Metode Interpolasi Modifikasi Kostaki dalam Menentukan Peluang Meninggal untuk Premi Asuransi Jiwa Berjangka

Andi Eka Putra1), Yulia Resti 2)*, dan Des Alwine Zayanti 2)

1) Alumni Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia
2) Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

Intisari

Asuransi jiwa berjangka n-tahun merupakan produk asuransi jiwa dimana tertanggung akan menerima manfaat jika risiko yang dipertanggungkan selama n-tahun terjadi sebelum n-tahun berakhir. Penentuan premi produk asuransi jiwa berjangka n-tahun memerlukan peluang meninggal dalam interval usia satu-tahunan. Penelitian ini membahas tentang penentuan peluang meninggal interval usia satu-tahunan menggunakan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Lagrange 6 titik dan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Heligman-Pollard dari tabel mortalita ringkas Amerika 2010 dimana hasil interpolasi terbaik yang diperoleh digunakan untuk menentukan premi asuransi jiwa berjangka. Hasil penelitian menunjukkan bahwa hasil interpolasi peluang meninggal interval usia satu-tahunan menggunakan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Lagrange 6 titik lebih baik daripada hasil interpolasi modifikasi dengan Heligman-Pollard, baik berdasarkan nilai MAE. Hasil ilustrasi perhitungan premi untuk produk asuransi berjangka menunjukkan bahwa peluang meninggal interval usia satu-tahunan diperlukan untuk mendapatkan nilai premi yang lebih akurat dan perbedaan peluang meninggal dalam interval usia satu-tahunan dan interval usia lima-tahunan signifikan mempengaruhi perhitungan premi asuransi jiwa berjangka.

Katakunci: interpolasi, modifikasi Kostaki, mortalita, premi

Abstract

N-year term life insurance is a life insurance product where the insured will receive benefits if the risk insured for n-years occurs before n-years ends. Determination of premiums for n-year term life insurance products requires the probability of death presented at one-yearly age intervals. This study discusses the determination of death probabilities presented at one-yearly age intervals using the Kostaki Modification interpolation method with Lagrange 6-points and modification interpolation with Heligman-Pollard from an abridged mortality table where the best interpolation results obtained are used to determine the n-year term life insurance premiums. The results showed that the interpolation results from the probability of death presented at one-year age intervals using the Kostaki Modification with 6-point Lagrange interpolation method were better than the Kostaki Modification with Helpman-Pollard interpolation results based on MAE values. Illustration results of the calculation of premiums for n-years term insurance products show that the probability of mortality for one-year age intervals is needed to get a more accurate premium value and the difference in the probability of mortality for one-yearly age intervals and five-yearly age intervals significantly affects the calculation of term life insurance premiums..

Keywords: interpolation, *Kostaki Modification*, mortality, premium

e-mail *: yulia_resti@mipa.unsri.ac.id

Tgl. naskah diusulkan: 16 Februari 2020

1 Pendahuluan

Penentuan premi suatu produk asuransi jiwa memerlukan peluang meninggal yang biasanya diperoleh dari suatu tabel mortalita. Tabel mortalita merupakan suatu tabel yang memuat data sekelompok orang dengan jumlah tertentu yang lahir di waktu yang sama dimana banyaknya orang yang meninggal dari kelompok tersebut disajikan dari periode ke periode hingga semua orang dari kelompok tersebut meninggal dunia, dan dari data tersebut disajikan beberapa komponen yang salah satunya adalah peluang meninggal [1]. Tabel mortalita dapat disajikan dalam bentuk kelompok umur dalam interval lima atau sepuluh-tahunan yang disebut tabel mortalita ringkas (*abridged life table*) atau dalam umur satu-tahunan yang disebut tabel mortalita lengkap (*complete life table*). Banyaknya orang yang meninggal dalam suatu kelompok tertentu dapat juga diprediksi menggunakan distribusi statistik yang lazim dikenal sebagai hukum mortalita [2]. Kesesuaian hukum mortalita Gompertz dan Makeham dengan tabel mortalita Amerika Serikat 1979-1981 dan tabel mortalita Indonesia 2011 dikaji oleh [3]. Menurut mereka ada kesesuaian antara hukum mortalita Gompertz dengan tabel mortalita Amerika Serikat (untuk jenis kelamin pria dan wanita) dan tabel mortalita Indonesia untuk jenis kelamin pria, serta ada kesesuaian hukum mortalita Mahekam dengan tabel mortalita Indonesia untuk jenis kelamin wanita. Kesesuaian hukum mortalita Mahekam dengan tabel mortalita Indonesia untuk jenis kelamin wanita ini diterapkan [4] untuk menentukan nilai tunai manfaat asuransi jiwa atau sering juga dikenal sebagai nilai premi tunggal yang dibayarkan sekaligus. Hukum mortalita Gompertz diterapkan oleh [5] untuk menghitung dana tabarru’ menggunakan metode *Cost of Insurance*, sedangkan [6] menerapkan hukum mortalita Gompertz, hukum mortalita Makeham, dan Tabel Mortalita Amerika Serikat 1979-1981 untuk menentukan premi tunggal yang dibayarkan sekaligus dari produk asuransi jiwa berjangka. Nilai premi yang paling mahal diperoleh berturut-turut dengan menggunakan hukum Makeham,hokum Gompertz, dan Tabel Mortalita Amerika Serikat 1979-1981.

Ketika data peluang meninggal hanya dimiliki dalam bentuk tabel mortalita ringkas, salah satu cara memperoleh peluang meninggal dalam bentuk tahunan adalah menggunakan metode interpolasi. Beberapa metode interpolasi yang sering digunakan para peneliti adalah metode interpolasi Lagrange [7], interpolasi Heligman-Pollard [8], dan interpolasi Kostaki [9]. Menurut [10], metode interpolasi Modifikasi Kostaki memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan beberapa metode interpolasi seperti metode interpolasi Kostaki, interpolasi Lagrange, dan interpolasi Heligman-Pollard dalam menginterpolasi nilai pada komponen-komponen pada tabel Mortalita untuk interval satu tahunan dimana ia menerapkannya pada tabel mortalita ringkas Amerika Serikat 2007. Metode interpolasi Modifikasi Kostaki ini merupakan gabungan metode interpolasi Kostaki dengan metode interpolasi lain seperti metode interpolasi Lagrange dan metode interpolasi Heligman-Pollard.

Menurut [11], nilai-nilai yang disajikan pada komponen-komponen table mortalita ringkas Amerika periode 2010-2015 mengikuti pola yang diharapkan dan tidak menunjukkan penyimpangan baik distribusi statistiknya maupun rata-rata tertimbang dari hasil sensus periode 2010-2015. Pada penelitian ini dibahas tentang penentuan peluang meninggal usia satu tahunan dari table Mortalita ringkas Amerika menggunakan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Lagrange dan interpolasi modifikasi dengan Heligman-Pollard dari tabel mortalita ringkas dimana hasil interpolasi terbaik yang diperoleh digunakan untuk menentukan premi asuransi jiwa berjangka n-tahun yang merupakan produk asuransi jiwa dimana tertanggung akan menerima manfaat jika risiko dipertanggungkan selama n-tahun dan risiko tersebut terjadi sebelum n-tahun berakhir. Perhitungan premi asuransi jiwa diberikan dalam bentuk premi yang dibayarkan secara sekaligus dan premi yang dibayar dengan cara mencicil baik dengan menggunakan tabel mortalita lengkap hasil interpolasi terbaik di antara interpolasi modifikasi Kostasi dengan Lagrange dan interpolasi modifikasi Kostasi dengan interpolasi Heligman-Pollard guna mengetahui manfaat perhitungan peluang meninggal dalam interval usia tahunan dalam memperoleh premi asuransi jiwa berjangka.

2 Bahan dan Metode

Langkah awal adalah mengestimasi peluang meninggal untuk interval satu-tahunan berdasarkan tabel mortalita ringkas (lima-tahunan) Amerika Serikat 2010 menggunakan metode interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik. Adapun tahapan-tahapannya adalah

a) Menentukan peluang meninggal interval usia lima-tahunan ${}_nq_x$ pada tabel mortalita lengkap Amerika Serikat 2010 sebagai peluang seseorang yang telah mencapai usia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $x+n$ menggunakan persamaan,

$$ {}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \tag{1}$$

b) Menentukan peluang meninggal interval usia satu-tahunan ${}_nq_x^{(I)}$ tahunan menggunakan interpolasi Lagrange 6 titik menggunakan persamaan

$$q_x = {}_nq_x{}^{(I)} = \sum_{i=1}^{6} {}_nq_{x_i} L_i(x) \tag{2}$$

dengan

$$L_i(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{3}$$

c) Menentukan nilai konstanta interpolasi Kostaki ${}_nK_x$ untuk setiap interval usia menggunakan persamaan,

$$ {}_nK_x = \frac{\ln(1 - {}_nq_x)}{\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(1 - q_{x+i}^{(S)}\right)} \tag{4}$$

dengan $q_x^{(S)}$ adalah peluang seseorang tepat berusia x meninggal sebelum mencapai usia $x+1$ pada tabel mortalita.

d) Menentukan peluang meninggal interval usia satu-tahunan $\hat{q}_x$ pada tabel mortalita lengkap menggunakan persamaan,

$$\hat{q}_x = 1 - (1 - q_x^{(S)})^{{}_nK_x} \tag{5}$$

Selanjutnya mengestimasi peluang meninggal untuk interval satu-tahunan berdasarkan tabel mortalita ringkas (lima-tahunan) Amerika Serikat 2010 menggunakan metode interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Heligman-Pollard dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Menentukan peluang meninggal interval usia lima-tahunan ${}_nq_x$ pada tabel mortalita lengkap Amerika Serikat 2010 menggunakan persamaan (1) seperti pada interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik.

b) Menentukan nilai parameter-parameter model Heligman-Pollard pada persamaan,

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D\, exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right] + GH^x \tag{6}$$

dengan bantuan program *Matlab R2011a* menggunakan metode Lavenberg Marquardt, dimana $\boldsymbol{\beta} = (A, B, C, D, E, F, G, H)$. Iterasi ke- $n+1$ pada metode Lavenberg Marquardt didefinisikan sebagai,

$$\hat{\beta}^{n+1} = \hat{\beta}^{n} - \left(J(\hat{\beta}^{n})^{T} J(\hat{\beta}^{n}) + \lambda_n I_{pxp}\right)^{-1} \left[\frac{\partial SSE(\beta)}{\partial(\beta_i)}\right] \tag{7}$$

Menentukan peluang meninggal interval usia satu-tahunan ${}_nq_x^{(I)}$ tahunan menggunakan interpolasi model Heligman-Pollard menggunakan persamaan $(8)-(10)$ yang berturut-turut untuk usia anak-anak (1-9 tahun), usia muda (10-29 tahun), dan usia tua (lebih dari 30 tahun).

$${}_nq_x{}^{(I)} = \frac{A^{(x+B)^C}}{1 + A^{(x+B)^C} + D\,exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right] + GH^x} \tag{8}$$

$${}_nq_x{}^{(I)} = \frac{D\,exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right]}{1 + A^{(x+B)^C} + D\,exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right] + GH^x} \tag{9}$$

$${}_nq_x{}^{(I)} = \frac{GH^x}{1 + A^{(x+B)^C} + D\,exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right] + GH^x} \tag{10}$$

Persamaan $(8)-(10)$ diperoleh dengan memisalkan bagian sebelah kanan pada persamaan (6) sebagai $\boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{\beta})$, dimana

$$q_x = \frac{\boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{\beta})}{1+\boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{\beta})} = \boldsymbol{G}(x;\boldsymbol{\beta}) \tag{11}$$

dan

$$q_x = 1 - p_x \tag{12}$$

kemudian pembilang $\boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{\beta})$ pada masing-masing persamaan berturut-turut merupakan komponen usia anak-anak (1-9 tahun), usia muda (10-29 tahun), dan usia tua (lebih dari 30 tahun) yaitu $A^{(x+B)^C}$, $D\,exp\left[-E\left(ln\left(\frac{x}{F}\right)\right)^2\right]$, dan GH^x .

c) Menentukan nilai konstanta ${}_nK_x$ untuk setiap interval usia menggunakan persamaan (4).
d) Menentukan $\hat{q}_x$ pada tabel mortalita lengkap menggunakan persamaan (5).

Langkah selanjutnya adalah menguji kebaikan hasil interpolasi $\hat{q}_x$ dari kedua metode Modifikasi Kostaki menggunakan rataan galat mutlak (*mean absolute error*, MAE) yang dirumuskan sebagai,

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} |\, q_x - \hat{q}_x \,| \tag{13}$$

dengan q_x adalah nilai peluang kematian sebenarnya, dan n adalah usia tertinggi pada Tabel Mortalita.Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

a) Uji MAE pada hasil q_x pada tabel mortalita lengkap Amerika Serikat 2010 dengan hasil $\hat{q}_x$ pada metode interpolasi modifikasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik.
b) Uji MAE pada hasil q_x pada tabel mortalita lengkap Amerika Serikat 2010 dengan hasil $\hat{q}_x$ pada metode interpolasi modifikasi Kostaki dengan Heligman-Pollard.
c) Membandingkan pengujian MAE antara kedua pengujian yang telah dilakukan untuk mendapatkan metode terbaik dari keduanya yang akan digunakan sebagai dasar menentukan premi asuransi jiwa berjangka.

Berikutnya adalah menentukan premi asuransi jiwa berjangka yang merupakan besaran nilai manfaat yang dibagi dengan cicilan yang dibayarkan di awal setiap periode *(due annuity)*,

$$P^{1}_{x:\bar{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}} \tag{14}$$

dimana nilai manfaat asuransi berjangka dan cicilan yang dibayarkan di awal setiap periode diperoleh berturut-turut dengan menggunakan

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \tag{15}$$

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k} \cdot {}_{k}p_x \tag{16}$$

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Estimasi Peluang Meninggal dengan Interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Lagrange

Peluang meninggal interval lima-tahunan pada tabel mortalita Amerika Serikat 2010 yang dihitung menggunakan (1) disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Peluang meninggal interval lima-tahunan

x	${}_nq_x$	x	${}_nq_x$	x	${}_nq_x$	x	${}_nq_x$
0	0.007220	25	0.004783	55	0.034937	85	0.415193
1	0.001077	30	0.005469	60	0.049359	90	0.606865
5	0.000574	35	0.006935	65	0.073759	95	0.776874
10	0.000705	40	0.009989	70	0.110602	100	0.895708
15	0.002461	45	0.016133	75	0.171432	105	0.955752
20	0.004307	50	0.024309	80	0.266704	110	1.000000

Selanjutnya penentuan peluang meninggal interval satu-tahunan menggunakan metode interpolasi ini diawali dengan skenario membuat kelompok umur dalam interval 10-tahunan dan masing-masing dalam kelompok umur tersebut ditentukan 6 titik interpolasi dengan jarak yang sama. Hasil perhitungan peluang meninggal interval satu-tahunan menggunakan metode interpolasi Lagrange 6 titik pada tabel mortalita Amerika Serikat 2010 disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2 Peluang meninggal interval satu-tahunan dengan interpolasi Lagrange

x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x
0	0.001077	23	0.004677	45	0.016133	67	0.086451	89	0.528987
1	0.001019	24	0.004733	46	0.017610	68	0.093718	90	0.568126
2	0.000886	25	0.004783	47	0.019163	69	0.101733	91	0.643968
3	0.000725	26	0.004879	48	0.020795	70	0.110602	92	0.679768
4	0.000574	27	0.004991	49	0.022508	71	0.120558	93	0.713994
5	0.000462	28	0.005125	50	0.024309	72	0.131547	94	0.746422
6	0.000410	29	0.005283	51	0.026234	73	0.143638	95	0.776874
7	0.000430	30	0.005469	52	0.028254	74	0.156905	96	0.805476
8	0.000529	31	0.005680	53	0.030372	75	0.171432	97	0.831774
9	0.000705	32	0.005927	54	0.032596	76	0.187015	98	0.855628
10	0.001077	33	0.006213	55	0.034937	77	0.204143	99	0.876948
11	0.001005	34	0.006548	56	0.037335	78	0.223014	100	0.895708
12	0.001341	35	0.006935	57	0.039921	79	0.246984	101	0.911955
13	0.001702	36	0.007360	58	0.042748	80	0.266704	102	0.925815
14	0.002077	37	0.007863	59	0.045875	81	0.291886	103	0.937506
15	0.002461	38	0.008458	60	0.049359	82	0.319351	104	0.947343
16	0.002889	39	0.009162	61	0.053389	83	0.349105	105	0.955752
17	0.003304	40	0.009989	62	0.057838	84	0.381095	106	0.963275
18	0.003687	41	0.010993	63	0.062709	85	0.415193	107	0.970583
19	0.004026	42	0.012121	64	0.068012	86	0.291886	108	0.978479
20	0.004307	43	0.013362	65	0.073759	87	0.451929	109	0.987917
21	0.004479	44	0.014703	66	0.079829	88	0.490053	110	1
22	0.004598								

Peluang meninggal interval satu-tahunan yang diperoleh menggunakan interpolasi Lagrange 6 titik ini menunjukkan bahwa peluang meninggal mengalami penurunan pada tahun pertama sampai tahun keenam, namun untuk peluang meninggal pada tahun ketujuh sampai tahun keseratus sepuluh mengalami peningkatan dan usia tertinggi yang dicapai adalah seratus sepuluh tahun.

Selanjutnya, nilai konstanta ${}_nK_x$ metode Kostaki diperoleh dengan cara mensubstitusikan peluang meninggal interval umur satu-tahunan pada metode interpolasi Lagrange 6 titik seperti yang disajikan pada Tabel 2 dan nilai peluang meninggal interval umur lima-tahunan seperti yang disajikan pada Table 1 ke dalam persamaan (4). Hasil perhitungan nilai konstanta ${}_nK_x$ untuk setiap interval umur disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3 Konstanta ${}_nK_x$ metode Kostaki dari interpolasi Lagrange

x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$
1	0.290531	30	0.183242	60	0.168584	90	0.162964
5	0.238471	35	0.174229	65	0.168056	95	0.167596

10	0.103178	40	0.163095	70	0.164515	100	0.173776
15	0.150295	45	0.167399	75	0.162193	105	0.171276
20	0.188937	50	0.171091	80	0.159139		
25	0.190847	55	0.173472	85	0.157611		

Berikutnya, estimasi peluang meninggal interval satu-tahunan menggunakan metode interpolasi modifikasi kostaki dengan interpolasi lagrange 6 titik diperoleh dengan mensubstitusikan hasil pada table 3 ke persamaan (5) dan hasilnya disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Estimasi peluang meninggal interval satu-tahunan dengan metode interpolasi Modifikasi Kostaki dengan interpolasi Lagrange

x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$
0	0.006150	23	0.000885	45	0.002719	67	0.015081	89	0.123960
1	0.000313	24	0.000896	46	0.002969	68	0.016400	90	0.141132
2	0.000296	25	0.000915	47	0.003234	69	0.017870	91	0.154885
3	0.000257	26	0.000933	48	0.003511	70	0.019068	92	0.169369
4	0.000211	27	0.000954	49	0.003804	71	0.020877	93	0.184519
5	0.000137	28	0.000980	50	0.004202	72	0.022902	94	0.200375
6	0.000110	29	0.001010	51	0.004537	73	0.025146	95	0.222291
7	0.000098	30	0.001004	52	0.004892	74	0.027647	96	0.239952
8	0.000103	31	0.001043	53	0.005263	75	0.030040	97	0.258255
9	0.000126	32	0.001089	54	0.005654	76	0.033018	98	0.277005
10	0.000073	33	0.001142	55	0.006150	77	0.036359	99	0.296142
11	0.000104	34	0.001203	56	0.006578	78	0.040098	100	0.324863
12	0.000139	35	0.001212	57	0.007043	79	0.044973	101	0.344413
13	0.000176	36	0.001286	58	0.007550	80	0.048167	102	0.363686
14	0.000215	37	0.001375	59	0.008114	81	0.053440	103	0.382332
15	0.000370	38	0.001479	60	0.008497	82	0.059389	104	0.400512
16	0.000435	39	0.001603	61	0.009206	83	0.066051	105	0.413769
17	0.000497	40	0.001636	62	0.009994	84	0.073520	106	0.432124
18	0.000555	41	0.001801	63	0.010857	85	0.081078	107	0.453395
19	0.000606	42	0.001987	64	0.011805	86	0.090419	108	0.481808
20	0.000815	43	0.002192	65	0.012794	87	0.100706	109	0.530784
21	0.000848	44	0.002413	66	0.013882	88	0.111887	110	1.000000
22	0.000870								

3.2 Estimasi Peluang Meninggal Menggunakan Interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Heligman-Pollard

Langkah awal sebelum mengestimasi peluang meninggal untuk interval satu-tahunan menggunakan metode interpolasi modifikasi Kostaki dengan Heligman-Pollard adalah menentukan parameter modelnya. Tabel 5 menyajikan parameter model Heligman-Pollard yang diperoleh menggunakan metode Lavenberg-Marquardt dengan bantuan *Software Matlab*.

Tabel 5. Parameter Interpolasi Heligman-Pollard

Parameter	Anak-anak	Muda	Tua
A	0.769	0.932	1.000
B	18.133	0.993	1.000
C	0.934	0.99	0.998
D	10.302	0.594	1.000
E	1.754	0.008	1.000
F	2.416	5.21E-10	1.000
G	7.454	1.149	7.79E-06
H	0.671	0.929	1.155

Peluang meninggal interval usia satu-tahunan diperoleh dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 5 ke persamaan $(8) - (10)$ ke persamaan (6), dan hasil lengkapnya disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6 Peluang meninggal interval satu-tahunan dengan interpolasi Heligman-Pollard

x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x
1	0.001848	23	0.003443	45	0.002544	67	0.057258	89	0.591214
2	0.000930	24	0.003454	46	0.002937	68	0.065551	90	0.625529
3	0.000838	25	0.003464	47	0.003391	69	0.074950	91	0.658628
4	0.000959	26	0.003473	48	0.003915	70	0.085573	92	0.690249
5	0.001176	27	0.003480	49	0.004519	71	0.097544	93	0.720187
6	0.001432	28	0.003486	50	0.005215	72	0.110985	94	0.748285
7	0.001673	29	0.003491	51	0.006019	73	0.126019	95	0.774446
8	0.001842	30	0.000294	52	0.006945	74	0.142764	96	0.798619
9	0.001901	31	0.000339	53	0.008013	75	0.161323	97	0.820802
10	0.003305	32	0.000392	54	0.009244	76	0.181782	98	0.841027
11	0.003301	33	0.000452	55	0.010661	77	0.204205	99	0.859361
12	0.003304	34	0.000522	56	0.012293	78	0.228620	100	0.875892
13	0.003311	35	0.000603	57	0.014172	79	0.255019	101	0.890727
14	0.003321	36	0.000697	58	0.016333	80	0.283347	102	0.903983
15	0.003333	37	0.000805	59	0.018817	81	0.313498	103	0.915784
16	0.003347	38	0.000929	60	0.021669	82	0.345311	104	0.926252
17	0.003361	39	0.001073	61	0.024945	83	0.378571	105	0.935511
18	0.003376	40	0.001239	62	0.028700	84	0.413015	106	0.943677
19	0.003390	41	0.001431	63	0.033002	85	0.448331	107	0.950865
20	0.003405	42	0.001653	64	0.037923	86	0.484176	108	0.957176
21	0.003418	43	0.001908	65	0.043546	87	0.520185	109	0.962709
22	0.003431	44	0.002203	66	0.049958	88	0.555985	110	0.967551

Peluang meninggal interval satu-tahunan yang diperoleh menggunakan interpolasi Heligman-Pollard ini menunjukkan bahwa peluang meninggal mengalami penurunan pada tahun pertama sampai tahun keempat, namun untuk peluang meninggal pada tahun kelima sampai tahun keseratus sepuluh mengalami peningkatan dan usia tertinggi yang dicapai lebih dari 110 tahun.

Selanjutnya seperti pada metode Modifikasi Kostaki dengan interpolasi Langrange 6 titik, nilai konstanta ${}_nK_x$ metode Kostaki diperoleh dengan cara mensubstitusikan peluang meninggal interval umur satu-tahunan pada metode interpolasi Heligman-Pollard seperti yang disajikan pada Tabel 6 dan nilai peluang meninggal interval umur lima-tahunan seperti yang disajikan pada Table 1 ke dalam persamaan (4). Hasil perhitungan nilai konstanta ${}_nK_x$ untuk setiap interval umur disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7 Konstanta ${}_nK_x$ metode Kostaki dari interpolasi Heligman-Pollard

x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$	x	${}_nK_x$
1	0.235358	30	2.742806	60	0.340846	90	0.158719
5	0.071526	35	1.693738	65	0.255029	95	0.174186
10	0.042561	40	1.189282	70	0.195849	100	0.192795
15	0.146361	45	0.938128	75	0.162266	105	0.206887
20	0.251233	50	0.691909	80	0.144862		
25	0.275159	55	0.488320	85	0.145086		

Hasil perhitungan peluang meninggal interval satu-tahunan menggunakan metode interpolasi modifikasi kostaki dengan interpolasi Heligman-Pollard diperoleh dengan mensubstitusikan hasil pada Tabel 7 ke persamaan (5) dan hasilnya disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8 Estimasi peluang meninggal interval satu-tahunan dengan metode interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Helligman Pollard.

x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$	x	$\hat{q}_x$
0	0.006150	23	0.000866	45	0.002387	67	0.014925	89	0.121719
1	0.000435	24	0.000869	46	0.002756	68	0.017142	90	0.144356
2	0.000219	25	0.000954	47	0.003181	69	0.019673	91	0.156831
3	0.000197	26	0.000957	48	0.003673	70	0.017368	92	0.169741
4	0.000226	27	0.000959	49	0.004240	71	0.019900	93	0.183027
5	0.000084	28	0.000960	50	0.003611	72	0.022777	94	0.196635
6	0.000103	29	0.000962	51	0.004169	73	0.026035	95	0.228483
7	0.000119	30	0.000806	52	0.004811	74	0.029718	96	0.243568
8	0.000132	31	0.000929	53	0.005551	75	0.028144	97	0.258790
9	0.000136	32	0.001075	54	0.006405	76	0.032031	98	0.274092
10	0.000141	33	0.001239	55	0.005220	77	0.036385	99	0.289422
11	0.000141	34	0.001431	56	0.006022	78	0.041245	100	0.331211
12	0.000141	35	0.001021	57	0.006946	79	0.046647	101	0.347425
13	0.000141	36	0.001180	58	0.008009	80	0.047117	102	0.363495
14	0.000142	37	0.001363	59	0.009233	81	0.053031	103	0.379386
15	0.000489	38	0.001573	60	0.007439	82	0.059518	104	0.395066
16	0.000491	39	0.001817	61	0.008573	83	0.066595	105	0.432849
17	0.000493	40	0.001473	62	0.009876	84	0.074273	106	0.448518
18	0.000495	41	0.001702	63	0.011373	85	0.082679	107	0.463875

19	0.000497	42	0.001966	64	0.013091	86	0.091577	108	0.478909
20	0.000857	43	0.002269	65	0.011290	87	0.101065	109	0.493612
21	0.000859	44	0.002619	66	0.012985	88	0.111122	110	0.507975
22	0.000863								

3.3 Rataan Galat Mutlak

Uji rataan galat mutlak (*mean absolute error*) atau MAE merupakan salah satu metode uji untuk melihat keakuratan suatu nilai dugaan dengan nilai sebenarnya, semakin kecil nilai MAE yang didapatkan maka semakin akurat nilai dugaannya. Pengujian ini dilakukan pada metode interpolasi Modifikasi Kostaki untuk mendapatkan metode terbaik antara Modifikasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik dan Modifikasi Kostaki dengan Heligman-Pollard. Hasil pengujian MAE untuk kedua metode tersebut disajikan pada Tabel 9, sedangkan perbandingan plotnya dengan Tabel mortalita lengkap Amerika 2010 diberikan pada Gambar 1 dan Gambar 2.

Tabel 9 MAE untuk Modifikasi Kostaski

Usia	**Nilai pada Tabel Mortalita Lengkap**	**Nilai Mutlak**		**Usia**	**Nilai pada Tabel Mortalita Lengkap**	**Nilai Mutlak**	
		Kostaki dengan Lagrange 6 titik	**Kostaki dengan Helligman-Pollard**			**Kostaki dengan Lagrange 6 titik**	**Kostaki dengan Helligman-Pollard**
x	q_x	$\lvert q_x - \hat{q}_x \rvert$	$\lvert q_x - \hat{q}_x \rvert$	x	q_x	$\lvert q_x - \hat{q}_x \rvert$	$\lvert q_x - \hat{q}_x \rvert$
1	0.000440	0.000127	0.000005	56	0.006570	0.000008	0.000548
2	0.000270	0.000026	0.000051	57	0.007060	0.000017	0.000114
3	0.000210	0.000047	0.000013	58	0.007630	0.000008	0.000379
4	0.000160	0.000051	0.000066	59	0.008100	0.000014	0.001133
5	0.000120	0.000017	0.000036	60	0.008630	0.000133	0.001191
6	0.000110	0.000000	0.000007	61	0.009150	0.000056	0.000577
7	0.000110	0.000012	0.000009	62	0.010000	0.000006	0.000124
8	0.000110	0.000007	0.000022	63	0.011290	0.000433	0.000083
9	0.000110	0.000016	0.000026	64	0.011290	0.000515	0.001801
10	0.000100	0.000027	0.000041	65	0.012790	0.000004	0.001500
11	0.000130	0.000026	0.000011	66	0.013880	0.000002	0.000895
12	0.000130	0.000009	0.000011	67	0.015380	0.000299	0.000455
13	0.000150	0.000026	0.000009	68	0.016240	0.000160	0.000902
14	0.000200	0.000015	0.000058	69	0.017740	0.000130	0.001933
15	0.000250	0.000120	0.000239	70	0.019380	0.000312	0.002012
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	0.004970	0.000078	0.000159	107	0.462930	0.009535	0.000945
53	0.005290	0.000027	0.000261	108	0.480700	0.001108	0.001791
54	0.005650	0.000004	0.000755	109	0.497500	0.033284	0.003888
55	0.006070	0.000080	0.000850	110	1.000000	0.000000	0.492025
					Total	0.113942	0.639490
					MAE	0.001036	0.005814

3.4 Premi Asuransi Jiwa Berjangka

Penentuan Penentuan premi asuransi memerlukan peluang hidup interval usia satu-tahunan dari peserta asuransi yang diperoleh sebagai negasi dari peluang meninggal interval usia satu-tahunan. Peluang hidup interval usia satu-tahunan dari hasil interpolasi peluang meninggal menggunakan metode modifikasi interpolasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik diberikan pada Tabel 10.

Tabel 10 Peluang Hidup Interval Usia Satu-Tahunan Modifikasi Kostaki dengan Lagrange

x	$\widehat{p}_x$	x	$\widehat{p}_x$	x	$\widehat{p}_x$	x	$\widehat{p}_x$	x	$\widehat{p}_x$
0	0.993850	23	0.999115	45	0.997281	67	0.984919	89	0.876040
1	0.999687	24	0.999104	46	0.997031	68	0.983600	90	0.858868
2	0.999704	25	0.999085	47	0.996766	69	0.982130	91	0.845115
3	0.999743	26	0.999067	48	0.996489	70	0.980932	92	0.830631
4	0.999789	27	0.999046	49	0.996196	71	0.979123	93	0.815481
5	0.999863	28	0.999020	50	0.995798	72	0.977098	94	0.799625
6	0.999890	29	0.998990	51	0.995463	73	0.974854	95	0.777709
7	0.999902	30	0.998996	52	0.995108	74	0.972353	96	0.760048
8	0.999897	31	0.998957	53	0.994737	75	0.969960	97	0.741745
9	0.999874	32	0.998911	54	0.994346	76	0.966982	98	0.722995
10	0.999927	33	0.998858	55	0.993850	77	0.963641	99	0.703858
11	0.999896	34	0.998797	56	0.993422	78	0.959902	100	0.675137
12	0.999861	35	0.998788	57	0.992957	79	0.955027	101	0.655587
13	0.999824	36	0.998714	58	0.992450	80	0.951833	102	0.636314
14	0.999785	37	0.998625	59	0.991886	81	0.946560	103	0.617668
15	0.999630	38	0.998521	60	0.991503	82	0.940611	104	0.599488
16	0.999565	39	0.998397	61	0.990794	83	0.933949	105	0.586231
17	0.999503	40	0.998364	62	0.990006	84	0.926480	106	0.567876
18	0.999445	41	0.998199	63	0.989143	85	0.918922	107	0.546605
19	0.999394	42	0.998013	64	0.988195	86	0.909581	108	0.518192
20	0.999185	43	0.997808	65	0.987206	87	0.899294	109	0.469216
21	0.999152	44	0.997587	66	0.986118	88	0.888113	110	0.000000
22	0.999130								

Perhitungan premi asuransi jiwa berjangka diberikan dalam bentuk ilustrasi dengan menggunakan table mortalita lengkap hasil interpolasi modifikasi Kostaki dan Lagrane 6 titik dan table moertalita lengkap Amerika 2010.

Misalkan seseorang berumur 25 tahun membeli produk asuransi jiwa dengan jangka waktu 12 tahun. Jika suku bunga sebesar 6% dan manfaat yang akan diperolehnya ketika risiko yang dipertanggungkan terjadi dalam rentang waktu tersebut adalah Rp 100.000.000, maka premi yang harus dibayarkan olehnya setiap tahun adalah Rp 98.300,-, dimana nilai ${}_kp_{25}$ diperoleh dengan cara,

$${}_0p_{25} = 1$$

$$p_{25} = 1 - q_{25}$$

$$
\begin{aligned}
{}_2p_{25} &= p_{25} \cdot p_{26} \\
{}_3p_{25} &= p_{25} \cdot p_{26} \cdot p_{27} \\
&= {}_2p_{25} \cdot p_{27} \\
{}_4p_{25} &= p_{25} \cdot p_{26} \cdot p_{27} \cdot p_{28} \\
&\vdots \\
{}_{11}p_{25} &= p_{25} \cdot p_{26} \cdot p_{27} \cdot p_{28} \cdot p_{29} \cdot p_{30} \cdot p_{31} \cdot p_{32} \cdot p_{33} \cdot p_{34} \cdot p_{35}
\end{aligned}
$$

Perhitungan premi pada ilustrasi 1 secara lengkap menggunakan tabel mortalita lengkap hasil interpolasi Modifikasi Kostaki dengan Lagrange 6 titik disajikan pada Tabel 11.

Tabel 11 Perhitungan Premi Menggunakan Tabel Mortalita Lengkap

k	v^k	v^{k+1}	p_{25+k}	${}_kp_{25}$	q_{25+k}	$A^1_{25:\overline{k}\rvert}$	$\ddot{a}_{25:\overline{k}\rvert}$
0	1	0.943396	0.999085	1	0.000915	0.000863	1.000000
1	0.943396	0.889996	0.999067	0.999085	0.000933	0.000830	0.942533
2	0.889996	0.839619	0.999046	0.9981529	0.000954	0.000800	0.888352
3	0.839619	0.792094	0.99902	0.9972006	0.00098	0.000774	0.837269
4	0.792094	0.747258	0.99899	0.9962234	0.00101	0.000752	0.789102
5	0.747258	0.704961	0.998996	0.9952172	0.001004	0.000704	0.743684
6	0.704961	0.665057	0.998957	0.994218	0.001043	0.000690	0.700884
7	0.665057	0.627412	0.998911	0.993181	0.001089	0.000679	0.660522
8	0.627412	0.591898	0.998858	0.9920994	0.001142	0.000671	0.622455
9	0.591898	0.558395	0.998797	0.9909665	0.001203	0.000666	0.586552
10	0.558395	0.526788	0.998788	0.9897743	0.001212	0.000632	0.552685
11	0.526788	0.496969	0.998714	0.9885747	0.001286	0.000632	0.520769
				$A^1_{25:\overline{12}\rvert}$		0,008691	
				$\ddot{a}_{25:\overline{12}\rvert}$			8.844808
				$P^1_{25:\overline{12}\rvert}$		0,0009826	
				Manfaat		Rp 100.000.000	
				Premi sekaligus		Rp 869.100,-	
				Premi cicilan per tahun		Rp 98.260,-	

Perhitungan premi pada Tabel 11 menunjukkan bahwa jika nasabah yang membeli produk ini ingin membayarkan preminya sekaligus hingga lunas maka premi yang harus dibayarnya sebesar Rp 869.100,-, namun jika ia ingin membayarkan preminya dengan cara mencicil pertahun, maka premi per tahun yang harus dibayarnya sebesar Rp 98.260,-. Apabila diakumulasikan selama 12 tahun, nilai premi yang dibayar secara cicilan ini sebesar Rp 1.179.126,-. Premi sebesar Rp 869.100,- atau Rp 98.260,- atau akumulasinya sebesar Rp 1.179.126,-.ini merupakan premi bersih yang dihitung hanya dengan memperhitungakan risiko tertanggung, belum melibatkan perhitungan pajak dan biaya-biaya perusahaan lainnya yang dapat berbeda-beda di setiap perusahaan. Premi yang dihitung berdasarkan peluang usia satu-tahunan ini tentu nilainya berbeda dengan premi yang dihitung berdasarkan peluang usia lima-tahunan. Perhitungan nilai premi menggunakan tabel mortalita ringkas dapat dilihat pada Tabel 12.

Tabel 12 Perhitungan Premi Menggunakan Tabel Mortalita Ringkas

k	v^k	v^{k+1}	p_{25+k}	${}_kp_{25}$	q_{25+k}	$A^1_{25:\overline{k}\vert}$	$\ddot{a}_{25:\overline{k}\vert}$
0	1	0.943396	0.99522	1	0.00478	0.004509	1
1	0.943396	0.889996	0.99522	0.99522	0.00478	0.004234	0.938887
2	0.889996	0.839619	0.99522	0.9904628	0.00478	0.003975	0.881508
3	0.839619	0.792094	0.99522	0.9857284	0.00478	0.003732	0.827637
4	0.792094	0.747258	0.99522	0.9810167	0.00478	0.003504	0.777057
5	0.747258	0.704961	0.99453	0.9763274	0.00547	0.003765	0.729569
6	0.704961	0.665057	0.99453	0.9709869	0.00547	0.003532	0.684507
7	0.665057	0.627412	0.99453	0.9656756	0.00547	0.003314	0.642229
8	0.627412	0.591898	0.99453	0.9603933	0.00547	0.003109	0.602563
9	0.591898	0.558395	0.99453	0.95514	0.00547	0.002917	0.565346
10	0.558395	0.526788	0.99861	0.9499154	0.00139	0.000696	0.530428
11	0.526788	0.496969	0.99861	0.948595	0.00139	0.000655	0.499708
				$A^1_{25:\overline{12}\vert}$		0.037944	
				$\ddot{a}_{25:\overline{12}\vert}$			8.679439
				$P^1_{25:\overline{12}\vert}$		0.00437167	
				Manfaat		100.000.000	
				Premi sekaligus		Rp 3.794.365,-	
				Premi cicilan per tahun		Rp 437.167,-	

Tabel 12 menunjukkan bahwa jika nasabah yang membeli produk ini ingin membayarkan preminya sekaligus hingga lunas maka premi yang harus dibayarnya sebesar Rp 3.794.365,-, namun jika ia ingin membayarkan preminya dengan cara mencicil pertahun, maka premi per tahun yang harus dibayarnya sebesar Rp 437.167,-. Apabila diakumulasikan selama 12 tahun, nilai premi yang dibayar secara cicilan ini sebesar Rp 5.246.005,-. Seperti halnya perhitungan premi menggunakan tabel mortalita pringkas, Premi sebesar Rp 3.794.365,-, atau Rp 437.167,- atau akumulasinya sebesar Rp 5.246.005,-. ini merupakan premi bersih yang dihitung hanya dengan memperhitungakan risiko tertanggung, belum melibatkan perhitungan pajak dan biaya-biaya perusahaan lainnya yang dapat berbeda-beda di setiap perusahaan. Jika dibandingkan dengan hasil perhitungan premi menggunakan tabel mortalitas lengkap, perhitungan premi menggunakan tabel mortalita ringkas ini lebih besar empat kali lipatnya. Artinya perhitungan peluang meninggal interval usia satu-tahunan diperlukan untuk mendapatkan nilai premi yang lebih akurat. Perbedaan peluang meninggal dalam interval usia satu-tahunan dan interval usia lima-tahunan signifikan mempengaruhi perhitungan premi asuransi jiwa berjangka, dimana hasil perhitungan premi asuransi jiwa berjangka menggunakan table mortalita ringkas lebih tinggi daripada menggunakan table mortalita lengkap.

4 Simpulan dan Saran

Suatu produk asuransi jiwa dimana tertanggung akan menerima manfaat jika risiko yang dipertanggungkan selama n-tahun terjadi sebelum n-tahun berakhir dikenal sebagai asuransi jiwa berjangka. Premi dari suatu produk asuransi dapat dibayarkan sekaligus atau dengan cara mencicil. Pembayaran cicilan dapat dilakukan dalam periode waktu tertentu misalnya tahunan, bulanan atau per 4 bulan. Penentuan premi produk asuransi jiwa berjangka n-tahun, baik dengan cara membayarkannya sekaligus maupun cicilan memerlukan peluang meninggal dalam interval usia satu-tahunan karena umur nasabah diasumsikan berusia bulat (*integer*). Penelitian yang bertujuan menentukan peluang meninggal interval usia satu-tahunan menggunakan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Lagrange 6 titik dan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Heligman-Pollard dari tabel mortalita ringkas Amerika 2010 dimana hasil interpolasi terbaik yang diperoleh digunakan untuk menentukan premi asuransi jiwa berjangka menyimpulkan bahwa hasil interpolasi peluang meninggal interval usia satu-tahunan menggunakan metode interpolasi Kostaki Modifikasi dengan Lagrange 6 titik lebih baik daripada hasil interpolasi modifikasi dengan Heligman-Pollard berdasarkan nilai MAE. Hasil ilustrasi perhitungan premi untuk produk asuransi berjangka menunjukkan bahwa peluang meninggal interval usia satu-tahunan diperlukan untuk mendapatkan nilai premi yang lebih akurat dan perbedaan peluang meninggal dalam interval usia satu-tahunan dan interval usia lima-tahunan signifikan mempengaruhi perhitungan premi asuransi jiwa berjangka.

Daftar Pustaka

[1] S. D. Promislow, *Fundamentals of Actuarial Mathematics: Second Edition*, 2nd ed. 2011.

[2] J. Newton L., Bowers, G. Hans U., H. James C., J. Donald A., and N. Cecil J., *Actuarial Mathematics*, vol. 93, no. 6. The Society of Actuaries, 1986.

[3] V. Huang and K. Farah, "Analisis Kesesuaian Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham Terhadap Tabel Mortalita Amerika Serikat dan Indonesia," pp. 63–69, 2012.

[4] V. Huang and F. Kristiani, "Penerapan Hukum Mortalita Makeham dan Tingkat Suku Bunga Stokastik Untuk Perhitungan Nilai Tunai Manfaat," *Mat Stat*, vol. 13, no. 1, pp. 8–23, 2013.

[5] F. N. Hidayat, R. Cahyandari, and A. S. Awalluddin, "Penerapan Hukum Mortalita Gompertz untuk Perhitungan Dana Tabarru' dengan Metode Cost of Insurance," *Kubik J. Publ. Ilm. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 156–162, 2019, doi: 10.15575/kubik.v4i1.5676.

[6] L. SHERLY, "Membandingkan Premi Asuransi Jiwa Berjangka Berdasarkan Hukum Mortalita Gompertz, Hukum Mortalita Makeham dan Tabel Mortalita Amerika 1979 – 1981 dengan Tingkat Suku Bunga Konstan," UNIVERSITAS LAMPUNG, 1981.

[7] T. Yulianto, N. I. Ulfaniyah, and R. Amalia, "Peramalan HIV Menggunakan Interpolasi Lagrange," *Zeta - Math J.*, vol. 2, no. 1, pp. 3–6, 2016.

[8] M. Riyana, S. M. Belwawin, N. Hasanah, and M. Ahmad, "Heligman-pollard modification by using the makeham death rate to predict the life table of the elderly," *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, vol. 343, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1755-1315/343/1/012189.

[9] M. N. Rajak, Y. N. Nasution, and N. Rizki, "Penentuan Besaran Premi Asuransi Jiwa dengan Model Apportionable Fractional Premiums Berdasarkan Tabel Mortalita dengan Metode Interpolasi Kostaki," *J. Eksponensial*, vol. 9, pp. 27–34, 2018.

[10] ZULKARNAEN, "Modifikasi metode interpolasi kostaki dalam menduga tabel hayat lengkap berdasarkan tabel hayat ringkas," INSTITUT PERTANIAN BOGOR, 2012.

[11] E. Arias, L. A. Escobedo, J. Kennedy, C. Fu, and J. Cisewski, *U.S. small-area life expectancy estimates project: Methodology and results summary*, vol. 2018, no. 181. 2018.