

Kekuatan Tidak Teratur Sisi Graph Hasil Operasi Kali Sisir pada Lintasan, Sikel, dan Bintang

¹ Mayta Budiarti, ² Vita Kusumasari, ³ Desi Rahmadani

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Malang
Jl. Semarang No.5, Sumbersari, Kec. Lowokwaru, Kota Malang, Jawa Timur
65145 Indonesia

Email: ¹mayta.budiarti990@gmail.com, ²vita.kusumasari.fmipa@um.ac.id,
³desi.rahmadani.fmipa@um.ac.id

Tersedia Online di

<http://www.jurnal.unublitar.ac.id/index.php/briliant>

Sejarah Artikel

Diterima pada Maret 2021
Disetujui pada Agustus 2021
Dipublikasikan pada Agustus 2021
Hal. 668-684

Kata Kunci:

pelabelan graph; pelabelan tidak teratur sisi; kekuatan tidak teratur sisi

DOI:

<http://dx.doi.org/10.28926/briliant.v6i3.666>

Abstrak: Pelabelan graph adalah penugasan bilangan bulat ke titik-titik atau sisi-sisi atau keduanya dengan kondisi tertentu. Pemetaan himpunan titik pada graph $G(V(G), E(G))$ ke suatu bilangan bulat positif, yaitu $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k titik. Pelabelan- k tidak teratur sisi dari graph G adalah pelabelan- k titik pada graph G jika untuk setiap dua sisi yang berbeda, yaitu $v_i v_j$ dan $v'_i v'_j$, mempunyai bobot yang berbeda, $w_f(v_i v_j) \neq w_f(v'_i v'_j)$. Nilai minimum k sehingga graph G mempunyai pelabelan- k tidak teratur sisi disebut sebagai kekuatan tidak teratur sisi (*edge irregularity strength*) dari G dan dinotasikan dengan $es(G)$. Hasil kali sisir dari dua graph G_1 dan G_2 , dengan titik $v \in V(G_2)$, didefinisikan sebagai graph yang dibentuk dengan mengambil salinan $G_{2,i}$ dari G_2 untuk setiap titik di $V(G_1)$ dan menempelkan $G_{2,i}$ ke G_1 dengan menempelkan titik v ke titik i dari G_1 . Hasil kali sisir dari dua graph G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \triangleright_v G_2$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai kekuatan tidak teratur sisi pada graph hasil operasi kali sisir pada lintasan, sikel, dan bintang.

PENDAHULUAN

Suatu graph G adalah pasangan dari himpunan (V, E) dimana V himpunan tak kosong yang terdiri dari titik-titik pada graph G dan dinotasikan dengan $V(G)$, dan E himpunan (mungkin kosong) yang terdiri dari sisi-sisi pada graph G dan dinotasikan dengan $E(G)$ (Hartsfield, 1994). Pelabelan graph merupakan salah satu kajian ilmu matematika yang aplikasinya dapat ditemukan diantaranya pada masalah sistem komunikasi, teori pengkodean, kristalografi, dan transportasi.

Pelabelan graph pertama kali diperkenalkan oleh Sadlačk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graph adalah penugasan bilangan bulat ke titik-titik atau sisi-sisi atau keduanya dengan kondisi tertentu (Gallian, 2020). Jika domainnya himpunan titik atau himpunan sisi, maka pelabelannya secara berurutan disebut pelabelan titik atau pelabelan sisi. Jika domainnya titik dan sisi, yaitu $V(G) \cup E(G)$, maka pelabelannya disebut pelabelan total (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014). Penelitian mengenai pelabelan graph

telah banyak mendapat perhatian dari matematikawan, hal ini ditunjukkan dengan banyak jenis pelabelan yang telah ditemukan dan dikembangkan hingga saat ini. Jenis-jenis pelabelan tersebut dapat dilihat pada *A Dynamic Survey of Graph Labeling* (Gallian, 2020), salah satu jenis pelabelan tersebut adalah pelabelan tidak teratur pada graph.

Pelabelan tidak teratur pada graph pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand *et al.* pada tahun 1988. Pelabelan tidak teratur dari graph G tanpa titik terisolasi didefinisikan sebagai penugasan bobot-bobot bilangan bulat positif ke sisi-sisi di G sedemikian sehingga bobot setiap titik berbeda (bobot titik diperoleh dari penjumlahan bobot sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut) (Gallian, 2020). Pelabelan tidak teratur merupakan salah satu pelabelan yang relatif baru. Pelabelan tidak teratur pada graph terdiri atas pelabelan tidak teratur sisi (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014), pelabelan tidak teratur titik (Chartrand *et al.*, 1998), dan pelabelan tidak teratur total (Bača *et al.*, 2007).

Diberikan dua graph G_1 dan G_2 dengan titik $v \in V(G_2)$, hasil kali sisir $G_1 \triangleright_v G_2$ didefinisikan sebagai graph yang dibentuk dengan mengambil salinan $G_{2,i}$ dari G_2 untuk setiap titik di $V(G_1)$ dan menempelkan $G_{2,i}$ ke G_1 dengan menempelkan titik v ke titik i dari G_1 (Jordan, 2009). Operasi hasil kali sisir parsial adalah operasi hasil kali sisir dengan mengambil salinan $G_{2,i}$ dengan $i = |V(G_1)| - 1$.

Graph lintasan dengan m titik, dinotasikan dengan P_m , adalah graph terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua, kecuali titik ujungnya. Graph sikel dengan p titik, dinotasikan dengan C_p untuk $p \geq 3$, adalah graph terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graph bintang $K_{1,t}$ adalah graph bipartisi lengkap dengan himpunan partisi titiknya terdiri dari satu titik berderajat t dan partisi lainnya terdiri dari t titik berderajat satu. Graph lintasan P_m dan sikel C_p akan dikenakan operasi hasil kali sisir dengan graph sikel C_4 . Sedangkan graph bintang $K_{1,t}$ akan dikenakan operasi hasil kali sisir parsial dengan C_4 , karena ada satu titik pada $K_{1,t}$ yang tidak ditempel dengan C_4 yaitu titik berderajat t .

Pelabelan titik pada suatu graph sederhana G merupakan pemetaan titik-titik pada graph G ke suatu bilangan bulat positif, yaitu $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k titik. Pelabelan- k titik didefinisikan sebagai pelabelan- k tidak teratur sisi (*edge irregularity k -labeling*) dari graph G jika untuk setiap sisi-sisi yang berbeda, yaitu $v_i v_j$ dan $v'_i v'_j$, mempunyai bobot yang berbeda pula, $w_f(v_i v_j) \neq w_f(v'_i v'_j)$ dengan $w_f(v_i v_j) = f(v_i) + f(v_j)$. Nilai minimum k untuk graph G yang mempunyai pelabelan- k tidak teratur sisi disebut kekuatan tidak teratur sisi dari G dan dinotasikan dengan $es(G)$.

Ahmad (2014) telah menemukan batas bawah (*lower bound*) dari kekuatan tidak teratur sisi pada graph G seperti yang diberikan pada Teorema 1 berikut.

Teorema 1 (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014). Misalkan G suatu graph sederhana dengan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$. Maka

$$es(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 1}{2} \right\rceil, \Delta(G) \right\}.$$

Berikutnya pada Akibat 1, diberikan nilai kekuatan tidak teratur sisi pada graph C_n untuk $n \geq 3$.

Akibat 1 (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014). Misalkan C_n suatu siklus dengan $n \geq 3$ sisi. Maka

$$es(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Beberapa hasil penelitian terdahulu pelabelan tidak teratur sisi terkait penentuan nilai kekuatan tidak teratur sisinya adalah sebagai berikut: (Ahmad, Al-Mushayt and Bača, 2014) kekuatan tidak teratur sisi pada graph lintasan $es(P_m) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ untuk $m \geq 2$, graph siklus C_p , dan graph bintang $es(K_{1,t}) = t$; (Tarawneh *et al.*, 2016) kekuatan tidak teratur sisi dari graph hasil operasi kali korona $P_n \odot P_m$ untuk $n \geq 2, m = 2$, $P_n \odot mK_1$ untuk $n \geq 2$ dan $1 \leq j \leq m$, dan $P_n \odot S_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$; (Tarawneh, Hasni and Ahmad, 2016) kekuatan tidak teratur sisi pada graph hasil operasi kali korona $C_n \odot mK_1$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$; (Ahmad, Bača and Nadeem, 2016) kekuatan tidak teratur sisi pada graph toeplitz $T_n\langle 1,2 \rangle$ untuk $n \geq 3$, $T_n\langle 1,3 \rangle$ untuk $n \geq 4$, $T_n\langle 2,4 \rangle$ untuk $n \geq 5$, $T_n\langle 1,2,3 \rangle$ untuk $n \geq 4$, dan $T_n\langle 1,2,3 \rangle$ untuk $n \equiv 1 \pmod{4}$ dan $n \geq 5$; (Tarawneh, Hasni and Ahmad, 2020) kekuatan tidak teratur sisi pada graph L_n untuk $n \geq 2$, Z_n^m untuk $m, n \geq 2$, dan graph hasil kali silang $P_n \boxtimes P_m \boxtimes P_2$ untuk $m, n \geq 2$.

Berdasarkan hasil-hasil penelitian sebelumnya, kajian pelabelan tidak teratur sisi pada dua graph hasil operasi kali sisir masih menjadi masalah terbuka hingga saat ini. Oleh karena itu, kami termotivasi untuk melakukan penelitian terkait pelabelan tidak teratur sisi pada graph hasil operasi kali sisir pada lintasan P_m , siklus C_p , dan operasi hasil kali sisir parsial graph bintang $K_{1,t}$ dengan C_4 , yaitu $P_m \triangleright_v C_4$ untuk $m \in \mathbb{N}$, $C_p \triangleright_v C_4$ untuk $p = 4n, n \in \mathbb{N}$, dan $K_{1,t}^4$ untuk $t = 2, t = 4n, 1 \leq n \leq 3, n \in \mathbb{N}$, dan $t = 2n + 1, 1 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}$, kemudian akan ditentukan nilai kekuatan tidak teratur sisinya.

METODE

Secara umum langkah-langkah yang dilakukan untuk memperoleh pelabelan tidak teratur sisi adalah sebagai berikut.

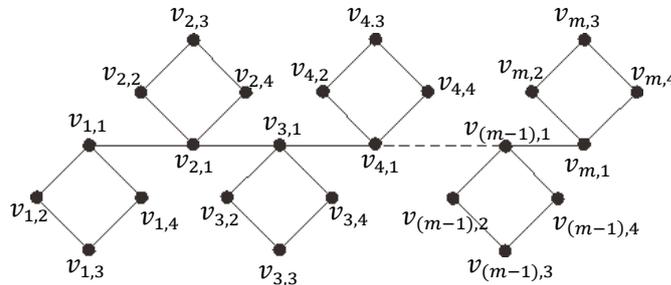
1. Melabeli graph dengan bilangan bulat positif dengan syarat label setiap sisinya berbeda.
2. Mengulang Langkah 1 untuk semua graph, hingga terlihat pola pelabelan.
3. Menggunakan Teorema 1 oleh Ali Ahmad (2014), untuk mengetahui dan mengecek apakah label yang dipakai sudah optimal (minimum).
4. Jika label yang telah dilakukan sudah optimal dan pola pelabelan telah terbentuk, maka cari fungsi pelabelan titik dari pola yang telah ditemukan.
5. Menentukan fungsi bobot sisi yang mana bobot setiap sisi pada graph harus berbeda dengan cara melihat pola pada label sisi.
6. Menggunakan kontradiksi, untuk mengetahui dan mengecek apakah bobot setiap sisi sudah berbeda.

Langkah-langkah di atas selanjutnya akan digunakan untuk menentukan pendefinisian fungsi pelabelan titik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil yang telah diperoleh dalam penelitian ini, yaitu nilai kekuatan tidak teratur sisi pada graph $P_m \triangleright_v C_4$, $C_p \triangleright_v C_4$ dan $K_{1,t}^4$, dan akan disajikan dalam bentuk Lema, Teorema, dan Definisi beserta bentuk umum dari tiap graph tersebut.

Definisi 3.1. Graph $P_m \triangleright_v C_4$ adalah graph yang diperoleh dari graph lintasan P_m dengan mengganti setiap titiknya dengan C_4 .



Gambar 1. Graph $P_m \triangleright_v C_4$

Nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph $P_m \triangleright_v C_4$ diberikan pada Lema 3.1 untuk $m = 1$ dan Teorema 3.1 untuk $m \geq 2$ seperti di bawah ini.

Lema 3.1. Misalkan graph $P_1 \triangleright_v C_4$ adalah graph yang diperoleh dari graph P_1 dengan mengganti titiknya dengan C_4 . Maka

$$es(P_1 \triangleright_v C_4) = 3.$$

Bukti. Misalkan $P_1 \triangleright_v C_4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(P_1 \triangleright_v C_4) = \{v_{1,j}; 1 \leq j \leq 4, j \in \mathbb{N}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(P_1 \triangleright_v C_4) = \{v_{1,1}v_{1,4}\} \cup \{v_{1,l}v_{1,l+1}; 1 \leq l \leq 3, l \in \mathbb{N}\}.$$

Karena terdapat korespondensi satu-satu diantara titik-titik pada graph $P_1 \triangleright_v C_4$ ke C_4 dan fungsinya mengawetkan sifat *adjacency*, maka graph $P_1 \triangleright_v C_4$ isomorfik dengan graph sikel C_4 . Berdasarkan **Akibat 1** diperoleh bahwa

$$es(P_1 \triangleright_v C_4) = es(C_4) = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + 1 = 3 \blacksquare$$

Teorema 3.1. Misalkan graph $P_m \triangleright_v C_4$ merupakan graph dengan $m \geq 2$ dan $m \in \mathbb{N}$. Maka

$$es(P_m \triangleright_v C_4) = \left\lfloor \frac{5m}{2} \right\rfloor.$$

Bukti. Misalkan $P_m \triangleright_v C_4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(P_m \triangleright_v C_4) = \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 4; i, j \in \mathbb{N}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(P_m \triangleright_v C_4) = \{v_{i,1}v_{i,4}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_{k,1}v_{k+1,1}; 1 \leq k \leq m-1, k \in \mathbb{N}\} \\ \cup \{v_{i,l}v_{i,l+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq l \leq 3, l \in \mathbb{N}\}$$

Graph $P_m \triangleright_v C_4$ mempunyai $|V(P_m \triangleright_v C_4)| = 4m$ titik, $|E(P_m \triangleright_v C_4)| = 5m - 1$ sisi, dan derajat maksimum $\Delta(P_m \triangleright_v C_4) = 4$. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh $es(P_m \triangleright_v C_4) \geq \left\lfloor \frac{5m}{2} \right\rfloor$.

Untuk membuktikan $es(P_m \triangleright_v C_4) \leq \left\lfloor \frac{5m}{2} \right\rfloor$, akan didefinisikan pelabelan titik $f: V(P_m \triangleright_v C_4) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{5m}{2} \right\rfloor\}$ sebagai berikut.

Untuk i ganjil

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{5i+1}{2}, & j=1 \\ \frac{5i-3}{2}, & 2 \leq j \leq 3 \\ \frac{5i-1}{2}, & j=4 \end{cases}$$

Untuk i genap

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{5i-4}{2}, & j=1 \\ \frac{5i}{2}, & 2 \leq j \leq 3 \\ \frac{5i-2}{2}, & j=4 \end{cases}$$

Dengan fungsi bobot sisi yaitu

$$w_f(v_{k,1}v_{k+1,1}) = 5k + 1$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = \begin{cases} 10p - 5, & \text{untuk } i = 2p - 1, p \in \mathbb{N} \\ 10p - 3, & \text{untuk } i = 2p, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

untuk $1 \leq l \leq 2$,

$$w_f(v_{i,l}v_{i,l+1}) = \begin{cases} 10p - 4 - 2l, & \text{untuk } i = 2p - 1, p \in \mathbb{N} \\ 10p - 4 + 2l, & \text{untuk } i = 2p, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dan $l = 3$.

$$w_f(v_{i,3}v_{i,4}) = \begin{cases} 10p - 7, & \text{untuk } i = 2p - 1, p \in \mathbb{N} \\ 10p - 1, & \text{untuk } i = 2p, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dengan kontradiksi akan dibuktikan bahwa bobot-bobot sisi yang didefinisikan pada persamaan-persamaan di atas menghasilkan nilai yang berbeda.

- Diketahui $w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = 10p - 5$ untuk $i = 2p - 1; i, p \in \mathbb{N}$ dan $w_f(v_{i,l}v_{i,l+1}) = 10p - 4 - 2l$ untuk $i = 2p - 1; i, p \in \mathbb{N}$ dan $1 \leq l \leq 2, l \in \mathbb{N}$.

Andaikan $w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = w_f(v_{i,l}v_{i,l+1})$

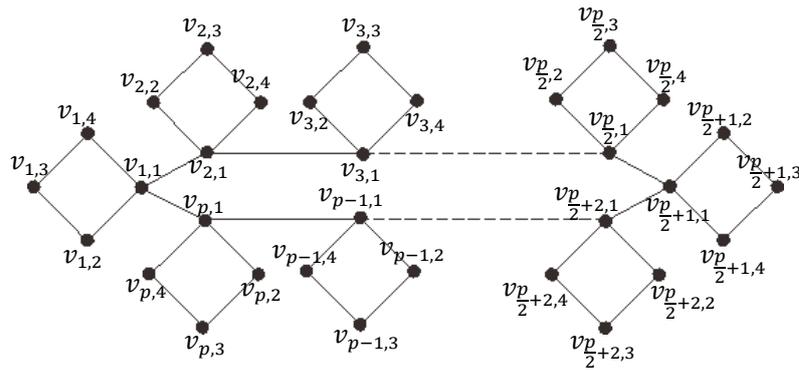
Maka $10p - 5 = 10p - 4 - 2l$ diperoleh $2l = 1$

Sehingga $l = \frac{1}{2}$ (kontradiksi dengan $l \in \mathbb{N}$).

Dengan cara yang serupa, dapat dicek untuk kasus lainnya.

Berdasarkan fungsi bobot sisi-sisi di atas, diperoleh bahwa bobot-bobot sisi berbeda untuk semua pasang sisi yang berbeda. Sehingga, pelabelan titik f merupakan pelabelan- $\left\lfloor \frac{5m}{2} \right\rfloor$ tidak teratur sisi yang optimal. ■

Definisi 3.2. Graph $C_p \triangleright_v C_4$ adalah graph yang diperoleh dari graph siklus C_p dengan mengganti setiap titiknya dengan C_4 .



Gambar 2. Graph $C_p \triangleright_v C_4$

Nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph $C_p \triangleright_v C_4$ untuk $p = 4n, n \in \mathbb{N}$ diberikan pada Teorema 3.2 seperti di bawah ini.

Teorema 3.2. Misalkan graph $C_p \triangleright_v C_4$ merupakan graph dengan $p = 4n, n \in \mathbb{N}$. Maka

$$es(C_p \triangleright_v C_4) = \frac{5p + 2}{2}.$$

Bukti. Misalkan $C_p \triangleright_v C_4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(C_p \triangleright_v C_4) = \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq 4; i, j \in \mathbb{N}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(C_p \triangleright_v C_4) = \{v_{1,1}v_{p,1}\} \cup \{v_{k,1}v_{k+1,1}; 1 \leq k \leq p-1, k \in \mathbb{N}\} \\ \cup \{v_{i,1}v_{i,4}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{v_{i,l}v_{i,l+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq l \leq 3, l \in \mathbb{N}\}$$

Graph $C_p \triangleright_v C_4$ mempunyai $|V(C_p \triangleright_v C_4)| = 4p$, $|E(C_p \triangleright_v C_4)| = 5p$, dan $\Delta(C_p \triangleright_v C_4) = 4$. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh $es(C_p \triangleright_v C_4) \geq \left\lceil \frac{5p+1}{2} \right\rceil \geq \frac{5p+2}{2}$.

Untuk membuktikan $es(C_p \triangleright_v C_4) \leq \frac{5p+2}{2}$, akan didefinisikan pelabelan titik $f: V(C_p \triangleright_v C_4) \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{5p+2}{2}\}$ sebagai berikut.

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 3, & j = 1 \\ 2, & j = 2 \\ 1, & 3 \leq j \leq 4 \end{cases} \quad f(v_{\frac{p}{2}+1,j}) = \begin{cases} \frac{5p}{2} - 1, & 1 \leq j \leq 2 \\ \frac{5p}{2} + 1, & j = 3 \\ \frac{5p}{2}, & j = 4 \end{cases}$$

$$f(v_{\frac{p}{2}+2,j}) = \begin{cases} \frac{5p}{2} - 4, & j = 1 \\ \frac{5p}{2}, & j = 2 \\ \frac{5p}{2} - 3, & j = 3 \\ \frac{5p}{2} - 6, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $i = 2, 4, 6, \dots, \frac{p}{2}$,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5(i-1), & j = 1 \\ 5i-8, & j = 2 \\ 5i-6, & j = 3 \\ 5i-2, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $i = 3, 5, 7, \dots, \frac{p}{2} - 1$,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5i-2, & j = 1 \\ 5i-6, & j = 2 \\ 5i-8, & j = 3 \\ 5(i-1), & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $i = \frac{p}{2} + 4, \dots, p-2, p$,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5(p-i)+6, & j = 1 \\ 5(p-i)+8, & j = 2 \\ 5(p-i)+7, & j = 3 \\ 5(p-i)+4, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $i = \frac{p}{2} + 3, \dots, p-3, p-1$,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 5(p-i)+8, & j = 1 \\ 5(p-i)+7, & j = 2 \\ 5(p-i)+4, & j = 3 \\ 5(p-i)+6, & j = 4 \end{cases}$$

Dengan fungsi bobot sisi yaitu

$$w_f(v_{1,1}v_{p,1}) = 9$$

$$w_f(v_{k,1}v_{k+1,1}) = \begin{cases} 10k-2, & 1 \leq k \leq \frac{p}{2}-1 \\ 10k-6, & k = \frac{p}{2} \\ 10k-15, & k = \frac{p}{2}+1 \\ 10(p-k)+9, & \frac{p}{2}+2 \leq k \leq p-1 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = \begin{cases} 4, & i = 1 \\ 10i-7, & 2 \leq i \leq \frac{p}{2} \\ 5p-1, & i = \frac{p}{2}+1 \\ 5(p-2), & i = \frac{p}{2}+2 \\ 10(p-i+1)+4, & i = \frac{p}{2}+3, \dots, p-3, p-1 \\ 10(p-i+1), & i = \frac{p}{2}+4, \dots, p-2, p \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = \begin{cases} 5, & i = 1 \\ 10i - 13, & i = 2, 4, \dots, \frac{p}{2} \\ 10i - 8, & i = 3, 5, \dots, \frac{p}{2} - 1 \\ 5p - 2, & i = \frac{p}{2} + 1 \\ 5p - 4, & i = \frac{p}{2} + 2 \\ 10(p - i + 1) + 5, & i = \frac{p}{2} + 3, \dots, p - 3, p - 1 \\ 10(p - i + 1) + 4, & i = \frac{p}{2} + 4, \dots, p - 2, p \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,2}v_{i,3}) = \begin{cases} 3, & i = 1 \\ 10i - 14, & 2 \leq i \leq \frac{p}{2} \\ 5p, & i = \frac{p}{2} + 1 \\ 5p - 3, & i = \frac{p}{2} + 2 \\ 10(p - i + 1) + 1, & i = \frac{p}{2} + 3, \dots, p - 3, p - 1 \\ 10(p - i + 1) + 5, & i = \frac{p}{2} + 4, \dots, p - 2, p \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,3}v_{i,4}) = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 10i - 8, & i = 2, 4, \dots, \frac{p}{2} \\ 10i - 13, & i = 3, 5, \dots, \frac{p}{2} - 1 \\ 5p + 1, & i = \frac{p}{2} + 1 \\ 5p - 9, & i = \frac{p}{2} + 2 \\ 10(p - i + 1), & i = \frac{p}{2} + 3, \dots, p - 3, p - 1 \\ 10(p - i + 1) + 1, & i = \frac{p}{2} + 4, \dots, p - 2, p \end{cases}$$

Dengan kontradiksi akan dibuktikan bahwa bobot-bobot sisi yang didefinisikan pada persamaan-persamaan di atas menghasilkan nilai yang berbeda.

- Diketahui $w_f(v_{i,1}v_{i,4})$ dengan $i = \frac{p}{2}$ dan $i = \frac{p}{2} + 2$ yaitu $w_f(v_{\frac{p}{2},1}v_{\frac{p}{2},4}) = 10i - 7 = 10\left(\frac{p}{2}\right) - 7 = 5p - 7$ untuk $i, p \in \mathbb{N}$ dan $w_f(v_{\frac{p}{2}+2,1}v_{\frac{p}{2}+2,4}) = 5(p - 2) = 5p - 10$ untuk $i, p \in \mathbb{N}$.

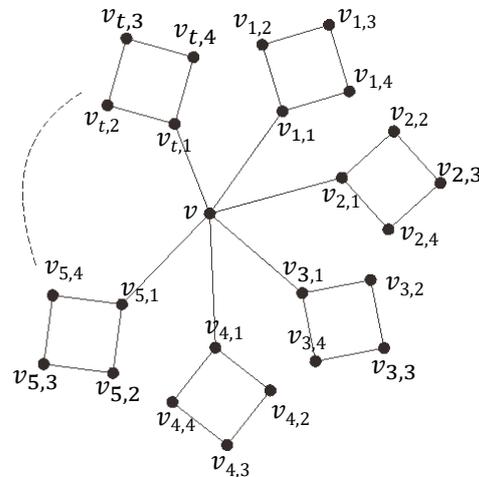
$$\text{Andaikan } w_f(v_{\frac{p}{2},1}v_{\frac{p}{2},4}) = w_f(v_{\frac{p}{2}+2,1}v_{\frac{p}{2}+2,4})$$

Maka $5p - 7 = 5p - 10$, akibatnya $-7 = -10$ (kontradiksi).

Dengan cara yang serupa, dapat dicek untuk kasus lainnya.

Berdasarkan fungsi bobot sisi-sisi di atas, diperoleh bahwa bobot-bobot sisi berbeda untuk semua pasang sisi yang berbeda. Sehingga, pelabelan titik f merupakan pelabelan $\frac{5p+2}{2}$ tidak teratur sisi yang optimal. ■

Definisi 3.3. Graph $K_{1,t}^4$ adalah graph yang diperoleh dari graph bintang $K_{1,t}$ dengan mengganti setiap titik berderajat satu dengan C_4 .



Gambar 3. Graph $K_{1,t}^4$

Nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph $K_{1,t}^4$ untuk $t = 2$ diberikan pada Teorema 3.3 seperti di bawah ini.

Teorema 3.3. Misalkan graph $K_{1,2}^4$ adalah graph bipartisi lengkap $K_{1,2}$ dengan mengganti titik berderajat satu dengan C_4 . Maka

$$es(K_{1,2}^4) = 6.$$

Bukti. Misalkan $K_{1,2}^4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(K_{1,2}^4) = \{v\} \cup \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq 4; i, j \in \mathbb{N}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(K_{1,2}^4) = \{vv_{i,1}\} \cup \{v_{i,1}v_{i,4}\} \cup \{v_{i,l}v_{i,l+1}; 1 \leq l \leq 3, l \in \mathbb{N}\}.$$

Karena graph $K_{1,2}^4$ merupakan graph $K_{1,t}^4$ untuk $t = 2$ maka graph $K_{1,2}^4$ mempunyai $|V(K_{1,2}^4)| = 9$ titik, $|E(K_{1,2}^4)| = 10$ sisi, dan derajat maksimum $\Delta(K_{1,2}^4) = 3$. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh $es(K_{1,2}^4) \geq \left\lfloor \frac{5t+1}{2} \right\rfloor \geq 6$.

Untuk membuktikan $es(K_{1,2}^4) \leq 6$, akan didefinisikan pelabelan titik $f: V(K_{1,2}^4) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ sebagai berikut.

$$f(v) = 3$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3i, & j = 1 \\ i^2, & j = 2 \\ \left\lfloor \frac{3i}{2} \right\rfloor, & j = 3 \\ i^2 + 1, & j = 4 \end{cases}$$

Dengan fungsi bobot sisi yaitu

$$w_f(vv_{i,1}) = 3(i + 1),$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = i^2 + 3i + 1,$$

$$w_f(v_{i,l}v_{i,l+1}) = \begin{cases} i^2 + 3i, & l = 1 \\ i^2 + \lfloor \frac{3i}{2} \rfloor, & l = 2 \\ i^2 + \lfloor \frac{3i}{2} \rfloor + 1, & l = 3 \end{cases}$$

Dengan kontradiksi akan dibuktikan bahwa bobot-bobot sisi yang didefinisikan pada fungsi bobot sisi di atas menghasilkan nilai yang berbeda.

- Diketahui $w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = i^2 + 3i$ dan $w_f(v_{i,2}v_{i,3}) = i^2 + \lfloor \frac{3i}{2} \rfloor$ untuk $i \in \mathbb{N}$.

Andaikan $w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = w_f(v_{i,2}v_{i,3})$

Maka $i^2 + 3i = i^2 + \lfloor \frac{3i}{2} \rfloor$, akibatnya $3i = \lfloor \frac{3i}{2} \rfloor$ (kontradiksi).

Karena untuk $i = 1$ diperoleh $3 = 1$ (kontradiksi) dan untuk $i = 2$ diperoleh $6 = 3$ (kontradiksi).

Dengan cara yang serupa, dapat dicek dengan mudah untuk kasus lainnya.

Berdasarkan fungsi bobot sisi-sisi di atas, diperoleh bobot-bobot sisi yang berbeda untuk setiap pasang sisi yang berbeda. Sehingga, pelabelan titik f merupakan pelabelan-6 tidak teratur sisi yang optimal. ■

Nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph $K_{1,t}^4$ untuk $t = 4n$ dan $1 \leq n \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$ diberikan pada Teorema 3.4 seperti di bawah ini.

Teorema 3.4. Misalkan graph $K_{1,t}^4$ merupakan graph dengan $t = 4n$ dan $1 \leq n \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Maka

$$es(K_{1,t}^4) = \frac{5t + 2}{2}.$$

Bukti. Misalkan $K_{1,t}^4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(K_{1,t}^4) = \{v\} \cup \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq 4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(K_{1,t}^4) = \{vv_{i,1}; 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_{i,1}v_{i,4}; 1 \leq i \leq t\} \\ \cup \{v_{i,l}v_{i,l+1}; 1 \leq i \leq t; 1 \leq l \leq 3\}.$$

Graph $K_{1,t}^4$ mempunyai $|V(K_{1,t}^4)| = 4t + 1$ titik, $|E(K_{1,t}^4)| = 5t$ sisi, dan karena $t = 4n$ dengan $1 \leq n \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$, maka $t \geq 3$ sehingga derajat maksimum titiknya adalah $\Delta(K_{1,t}^4) = t$. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh $es(K_{1,t}^4) \geq \lfloor \frac{5t+1}{2} \rfloor \geq \frac{5t+2}{2}$.

Untuk membuktikan $es(K_{1,t}^4) \leq \frac{5t+2}{2}$, akan didefinisikan pelabelan titik $f: V(K_{1,t}^4) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \frac{5t+2}{2}\}$ sebagai berikut.

$$f(v) = 3 \\ f(v_{i,1}) = \begin{cases} \frac{5i + 1}{2}, & i = 1, 3, \dots, t - 1 \\ \frac{5i}{2}, & i = 2, 4, \dots, t \end{cases}$$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j = 2 \\ 1, & j = 3 \\ 2, & j = 4 \end{cases} \quad f(v_{2,j}) = \begin{cases} 4, & j = 2 \\ 3, & j = 3 \\ 7, & j = 4 \end{cases}$$

$$f(v_{t-1,j}) = \begin{cases} \frac{5t-8}{2}, & j = 2 \\ \frac{5t-2}{2}, & j = 3 \\ \frac{5t-4}{2}, & j = 4 \end{cases} \quad f(v_{t,j}) = \begin{cases} \frac{5t}{2}, & j = 2 \\ \frac{5t-4}{2}, & j = 3 \\ \frac{5t+2}{2}, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $t = 4n$ dengan $2 \leq n \leq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6, & j = 2 \\ 9, & j = 3 \\ 11, & j = 4 \end{cases} \quad f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & j = 2 \\ 15, & j = 3 \\ 14, & j = 4 \end{cases}$$

$$f(v_{5,j}) = \begin{cases} 12, & j = 2 \\ 12+n, & j = 3 \\ 8+3n, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $6 \leq i \leq t-2$ dengan $t = 4n$ dimana $2 \leq n \leq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} i+t + \left\lfloor \frac{i-4}{2} \right\rfloor, & j = 2 \\ \left\lfloor \frac{5i}{2} \right\rfloor + 1, & j = 3 \\ i+t + \left\lfloor \frac{i-4}{2} \right\rfloor + 2, & j = 4 \end{cases}$$

Dengan fungsi bobot sisi yaitu

$$w_f(vv_{i,1}) = \begin{cases} \frac{5i+7}{2}, & i = 1,3,\dots,t-1 \\ \frac{5i+6}{2}, & i = 2,4,\dots,t \end{cases}$$

untuk i bernilai ganjil

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = \begin{cases} 5, & i = 1 \\ 21 + \frac{3t}{2}, & i = 5 \\ 4i + 12, & i = 8, \dots, t-3 \\ \frac{5i+57}{2}, & i = 11 \end{cases}$$

$$w_f(v_{3,1}v_{3,4}) = \begin{cases} 16, & t = 4 \\ 19, & t = 8,12 \end{cases}$$

$$w_f(v_{7,1}v_{7,4}) = \begin{cases} 36, & t = 8 \\ 40, & t = 12 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = \begin{cases} 4, & i = 1 \\ 14, & i = 3 \\ 25, & i = 5 \\ 4i + t - 2, & i = 7, \dots, t-3 \\ 5t - 6, & i = t-1 \end{cases}$$

untuk i bernilai genap

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = \begin{cases} 12, & i = 2 \\ 4i + t, & i = 6, \dots, t - 2 \\ 5i + 1, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{4,1}v_{4,4}) = \begin{cases} 21, & t = 4 \\ 24, & t = 8, 12 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = \begin{cases} 9, & i = 2 \\ 4i + t - 2, & i = 6, \dots, t - 2 \\ 5t, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{4,1}v_{4,2}) = \begin{cases} 20, & t = 4 \\ 17, & t = 8, 12 \end{cases}$$

untuk $l = 2$,

$$w_f(v_{i,2}v_{i,3}) = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 7, & i = 2 \\ 15, & i = 3 \\ 24 + \frac{t}{4}, & i = 5 \\ 4i + t - 1, & 6 \leq i \leq t - 2 \\ 5(t - 1), & i = t - 1 \\ 5t - 2, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{4,2}v_{4,3}) = \begin{cases} 18, & t = 4 \\ 22, & t = 8, 12 \end{cases}$$

dan $l = 3$.

$$w_f(v_{i,3}v_{i,4}) = \begin{cases} 3, & i = 1 \\ 10, & i = 2 \\ 4i + t + 1, & 6 \leq i \leq t - 2 \\ 5t - 3, & i = t - 1 \\ 5t - 1, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{3,3}v_{3,4}) = \begin{cases} 17, & t = 4 \\ 20, & t = 8, 12 \end{cases}$$

$$w_f(v_{4,3}v_{4,4}) = \begin{cases} 19, & t = 4 \\ 29, & t = 8, 12 \end{cases}$$

$$w_f(v_{5,3}v_{5,4}) = \begin{cases} 28, & t = 8 \\ 32, & t = 12 \end{cases}$$

Dengan kontradiksi akan dibuktikan bahwa bobot-bobot sisi yang didefinisikan pada persamaan-persamaan di atas menghasilkan nilai yang berbeda.

- Diketahui $w_f(vv_{t-1,1}) = \frac{5i+7}{2}$ untuk $i = t - 1; i, t \in \mathbb{N}$ dan $w_f(vv_{t-2,1}) = \frac{5i+6}{2}$ untuk $i = t - 2; i, t \in \mathbb{N}$.

Andaikan $w_f(vv_{t-1,1}) = w_f(vv_{t-2,1})$

Maka $\frac{5i+7}{2} = \frac{5i+6}{2}$, akibatnya $\frac{5t+2}{2} = \frac{5t-4}{2}$ (kontradiksi).

Misalkan untuk $n = 1$ maka $t = 4$ diperoleh $11 = 8$ (kontradiksi) dan berlaku untuk nilai t lainnya.

Dengan cara yang serupa, dapat dicek dengan mudah untuk kasus lainnya.

Berdasarkan fungsi bobot sisi-sisi di atas, diperoleh bahwa bobot-bobot sisi berbeda untuk semua pasang sisi yang berbeda. Sehingga, pelabelan titik f merupakan pelabelan- $\frac{5t+2}{2}$ tidak teratur sisi yang optimal. ■

Nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph $K_{1,t}^4$ untuk $t = 2n + 1$ dan $1 \leq n \leq 4$, $n \in \mathbb{N}$ diberikan pada Teorema 3.5 seperti di bawah ini.

Teorema 3.5. Misalkan graph $K_{1,t}^4$ merupakan graph dengan $t = 2n + 1$ dan $1 \leq n \leq 4$, $n \in \mathbb{N}$. Maka

$$es(K_{1,t}^4) = \frac{5t + 1}{2}.$$

Bukti. Misalkan $K_{1,t}^4$ suatu graph dengan himpunan titik

$$V(K_{1,t}^4) = \{v\} \cup \{v_{i,j}; 1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq 4; i, j \in \mathbb{N}\}$$

dan himpunan sisi

$$E(K_{1,t}^4) = \{vv_{i,1}; 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_{i,1}v_{i,4}; 1 \leq i \leq t\} \\ \cup \{v_{i,l}v_{i,l+1}; 1 \leq i \leq t; 1 \leq l \leq 3, l \in \mathbb{N}\}.$$

Graph $K_{1,t}^4$ mempunyai $|V(K_{1,t}^4)| = 4t + 1$ titik, $|E(K_{1,t}^4)| = 5t$ sisi, dan karena $t = 2n + 1$ dan $1 \leq n \leq 4$, $n \in \mathbb{N}$, maka $t \geq 3$ sehingga derajat maksimum $\Delta(K_{1,t}^4) = t$. Berdasarkan **Teorema 1**, diperoleh $es(K_{1,t}^4) \geq \frac{5t+1}{2}$.

Untuk membuktikan $es(K_{1,t}^4) \leq \frac{5t+1}{2}$, akan didefinisikan pelabelan titik $f: V(K_{1,t}^4) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \frac{5t+1}{2}\}$ sebagai berikut.

$$f(v) = 3 \\ f(v_{i,1}) = \begin{cases} \frac{5i+1}{2}, & i = 1, 3, \dots, t \\ \frac{5i}{2}, & i = 2, 4, \dots, t-1 \end{cases} \\ f(v_{1,j}) = \begin{cases} 1, & j = 2 \\ 2, & j = 4 \end{cases} \quad f(v_{2,j}) = \begin{cases} 4, & j = 2 \\ 3, & j = 3 \\ 7, & j = 4 \end{cases} \\ f(v_{t,j}) = \begin{cases} \frac{5t-1}{2}, & j = 2 \\ \frac{5t-3}{2}, & j = 3 \\ \frac{5t+1}{2}, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $t = 5, 7, 9$,

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6, & j = 2 \\ 9, & j = 3 \end{cases} \quad f(v_{3,4}) = \begin{cases} 9, & t = 5 \\ 11, & t = 7, 9 \end{cases} \\ f(v_{t-1,j}) = \begin{cases} \frac{5t-7}{2}, & j = 2 \\ \frac{5t-3}{2}, & 3 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

Untuk $t = 7, 9$,

$$f(v_{4,j}) = \begin{cases} 7, & j = 2 \\ 14 + \lfloor \frac{t}{3} \rfloor, & j = 3 \\ 12, & j = 4 \end{cases} \quad f(v_{5,j}) = \begin{cases} 10 + \lfloor \frac{t}{4} \rfloor, & j = 2 \\ 13 + \lfloor \frac{t}{3} \rfloor, & j = 3 \\ 10 + 2 \lfloor \frac{t}{4} \rfloor, & j = 4 \end{cases}$$

Untuk $t = 9$ dengan $i = 6,7$.

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} i + 10, & j = 2 \\ \lfloor \frac{5i}{2} \rfloor + 2, & j = 3 \\ i + 11, & j = 4 \end{cases}$$

Dengan fungsi bobot sisi yaitu

$$w_f(vv_{i,1}) = \begin{cases} \frac{5i + 7}{2}, & i = 1,3, \dots, t \\ \frac{5i + 6}{2}, & i = 2,4, \dots, t - 1 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,4}) = \begin{cases} 5, & i = 1 \\ 5i + 2, & i = 2,4,6 \\ 36, & i = 7 \\ 5t - 4, & i = t - 1 \\ 5t + 1, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{3,1}v_{3,4}) = \begin{cases} 17, & t = 5 \\ 19, & t = 7,9 \end{cases}$$

$$w_f(v_{5,1}v_{5,4}) = \begin{cases} 25, & t = 7 \\ 27, & t = 9 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,1}v_{i,2}) = \begin{cases} 4, & i = 1 \\ 9, & i = 2 \\ 14, & i = 3 \\ 17, & i = 4 \\ 21 + \frac{t-1}{2}, & i = 5 \\ 31, & i = 6 \\ 35, & i = 7 \\ 5t - 6, & i = t - 1 \\ 5t, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,2}v_{i,3}) = \begin{cases} 2, & i = 1 \\ 7, & i = 2 \\ 15, & i = 3 \\ 20 + \frac{t-1}{2}, & i = 4 \\ 33, & i = 6 \\ 37, & i = 7 \\ 5(t-1), & i = t - 1 \\ 5t - 2, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{5,1}v_{5,4}) = \begin{cases} 26, & t = 7 \\ 28, & t = 9 \end{cases}$$

$$w_f(v_{i,3}v_{i,4}) = \begin{cases} 3, & i = 1 \\ 10, & i = 2 \\ 25 + \frac{t-1}{2}, & i = 4 \\ 34, & i = 6 \\ 38, & i = 7 \\ 5t - 3, & i = t - 1 \\ 5t - 1, & i = t \end{cases}$$

$$w_f(v_{5,3}v_{5,4}) = \begin{cases} 27, & t = 7 \\ 30, & t = 9 \end{cases}$$

Dengan kontradiksi akan dibuktikan bahwa bobot-bobot sisi yang didefinisikan pada persamaan-persamaan di atas menghasilkan nilai yang berbeda.

- Diketahui $w_f(vv_{t-1,1}) = \frac{5i+6}{2}$ untuk $i = t - 1; i, t \in \mathbb{N}$ dan $w_f(vv_{t,1}) = \frac{5i+7}{2}$ untuk $i = t; i, t \in \mathbb{N}$.

Andaikan $w_f(vv_{t-1,1}) = w_f(vv_{t,1})$

Maka $\frac{5i+6}{2} = \frac{5i+7}{2}$, akibatnya $\frac{5t+1}{2} = \frac{5t+7}{2}$ (kontradiksi).

Misalkan untuk $n = 1$ maka $t = 3$ diperoleh $8 = 11$ (kontradiksi) dan untuk nilai t lainnya. Dengan cara yang serupa, dapat dicek dengan mudah untuk kasus lainnya. Berdasarkan fungsi bobot sisi-sisi di atas, diperoleh bahwa bobot-bobot sisi berbeda untuk semua pasang sisi yang berbeda. Sehingga, pelabelan titik f merupakan pelabelan $\frac{5t+1}{2}$ tidak teratur sisi yang optimal.

Misalkan P_m adalah graph lintasan dengan m titik, C_p adalah graph sikel dengan p titik, dan $K_{1,t}$ adalah graph bintang dengan $t + 1$ titik. Didefinisikan graph operasi hasil kali sisir $P_m \triangleright_v C_4$ adalah graph yang diperoleh dari graph lintasan P_m dengan mengganti setiap titiknya dengan sikel C_4 . Graph $C_p \triangleright_v C_4$ adalah graph yang diperoleh dari graph sikel C_p dengan mengganti setiap titiknya dengan sikel C_4 . Graph $K_{1,t}^4$ adalah graph yang diperoleh dari graph bintang $K_{1,t}$ dengan mengganti setiap titik berderajat satu dengan sikel C_4 .

Berdasarkan paparan pada Bagian Hasil di atas diperoleh bahwa graph-graph hasil operasi kali sisir pada lintasan dan sikel dengan C_4 , dan graph hasil kali sisir parsial pada bintang dengan C_4 , dapat dilabeli dengan pelabelan tidak teratur sisi. Setelah memperoleh pelabelan tidak teratur sisi dan fungsi pelabelan titik dari graph-graph tersebut selanjutnya nilai kekuatan tidak teratur sisi dapat ditentukan.

Berdasarkan Lema 3.1 diperoleh $es(P_1 \triangleright_v C_4) = 3$ untuk $m = 1$ dan Teorema 3.2 diperoleh $es(P_m \triangleright_v C_4) = \left\lceil \frac{5m}{2} \right\rceil$ untuk $m \geq 2$. Berdasarkan hasil penelitian terdahulu diperoleh nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph lintasan yaitu $es(P_m) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ untuk $m \geq 2$ dan graph sikel C_4 yaitu $es(C_4) = 3$. Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh $es(C_p \triangleright_v C_4) = \frac{5p+2}{2}$ untuk $p = 4n, n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan penelitian terdahulu diperoleh nilai kekuatan tidak teratur dari graph sikel C_p dengan $p = 4n, n \in \mathbb{N}$ yaitu $es(C_p) = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + 1$.

Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh $es(K_{1,2}^4) = 3t$ untuk $t = 2$, Teorema 3.4 diperoleh $es(K_{1,t}^4) = \frac{5t+2}{2}$ untuk $t = 4n, 1 \leq n \leq 3, n \in \mathbb{N}$, dan Teorema 3.5 diperoleh $es(K_{1,t}^4) = \frac{5t+1}{2}$ untuk $t = 2n + 1, 1 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan hasil penelitian terdahulu diperoleh nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph bintang yaitu $es(K_{1,t}) = t$ dan graph sikel C_4 yaitu $es(C_4) = 3$.

Jika nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph hasil operasi kali sisir pada graph lintasan, sikel, dan bintang dengan sikel C_4 dibandingkan dengan nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph-graph penyusunnya, maka nilai kekuatan tidak teratur sisi dari graph hasil operasi kali sisir lebih besar daripada nilai kekuatan tidak teratur sisi graph-graph penyusunnya. Hal ini dikarenakan struktur dari graph hasil operasi kali sisir lebih kompleks daripada struktur graph-graph penyusunnya. Selain itu, banyak sisi dan derajat maksimum dari graph hasil operasi kali sisir lebih banyak daripada graph-graph penyusunnya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan diperoleh nilai kekuatan tidak teratur sisi graph operasi hasil kali sisir pada lintasan dan sikel dengan C_4 , dan graph operasi hasil kali sisir parsial pada bintang dengan C_4 . Kekuatan tidak teratur sisi pada graph $P_m \triangleright_v C_4$ untuk $m = 1$ adalah $es(P_m \triangleright_v C_4) = 3$ dan untuk $m \geq 2$ adalah $es(P_m \triangleright_v C_4) = \lfloor \frac{5m}{2} \rfloor$. Kekuatan tidak teratur sisi pada graph $C_p \triangleright_v C_4$ untuk $p = 4n, n \in \mathbb{N}$ adalah $es(C_p \triangleright_v C_4) = \frac{5p+2}{2}$. Kekuatan tidak teratur sisi pada graph $K_{1,t}^4$ untuk $t = 2, t = 4n, 1 \leq n \leq 3, n \in \mathbb{N}$, dan $t = 2n + 1, 1 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}$, secara berturut-turut adalah $es(K_{1,2}^4) = 3t, es(K_{1,t}^4) = \frac{5t+2}{2}$, dan $es(K_{1,t}^4) = \frac{5t+1}{2}$.

SARAN

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah menentukan nilai kekuatan tidak teratur sisi pada graph hasil operasi kali sisir pada graph lintasan, sikel, dan bintang dengan graph C_5 .

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LP2M Universitas Negeri Malang atas hibah publikasi hasil skripsi dengan dana PNBPU Universitas Negeri Malang Tahun Anggaran 2021 sesuai dengan Keputusan Rektor Universitas Negeri Malang, Nomor 4.3.13/UN32/KP/2021, tanggal 4 Maret 2021.

DAFTAR RUJUKAN

- Ahmad, A., Al-Mushayt, O. B. S. and Bača, M. (2014) 'On edge irregularity strength of graphs', *Applied Mathematics and Computation*, 243, pp. 607–610. doi: 10.1016/j.amc.2014.06.028.
- Ahmad, A., Bača, M. and Nadeem, M. F. (2016) 'On edge irregularity strength of Toeplitz graphs', *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 78(4), pp. 155–162.

- Bača, M. *et al.* (2007) ‘On irregular total labellings’, *Discrete Mathematics*, 307(11–12), pp. 1378–1388. doi: 10.1016/j.disc.2005.11.075.
- Chartrand, G. *et al.* (1998) ‘Irregular Networks’, *Congressus Numerantium*, 64, pp. 187–192.
- Gallian, J. A. (2020) ‘A dynamic survey of graph labeling’, *Electronic Journal of Combinatorics*, 1(DynamicSurveys).
- Hartsfield, N. R. G. (1994) *Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction*. United States of America: Academic Press.
- Jordan, J. (2009) ‘Comb graphs and spectral decimation’, *Glasgow Mathematical Journal*, 51(1), pp. 71–81. doi: 10.1017/S0017089508004540.
- Tarawneh, I. *et al.* (2016) ‘On the edge irregularity strength of corona product of graphs with paths’, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, (January). doi: 10.1142/S1793830920500834.
- Tarawneh, I., Hasni, R. and Ahmad, A. (2016) ‘On the edge irregularity strength of corona product of cycle with isolated vertices’, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. Elsevier B.V., 13(3), pp. 213–217. doi: 10.1016/j.akcej.2016.06.010.
- Tarawneh, I., Hasni, R. and Ahmad, A. (2020) ‘On the edge irregularity strength of grid graphs’, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. Elsevier B.V., 17(1), pp. 414–418. doi: 10.1016/j.akcej.2018.06.011.