dan balok terdiri dari beberapa unsur yaitu titik, garis, bidang, dan sudut. Titik digambarkan sebagai noktah kecil (.), tapi tidak punya ukuran dan diberi nama dengan satu huruf kapital, seperti titik A, titik B, titik C, dan seterusnya. Garis merupakan himpunan titik-titik. Garis terbentuk minimal dari dua buah titik, miisalnya titik A dan titik B [5]. Garis lurus digambarkan dengan memberi tanda panah pada ujung dan pangkal garis tersebut yang dapat ditulis dengan simbol $\overleftrightarrow{A}$, sedangkan ruas garis AB dapat ditulis dengan menggunakan simbol $\overline{A}$ yang mana titik A adalah pangkalnya dan titik B adalah ujungnya. Penamaan sebuah garis bisa dinyatakan dengan dua cara, pertama dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya garis k, l, m, n dan lainnya, yang kedua dengan meletakkan dua huruf besar pada garis itu, misalnya garis AB atau garis PQ.

Gambar 1. Garis lurus

Garis lurus yang digambarkan pada Gambar 1 di atas, menyatakan bahwa garis itu tidak terhingga panjangnya, dengan kata lain garis lurus tidak mempunyai titik pangkal dan titik ujung. Garis lurus terbagi pula atas setengah garis lurus. Setengah garis lurus digambarkan dengan memberi anak panah pada ujungnya. Setengah garis lurus sering pula disebut dengan sinar.

Unsur bangun setelah garis yaitu bidang, lebih khusus lagi adalah bidang datar. Bidang dibatasi oleh perpotongan dari beberapa garis. Tiga titik tidak segaris dapat membentuk bidang panjang dan lebarnya tidak terbatas. Bidang datar tersebut juga tidak memiliki tebal. Sebuah bidang dapat dinamakan dengan bidang α, β, γ dan yang lainnya, seperti gambar berikut ini.



Gambar 2. Bidang α

Selain garis dan bidang, unsur bangun berikutnya adalah sudut. Sebuah sudut ialah sebuah daerah yang dibentuk oleh dua buah setengah garis lurus (sinar) yang titik pangkalnya berimpit [5]. Sudut biasanya dilambangkan dengan " ∠ " dan selalu diikuti dengan sudut yang dimaksud, misalnya ∠ A, ∠ B, ∠ C, atau bisa juga ditulis dengan tiga huruf, misalnya ∠ BAC, ∠ ABC, ∠ BCA dan seterusnya. Sudut dapat dibedakan atas sudut berat ke dalam, sudut lurus dan sudut berat ke luar. Sudut berat ke dalam yaitu sudut yang lebih besar dari 180^o . Sudut lurus yaitu sudut yang besarnya 180^o, dan sudut berat ke luar yaitu sudut yang lebih kecil dari 180^o. Pada sudut berat keluar terbagi pula atas sudut tumpul, sudut siku-siku, dan sudut lancip. Sudut tumpul yaitu sudut yang besarnya lebih dari 90^o. Sudut siku-siku yaitu sudut yang besarnya 90^o, dan sudut lancip yaitu sudut yang lebih kecil dari 90^o. Sudut siku-siku berhubungan dengan ketegaklurusan. Ketegaklurusan atau tegak lurus dilambangkan dengan simbol "⊥ ".

Sifat-Sifat Kubus dan Balok

Kubus dan balok merupakan bangun yang terdiri dari titik – titik, garis-garis (rusuk), sudut, dan bidang-bidang (sisi). Balok dibatasi oleh enam bidang atau sisi yang sepasang-sepasang sisinya sejajar, yang mana sisi-sisi tersebut berbentuk persegi panjang. Balok memiliki dua belas rusuk dan delapan buah titik sudut. Kubus merupakan bentuk khusus dari balok. Semua sifat balok berlaku pada kubus. Sifat khusus pada kubus yaitu semua bidang batasnya berbentuk persegi, dengan kata lain semua rusuknya sama panjang.

Pembuktian ketegaklurusan garis terhadap bidang ini ada relevansinya dengan artikel yang ditulis oleh [6]. Kesamaannya dengan artikel penulis yaitu sama-sama membahas tentang ketegaklurusan. Perbedaannya mengenai segitiga asimptotik pada geometri hiperbolik pada artikel [6], sedangkan pada artikel penulis pada kubus dan balok. Pembuktian perlu dilakukan untuk meyakinkan diri bahwa sesuatu itu benar.

Selain itu, pembuktian bertujuan agar bisa berfikir logis dan sistematis. Penentu berfikir logis tersebut dapat dilihat dari aspek penggunaan informasi. Pada kegiatan pembuktian, setiap informasi perlu memiliki dasar benar dengan merujuk pada definisi, aksioma, dan teorema yang mendukung. Lockhead [7] menyatakan what I see as critical to the new cognitive science is the recognition that knowledge is not an entity which can be simly transferred from those who have to those who don’t … Knowledge is something which each individual learner must construct for and by himself.

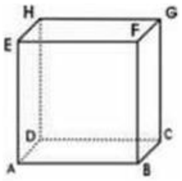
Menurut Polya , masalah pembuktian nampak lebih penting pada matematika tingkat perguruan tinggi dibandingkan dengan tingkat-tingkat sebelumnya [8]. Ketika seseorang mempunyai dugaan tentang suatu hal (teorema), salah satu cara yang paling tepat untuk meyakinkan bahwa hal (teorema) tersebut benar adalah dengan melakukan pembuktian matematis yang sah (secara formal). Proses mendefinisikan pembuktian ini berkembang dari masa ke masa sesuai dengan perkembangan zaman. Untuk memahami suatu penjelasan maka dibutuhkan pembuktian yang dilakukan sesuai definisi dan aksioma yang berlaku.

Pembuktian matematis berperan sangat penting dalam bidang matematika maupun dalam bidang pendidikan matematika. Bukti merupakan inti dari berpikir matematis dan bernalar deduktif [9]. Seseorang tidak dapat mempelajari matematika tanpa belajar bukti matematis dan bagaimana membuatnya [10]. Bahkan, bukti dianggap sebagai hal yang sangat penting (fundamental) dalam melakukan dan mengetahui matematika. Bukti adalah sebagai dasar dalam pemahaman matematika dan hal yang sangat penting bagi pengembangan, pembentukan, dan komunikasi pengetahuan matematika [11].

Oleh sebab itu, diperlukan suatu pemikiran yang kritis, logis , sistematis, dan terarah untuk memperoleh sebuah bukti yang meyakinkan dari suatu fakta yang terjadi. Khusunya mengenai kubus dan balok, karena benda-benda yang berada dalam kehidupan sehari-hari merupakan manifestasi dari bentuk bangun ruang tersebut, yang mana bila ditegakkan benda tersebut dari berbagai sisi bisa berdiri kokoh, dan seimbang kedudukannya. Hal tersebut karena adanya ketegaklurusan antara sisi yang satu dengan yang lainnya, atau ketegaklurusan antara suatu sisi dengan suatu garis. Tujuan dari penulisan artikel ini untuk menunjukkan ketegaklurusan garis dengan bidang pada kubus dan balok agar mudah memahami sifat-sifat dari balok dan kubus tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Mengenai hubungan ketegaklurusan garis terhadap bidang. Perhatikan kerangka kubus ABCD. EFGH berikut ini.



Gambar 3. Kubus ABCD. EFGH

Bangun ABCD.EFGH adalah sebuah kubus karena semua sisinya berbentuk bujur sangkar maka FB $\perp$ BA dan FB $\perp$ BC, sedang BA dan BC merupakan dua buah garis yang berpotongan, yang terletak pada sebuah bidang, yaitu bidang ABCD [12]. Hal tersebut merupakan kejadian khusus pada sebuah kubus, namun dapat membantu untuk menemukan kebenaran tentang adanya sebuah garis yang tegak lurus pada dua buah garis berpotongan yang terletak pada sebuah bidang. Dapat ditemukan contoh lainnya, seperti AD $\perp$ DC dan AD $\perp$ DH, DC dan DH dua buah garis berpotongan dalam bidang CDHG.

Untuk memahami suatu penjelasan maka dibutuhkan pembuktian yang dilakukan sesuai definisi dan aksioma yang berlaku. Dengan cara menyatukan beberapa konsep secara utuh, hal ini akan memperbaiki atau mempertahankan argumen yang telah dikemukakan. Jelaslah saat ini memperhatikan penalaran dan pembuktian dalam matematika sangat penting karena dalam memahami suatu kebenaran yang telah ditemukan atau sebelumnya telah dibuktikan [13]. Adapun artikel ini berkaitan dengan pembuktian ketegaklurusan garis terhadap bidang. Berikut defenisi tentang ketegaklurusan garis atau Bidang [12]

Defenisi 1[14][15]: *Sebuah garis g dan sebuah bidang ¥ dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika setiap garis pada ¥ tegak lurus pada g.*

Kemudian teorema yang berhubugan tentang ketegaklurusan, yaitu

Teorema 1: *Jika sebuah garis tegak lurus pada dua buah garis berpotongan yang terletak pada bidang maka garis itu akan tegak lurus pada bidang tersebut*

Kebenaran dari teorema di atas dapat di lihat pada pembuktian di bawah ini.

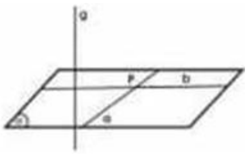
Diketahui :

Garis a dan b yang berpotongan di titik P, terletak pada bidang α : garis g tegak lurus pada a dan b.

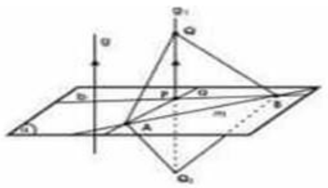
Dibuktikan :

Garis g tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada bidang α .

Bukti : Bidang α.
Coba perhatikan berturut-turut Gambar 4 dan Gambar 5

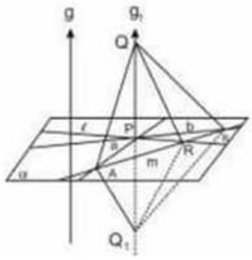


Gambar 4. Bidang α



Gambar 5. Bidang α dan Garis g

Lukiskan garis g_1 melalui P yang sejajar g. Kemudian, pada garis g sebelah menyebelah bidang α di lukis titik Q dan titik Q_1 sehingga $PQ_1 = PQ$. Karena $g \perp a$ dan $g \perp b$ maka akibatnya $g_1 \perp a$ dan $g_1 \perp b$ sehingga a dan b merupakan sumbu dari ruas garis QQ_1. Buat sembarang garis m pada bidang α, yang memotong garis a dan b berturut-turut dititik A dan B maka $AQ_1= AQ$ dan $BQ_1 = BQ$.



Gambar 6. Bidang α, garis g, dan bidang ABQ

Perhatikan Δ ABQ_1 dan Δ ABQ:
AB = AB
AQ = AQ
BQ = BQ
sehingga Δ ABQ1 $\cong$ Δ ABQ $\rightarrow$ $\angle$ Q1AB $\cong$ $\angle$ QAB

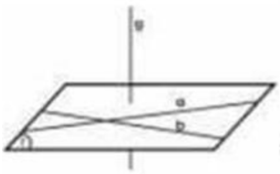
Selanjutnya, apabila dibuat sembarang garis yang lurus melalui titik P dan terletak pada bidang α, yang memotong garis m di titik R maka jika pada Δ ARQ_1 dan Δ ARQ

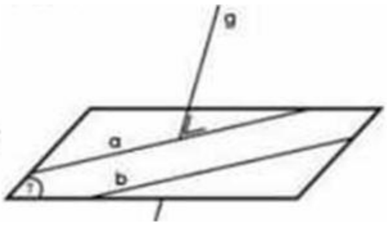
AQ_1= AQ
AR = AR
$\angle Q_1AR \cong \angle QAR$ (karena $\angle Q_1AB \cong \angle QAB$) Δ ARQ $\cong$ Δ ARQ

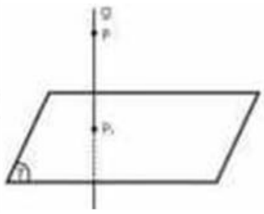
Karena Δ ARQ_1 $\cong$ Δ ARQ_1 maka RQ1 = RQ, yang berarti pula bahwa PR merupakan sumbu dari ruas garis QQ1.

Jika PR merupakan sumbu dari ruas garis QQ_1, berarti garis g_1 tegak lurus pada garis ℓ, berarti juga garis g tegak lurus pada garis ℓ . Dengan cara yang sama dibuktikan bahwa garis g juga tegak lurus pada setiap garis melalui P dan terletak pada bidang α . Dengan demikian, berarti telah dibuktikan garis g tegak lurus pada setiap garis yang terletak pada bidang α.

Menurut Definisi 1.4 maka terbukti g tegak lurus α. Menurut Teorema 1.2 jika akan memastikan apakah sebuah garis g tegak lurus pada sebuah bidang α maka tidak perlu menunjukkan bahwa garis g tegak lurus pada setiap garis pada bidang γ, tetapi cukup menunjukkan bahwa garis g tegak lurus pada dua garis berpotongan yang terletak pada bidang α.



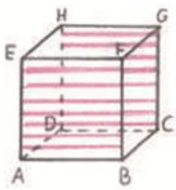


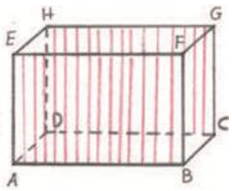


Gambar 7. **Gambar 8.** **Gambar 9.**

Perhatikanlah bahwa jika garis g itu tegak lurus pada dua garis yang tidak berpotongan, jadi tegak lurus bidang γ. Gambar 7. menunjukkan kepada kita bahwa: g ⊥ a g ⊥ b maka g ⊥ bidang γ a dan b berpotongan a dan b pada bidang γ Sedang Gambar 8. menunjukkan kepada kita bahwa g ⊥ a g ⊥ b maka : belum tentu g ⊥ bidang γ a // b Selanjutnya jika melalui sebuah titik P yang tidak terletak pada bidang γ dibuat garis yang tegak lurus bidang γ dan memotong bidang γ di titik P1 maka P1 disebut titik kaki garis tegak lurus yang dibuat melalui P pada bidang γ.'

Berdasarkan defenisi dan teorema tersebut, maka dapat ditunjukkan pula hubungan ketegaklurusan garis terhadap bidang pada kubus dan balok. Perhatikan Gambar berikut.





Gambar 10 **Gambar 11.**

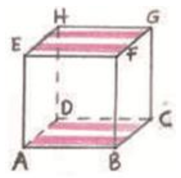
Pada Gambar 10 dan Gambar 11 menunujukkan hubungan ketegaklurusan antara bidang depan ABFE dan bidang belakang CDHG dengan rusuk mendatar dari arah muka ke belakang yaitu AD, BC, FG, dan EH pada kubus dan balok.

Ambil salah satu garis dan bidang pada balok ABCD. EFGH, misalnya garis EH dan bidang CDHG. Buktikan bahwa EH ⊥ CDHG.

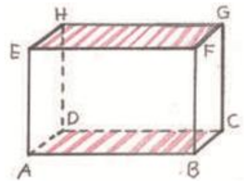
Bukti:

Diketahui ABCD. EFGH merupakan sebuah balok. Karena ABCD.EFGH merupakan sebuah balok maka bidang CDHG merupakan persegi panjang, yang mana terdapat garis CD, DH, HG, dan CG. Karena CDHG persegi panjang maka DH dan HG berpotongan tegak lurus.

Diketahui EH merupakan garis yang terletak pada bidang ADHE. Bidang ADHE merupakan persegi panjang yang berpotongan tegak lurus dengan bidang CDHG. Karena EH terletak pada bidang ADHE maka menurut defenisi 1 dan teorema 1, EH tegak lurus dengan bidang CDHG.

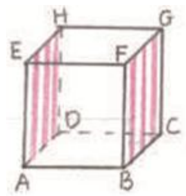


Gambar 12.

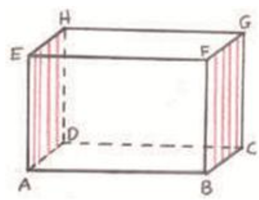


Gambar 13.

Pada Gambar 12. Dan Gambar 13 menunujukkan hubungan ketegaklurusan antara bidang alas dan bidang atas dengan rusuk tegaknya pada kubus dan balok. Garis BF $\perp$ dengan bidang ABCD. Begitu juga CG, DH, dan AE tegak lurus dengan bidang ABCD dan EFGH. Dengan cara yang sama seperti pembuktian sebelumnya, dapat ditunjukkan bahwa rusuk-rusuk tegak tersebut tegak lurus dengan bidang alas dan bidang atasnya.

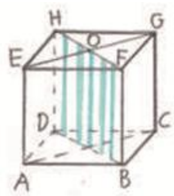


Gambar 14.

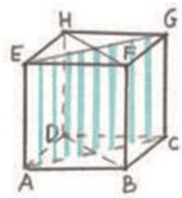


Gambar 15.

Pada Gambar 14 dan Gambar 15 menunjukkan hubungan ketegalurusan antara bidang kiri dan bidang kanan dengan rusuk mendatar dari kiri ke kanan. Bidang ADHE tegak lurus dengan rusuk AB, CD, EF dan HG. Begitu juga dengan bidang BCGF yang tegak lurus dengan rusuk AB, CD, EF, dan HG.



Gambar 16

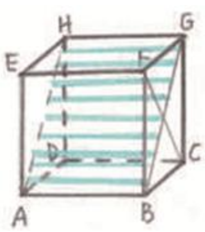


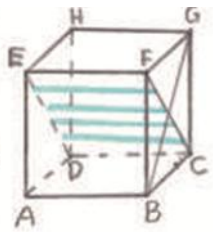
Gambar 17

Khusus pada kubus seperti Gambar 16 dan gambar 17, menunjukkan hubungan ketegaklurusan bidang diagonal BDHG dengandiagonal bidang EG dan AC. Begitu juga bidang diagonal ACGE yang tegak lurus dengan diagonal bidang FH dan BD. Ambil salah satu bidang diagonal, misalnya ACGE dan diagonal bidang FH. Buktikan bahwa FH tegak lurus pada bidang ACGE!

Bukti:

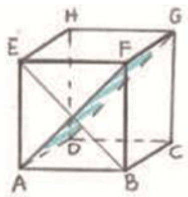
Diketahui kubus ABCD. EFGH. AC, CG, GE, dan AE terdapat pada bidang ACGE. ACGE merupakan bidang diagonal. EG merupakan diagonal bidang EFGH. EFGH merupakan atas kubus yang berbentuk persegi. Diagonal bidang yang lainnya padabidang EFGH yaitu FH. Pada persegi, diagonal bidangnya berpotongan tegak lurus. Karena berpotongan tegak lurus maka FH dan EG berpotongan tegak lurus. Karena FH dan EG berpotongan tegak lurus dan EG terletak pada bidang ACGE, maka menurut defenisi 1 dan teorema 1, FH tegak lurus bidang ACGE.

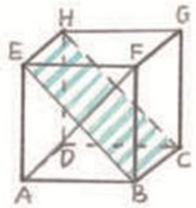




Gambar 18 **Gambar 19**

Begitu juga Gambar 18 dan Gambar 19, menunjukkan hubungan ketegaklurusan bidang diagonal ABGH dengan diagonal bidang CF dan DE. Begitu juga bidang diagonal CDEF yang tegak lurus dengan diagonal bidang BG dan AH.





Gambar 20 **Gambar 21**

Pada Gambar 20 dan Gambar 21, menunjukkan hubungan ketegaklurusan bidang diagonal ADGF dengan diagonal bidang BE dan CH. Begitu juga bidang diagonal BCHE yang tegak lurus dengan diagonal bidang AF dan DG.

SIMPULAN

Dapat disimpulkan bahwa dapat dibuktikan hubungan ketegaklurusan garis dengan bidang pada kubus dan balok. Bidang atas dan bawah pada kubus dan balok saling tegak lurus dengan rusuk tegaknya. Bidang kiri dan kanannya saling tegak lurus dengan rusuk mendatar dari arah kiri ke kanan dan bidang muka dan belakang saling tegak lurus dengan rusuk mendatar dari arah muka ke belakang. Selain itu, pada kubus, juga dapat ditunjukkan ketegaklurusan garis dengan bidang pada bidang diagonal dan diagonal bidang sebanyak jumlah bidang diagonalnya tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] C. . Alders, *Ilmu Geometri Ruang*. Jakarta: Pradnja Paramita, 1978.

[2] A. Sardjana, *Geometri Ruang*. Jakarta: Universitas Terbuka, 2007.

[3] R. Refianti and I. Adha, "Learning trajectory pembelajaran luas permukaan kubus dan balok," *J. Math. Sci. Educ.*, vol. 1, no. 1, pp. 24–37, 2018.

[4] O. Feriana and R. I. I. Putri, "Desain pembelajaran volume kubus dan balok menggunakan filling dan packing di kelas V," *J. Kependidikan Penelit. Inov. Pembelajaran*, vol. 46, no. 2, pp. 149–163, 2016.

[5] S. Syahrial and Nurlius, *Geometri Bidang*. Padang: Badan Penerbit Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam IKIP Padang, 1990.

[6] H. Rosyadi, H. P. Lestari, and M. Si, "SIFAT-SIFAT KETEGAKLURUSAN,

KESEJAJARAN, DAN SEGITIGA ASIMPTOTIK PADA GEOMETRI HIPERBOLIK," *J. Mat.*, vol. 6, no. 1, pp. 40–47, 2017.
[7] A. Orton, "Learning Mathematics: Issues, Theory, and Practice," *Gt. Britain Redw. Books*, 1992.
[8] G. Polya, "Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving,(Combined Edition)," *New York, John Willey Son*, 1981.
[9] Y.-H. Cheng and F.-L. Lin, "Developing learning strategies for enhancing below average students' ability in constructing multi-steps geometry proof," in *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education*, 2009, vol. 1, pp. 124–129.
[10] N. Balacheff, "Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective," in *Explanation and proof in mathematics*, Springer, 2010, pp. 115–135.
[11] A. J. Stylianides, "The notion of proof in the context of elementary school mathematics," *Educ. Stud. Math.*, vol. 65, pp. 1–20, 2007.
[12] I. Djoko, *Geometri Ruang*. Yogyakarta: FPMIPA,IKIP Yogyakarta, 1993.
[13] B. Asyhar, "Studi Pemahaman Bukti dan Pembuktian dalam Geometri Euclid Mahasiswa Jurusan Tadris Matematika IAIN Tulungagung," *J. Pendidik. Mat.*, vol. 1, no. 2, pp. 127–135, 2015.
[14] D. Iswadji, *Geometri Ruang*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta, 1998.
[15] K. J. Travers, *Geometry*. Illionois: Laidlaw Brothers., 1987.