

## **PENERAPAN TEORI KENDALI PADA MASALAH PROGRAM DINAMIK**

**Pardi Affandi, Dewi A, Nur Salam**

Program Studi Matematika  
Universitas Lambung Mangkurat  
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru  
Email: [pardi\\_affandi@yahoo.com](mailto:pardi_affandi@yahoo.com)

### **ABSTRAK**

Penelitian ini mengkaji tentang penerapan Teori Kendali pada masalah Program Dinamik. Program dinamik merupakan rancangan analisis dalam matematika untuk menentukan sederet keputusan yang berhubungan dengan proses pengambilan keputusan secara bertahap ganda untuk mengoptimalkan penyelesaian masalah secara efektif. Permasalahan klasik dalam program dinamik adalah konsep tentang tahap, keadaan dan perolehan. Penyelesaian permasalahan akan menggunakan Teori Kontrol.

Kata Kunci: *Teori Kendali, Program Dinamik.*

### **1. PENDAHULUAN**

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem, teorikendali dan beberapa aplikasinya. Salah satunya adalah masalah program dinamik, masalahnya adalah bagaimana mengoptimalkan proses pengambilan keputusan yang multi tahap. Dasar tehnik ini adalah membagi suatu persoalan atas beberapa bagian persoalan yang dalam program dinamik disebut tahap, kemudian memecahkan tiap tahap dengan mengoptimalkan keputusan atas tiap tahap sampai seluruh persoalan dapat terpecahkan. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kontrol optimal matematika, pemrograman dinamis dan optimasi jaringan.

Permasalahan klasik dalam program dinamik adalah konsep tentang tahap, keadaan dan perolehan. Permasalahan ini salah satunya diselesaikan dengan menggunakan teknik kontrol optimal. Teori kontrol optimal, merupakan perpanjangan dari kalkulus variasi, merupakan metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Metode ini sebagian besar diilhami oleh karya Lev Pontryagin dan rekan-rekannya di Uni Soviet dan Richard Bellman di Amerika Serikat. Salah satu karya besar Lev Pontryagin adalah Pontragyn'S maximum principle. Prinsip ini memiliki titik tekan pada syarat perlu untuk optimalitas.

Program dinamik merupakan rancangan analisis dalam matematika untuk menentukan sederet keputusan yang berhubungan dengan proses pengambilan keputusan secara bertahap ganda untuk mengoptimalkan penyelesaian masalah secara efektif. Dalam hal pengambilan keputusan terdapat beberapa teknik yang digunakan karena setiap masalah akan diformulasikan dalam sebuah rumusan berbeda antara satu masalah dengan masalah yang lainnya. Program dinamik ini banyak

menyelesaikan masalah dalam pengambilan keputusan, diantaranya alokasi dana dan juga perluasan pabrik.

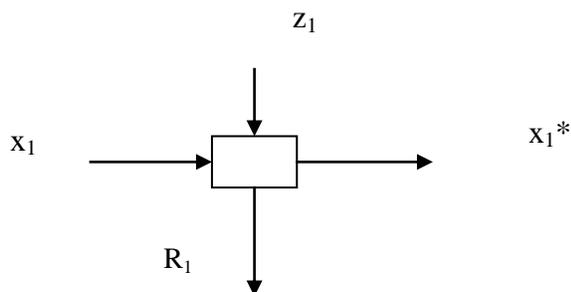
## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Program Dinamik

Tehnik program dinamik adalah terutama didasarkan pada prinsip optimisasi recursive (bersifat pengulangan) yang diketahui sebagai prinsip optimalisasi (prinsiple of optimality). Prinsip ini mengandung arti yaitu apabila dibuat keputusan *multi stage* mulai dari tahap tertentu, kebijakan optimal untuk tahap-tahap selanjutnya tergantung pada ketetapan tahap permulaan tanpa menghiraukan bagaimana diperoleh suatu ketetapan tertentu tersebut.

Tujuan utama dari program dinamik ini adalah untuk mempermudah penyelesaian persoalan optimisasi yang dapat dibagi ke dalam tahap-tahap. Hal ini sesuai dengan ide dasar dari program dinamik yaitu membagi suatu persoalan menjadi persoalan yang lebih kecil sehingga mempermudah penyelesaiannya.

Hal ini dapat kita lihat pada gambar gambar 1, yaitu dengan mengambil tahap I sebagai problema satu tahap maka problema satu tahap dapat diperlihatkan sebagai berikut :



Gambar 1. Rangkaian keputusan satu tahap

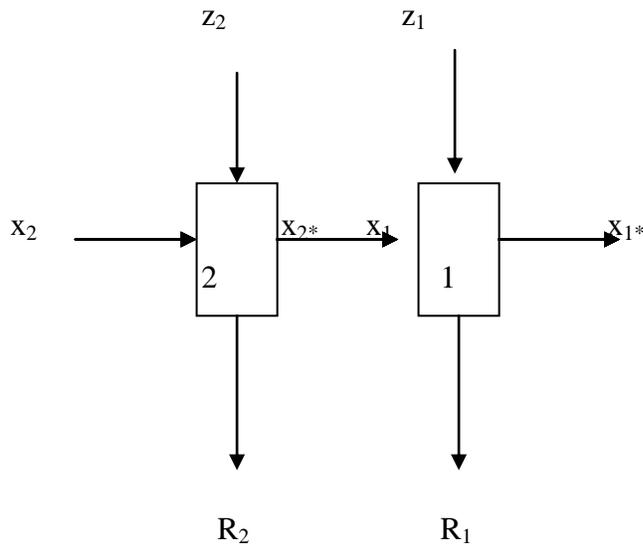
Fungsi hasil pada problema satu tahap ini adalah  $R_1 = r_1(x_1, z_1)$ . Keputusan optimal pada problema satu tahap ini diperoleh dengan memeriksa semua variabel-variabel yang keadaan input  $z_1$  dan variabel keputusan  $x_1$ . Oleh karena itu keputusan optimal pada problema satu tahap ini adalah :

$$f_1^*(x_1, z_1) = \underset{x_1}{\text{optimal}} \{R_1\}$$

atau

$$f_1^*(x_1, z_1) = \text{optimal} \{R_1(x_1, z_1)\}$$

Selanjutnya untuk menentukan keputusan optimal untuk dua tahap dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 2. Rangkaian keputusan dua tahap

Apabila hubungan rekursif ini dilanjutkan hingga problema n tahap, maka keputusan optimal pada problema n tahap dapat ditulis sebagai berikut :

$$f_n^*(x_n, z_n) = \underset{x_n}{\text{optimal}} \{ (r_1(x_1, z_1) + r_2(x_2, z_2) + \dots + r_j(x_j, z_j) + \dots + r_n(x_n, z_n)) \}$$

Dan bentuk ini biasa dituliskan dalam bentuk :

$$f_n^*(x_n, z_n) = \underset{x_n}{\text{optimal}} \{ (r_{n-1}(x_{n-1}, z_{n-1}) + r_n(x_n, z_n)) \}$$

## 2.2 Teori Kendali optimal

Pada bagian ini akan, akan dibahas masalah kendali optimal khususnya pada kasus dengan state akhir dan waktu akhir diketahui. Untuk permasalahan ini, penyelesaian menggunakan prinsip maksimum pontryagin.

### 2.1 Perumusan masalah Kendali Optimal

Diberikan sebuah sistem  $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$  ,  $t \in (T_1, T_2)$

dengan  $x(t)$  vektor state yang berukuran  $n \times 1$  yaitu

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  ,  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$  berukuran  $m \times 1$ ,  $f$  sebuah fungsi bernilai vektor berukuran  $n \times 1$  yaitu  $f = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$  dan  $(T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$  domain dari sistem awal. Pada sistem ini diasumsikan  $0 < m \leq n$ . Diberikan juga  $L$  suatu fungsi berharga real pada  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (T_1, T_2)$  berbentuk

$L = [x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t]$  dan  $k$  fungsi berharga real  $\mathbb{R}^n \times (T_1, T_2)$  berbentuk  $K = [x_1, x_2, \dots, x_n, t]$ . Himpunan  $S \subset \mathbb{R}^n \times (T_1, T_2)$  dengan elemen-elemen berupa pasangan titik  $(x, t)$  dengan  $x$  state dan  $t$  dalam domain sistem disebut target.

Diasumsikan untuk setiap  $t$  dalam domain  $(T_1, T_2)$  dari sistem awal, terdapat himpunan bagian  $U_t$  dalam  $\mathbb{R}^m$ . Misalkan koleksi semua  $U_t$  dilambangkan dengan  $\Omega$

yaitu  $\Omega = \{ U_t : t \in (T_1, T_2) \}$ ,  $U_t$  disebut kendala (constraint) pada waktu  $t$  dan  $\Omega$  disebut kendala. Jika  $U$  merupakan himpunan semua  $u(t)$  untuk setiap  $t$  dalam  $(T_1, T_2)$  sehingga :  $U(t) \in U_t$  : untuk setiap  $t \in (T_1, T_2)$ . Maka  $u$  disebut himpunan semua kendali yang memenuhi kendala  $\Omega$  atau himpunan semua admissible kontrol.

Diberikan  $t_0 \in (T_1, T_2)$  dan  $x_0$  elemen di  $R^n$  maka  $u \in U$  (admissible kontrol  $u$ ), misal notasi :  $\varphi(t; U_{(t_0, t]}, x_0)$ , dengan  $U_{(t_0, t]}$  menyatakan kendali pada selang waktu  $(t_0, t]$ , adalah penyelesaian tunggal dari sistem (3.1) yang memenuhi syarat awal  $x(t_0) = x_0$ . Kendali  $U$  dikatakan membawa  $x_0$  ke target set  $S$  (atau  $(x_0, t_0]$  ke  $S$ ). Jika himpunan  $\{\varphi(t; U_{(t_0, t]}, x_0), t \geq t_0\}$  beririsan dengan  $S$ . Jika  $t_1$  waktu pertama kali  $x(t) = \varphi(t; U_{(t_0, t]}, x_0)$  masuk di dalam  $S$ , maka notasi  $x_1 = x(t_1) = \varphi(t; U_{(t_0, t]}, x_0)$  menyatakan kondisi akhir sistem.

Pada sistem kendali optimal, masalah yang dihadapi adalah memaksimumkan fungsi berharga real pada  $R^n \times (T_1, T_2) \times U \times R^n$ , yang didefinisikan dengan

$$\tilde{J}(x_0, t_0, u, x, t) = K(x, t) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt$$

dengan  $K$  dan  $L$  fungsi-fungsi yang telah diperkenalkan di awal. Dengan kondisi awal  $x(t_0) = x_0$  dan kondisi akhir awal  $x_1 = x(t_1)$  fungsi  $\tilde{J}(x_0, t_0, u, x_1, t_1)$  ditulis dengan  $\tilde{J}(x_0, t_0, u)$ , yaitu

$$\begin{aligned} \tilde{J}(x_0, t_0, u) &= K(x_1, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt \\ &= K[\varphi(t_1; U_{(t_0, t_1]}, x_0), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi(t; U_{(t_0, t]}, x_0), u(t), t) dt \end{aligned}$$

Maka  $\tilde{J}(x_0, t_0, u)$  dapat dinyatakan sebagai  $J(u)$  saja. Dari keterangan tersebut di atas, masalah kendali optimal dapat dinyatakan dalam definisi sebagai berikut:

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan sebuah sistem dalam bentuk persamaan

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

dengan  $x(t)$  vektor state berukuran  $n \times 1$ ,  $u(t)$  vektor input berukuran  $m \times 1$ ,  $f$  sebuah fungsi bernilai vektor berukuran  $n$ . Diberikan state awalnya adalah  $X_0$  dan pada waktu awalnya adalah  $t_0$ . Target set  $S$  berupa titik  $(x_1, t_1)$  dengan  $t_1 \in (T_1, T_2)$  diketahui nilainya dan  $t_1 > t_0$ .

Masalah kendali optimal adalah mencari admissible kontrol  $u(t)$  dengan nilai awal  $(x_0, t_0)$  dan nilai akhir  $(x_1, t_1)$  yang memaksimumkan fungsi tujuan

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt$$

Untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal tersebut di atas, terlebih dahulu ditentukan syarat perlu agar kendali optimal terpenuhi. Syarat perlu ini diturunkan dengan menggunakan pendekatan Lagrange sebagai berikut :

1. Diberikan masalah maksimasi  $J(u)$  dengan state tertentu, misalkan state awal adalah  $x(t_0) = X_0$  dan state akhir misalkan  $x(t_1) = x_1$ .

2. Didefinisikan fungsi skalar  $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E} [x(t), u(t), \lambda(t), t, \mu]$  dengan

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) dt - \mu(x(t_0) - x_0) \quad (3)$$

3. Didefinisikan fungsi skalar  $H(x, u, \lambda, t)$

dengan  $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = [L(x(t), u(t), t) + \lambda(t)(f(x(t), u(t), t))]$  fungsi  $H$  disebut fungsi Hamiltonian (secara singkat disebut Hamiltonian) dari sistem.

Dari definisi fungsi  $H$  ini maka Lagrangian dapat dituliskan ke dalam fungsi Hamiltonian, prosesnya sebagai berikut :

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) dt - \mu(x(t_0) - x_0) \quad (3)$$

Diketahui bahwa

$$\frac{d\lambda(t)x(t)}{dt} = \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{\lambda}(t)x(t).$$

dapat ditulis

$$\lambda(t)\dot{x}(t) = \frac{d\lambda(t)x(t)}{dt} - \dot{\lambda}(t)x(t).$$

Kemudian kedua sisi diintegrasikan dari  $t = t_0$  sampai  $t = t_1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\lambda(t)x(t)}{dt} dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t)x(t) dt \\ &= \lambda(t_1)x(t_1) - \lambda(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}(t)x(t) dt \end{aligned}$$

Dari sini, dapat dituliskembali Lagrangian sebagai berikut

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) dt - \mu(x(t_0) - x_0).$$

Persamaan terakhir ini dapat dituliskan ke dalam fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} [H(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}(t)x(t)] dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) \\ - \mu(x(t_0) - x_0). \end{aligned}$$

3. Diasumsikan bahwa pada waktu optimal, variabel kendali dan variabel state

masing-masing adalah  $u^*(t)$  dan  $x^*(t)$ .

Diberikan fungsi  $u(t, \varepsilon) = u^*(t) + \varepsilon P_1(t)$ .

Dengan  $P_1(t)$  sebarang fungsi kontinu sepotong-sepotong pada  $(t_0, t_1)$ ,

sedangkan fungsi  $u(t, \varepsilon)$  disebut deviasi dari  $u^*(t)$ .  $\varepsilon P_1(t)$

disebut variasi dari  $u^*(t)$ . Jika  $x(t)$  trayektori yang bersesuaian dengan kendali

$u(t)$ , maka variasi pada kontrol  $u(t)$  mengakibatkan variasi pada trayektori

sehingga

$$x(t, \varepsilon) = x^*(t) + \varepsilon P_2(t)$$

dengan  $P_2(t)$  sebarang fungsi kontinu sepotong-sepotong pada  $(t_0, t_1)$ . Hal ini

berkorespondensi terhadap state akhir optimal  $x(t_1, \varepsilon) = x^*(t_1) + \varepsilon P_2(t_1)$

Berdasarkan persamaan di atas maka dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} [H(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}(t)x(t, \varepsilon)] dt - \lambda(t_1)x(t_1, \varepsilon) + \lambda(t_0)x(t_0) - \mu(x(t_0) - (x_0))$$

dengan  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \lambda(t), t, \mu)$ .

4. Pada proses sebelumnya, jika pada kenyataannya  $u^*(t)$  optimal, maka deviasinya sangat kecil sehingga tidak mempengaruhi nilai fungsi Lagrange yaitu

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \lambda(t), t, \mu)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Hasil ini lebih lanjut digunakan untuk menghitung syarat perlu maksimum principle. Derivatif parsial terhadap  $\varepsilon$ , ketika dievaluasi pada nilai optimal dari variabel kontrol dan variabel state, meliputi beberapa komponen. Derivatif parsial akan sama dengan nol jika masing-masing komponen sama dengan nol, dapat dijelaskan sebagai berikut

Persamaan ruas kiri dapat ditulis

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \left[ \int_{t_0}^{t_1} H(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \lambda(t), t) + \dot{\lambda}(t)x(t, \varepsilon) dt \right]}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \lambda(t_1)x(t_1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \lambda(t_0)x(t_0)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \mu(x(t_0) - (x_0))}{\partial \varepsilon}$$

Misalkan

$H^* \equiv H(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \lambda(t), t)$  dengan  $x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)$  telah diperkenalkan di awal.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \left[ \int_{t_0}^{t_1} H^* + \dot{\lambda}(t)x(t, \varepsilon) \right] dt}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \lambda(t_1)x(t_1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \lambda(t_0)x(t_0)}{\partial \varepsilon} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial H^*}{\partial u} P_1(t) + \left[ \frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \right] P_2(t) \right] dt - \lambda(t_1) dx(t_1) \end{aligned}$$

Karena  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} = 0$  sehingga

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial H^*}{\partial u} P_1(t) + \left[ \frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \right] P_2(t) \right] dt - \lambda(t_1) dx(t_1) = 0.$$

Dan berdasarkan teorema (3.1) berikut akan diperoleh

**Teorema 3.1 (Athans dkk 1966)** Jika  $h(t)$  fungsi kontinu sepotong-sepotong pada  $[t_0, t_1]$  dan  $\int_{t_0}^{t_1} \langle h(t), \alpha(t) \rangle dt = 0$ . Untuk setiap fungsi kontinu sepotong-sepotong  $\alpha(t)$  pada  $[t_0, t_1]$  maka  $h(t) = 0, t \in [t_0, t_1]$ .

Sehingga berdasarkan persamaan di atas dan teorema 3.1 maka dengan menganggap

$$p_i(t) = \alpha(t),$$

untuk  $i = 1, 2$  yaitu fungsi kontinu sepotong-sepotong pada  $[t_0, t_1]$  akan diperoleh

$$\frac{\partial H^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) = 0, \text{ dan } \lambda(t_1) = 0$$

Sehingga berakibat adanya beberapa kondisi berikut

kondisi 1:  $\lambda(t_1) = 0$

kondisi 2 :  $\frac{\partial H^*}{\partial u} = 0$

dan  $\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) = 0$  atau  $\frac{\partial H^*}{\partial x} = -\dot{\lambda}(t)$

Dari keseluruhan proses dan beberapa kondisi tersebut di atas, didapatkan syarat perlu optimalitas sebagai berikut

Jika  $u^*(t)$  dan  $x^*(t)$  memaksimumkan  $J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [L(x(t), u(t), t)] dt$

dengan persamaan state  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

maka untuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t).$$

Nilai optimal  $u^*(t)$  dan  $x^*(t)$  harus memenuhi beberapa kondisi berikut

- $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), \lambda(t), t), \forall t.$
- $\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial x t} = -\dot{\lambda}(t).$
- $\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda t} = \dot{x}(t).$
- $x(t_0) = x_0.$

Dan salah satu dari kondisi berikut harus ada yaitu

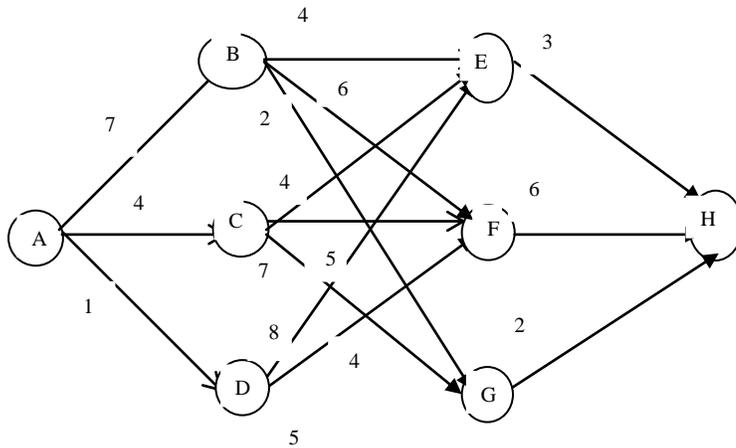
- Jika nilai akhir dari variabel state sama dengan  $t_1$  maka  $x(t_1) = x_1.$
- Jika nilai akhir dari variabel state tidak diberikan maka  $\lambda(t_1)x(t_1) = 0.$
- Kondisi inilah yang disebut dengan Prinsip Maksimum Pontryagin.

Masalah minimisasi dengan fungsi tujuan berbentuk  $J(u)$  dapat diselesaikan dengan menggunakan metode prinsip maksimum Pontryagin yaitu terlebih dahulu masalah diubah kedalam bentuk masalah memaksimumkan  $J^*(u)$  dengan  $J^*(u) = -J(u)$ . Dengan kata lain, meminimalkan  $J(u)$  sama saja dengan memaksimumkan  $J^*(u)$ .

### 3.1 Masalah rute perjalanan dalam Program Dinamik

Program dinamik merupakan tehnik solusi yang fleksibel yang dapat diaplikasikan terhadap berbagai jenis masalah. Banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan menggunakan program dinamik. Pendekatan solusi dengan mengubah masalah menjadi sub-masalah yang lebih kecil yang disebut tahap dan memecahkan tahap-tahap ini secara berurutan. Kemungkinan timbulnya solusi atas masalah yang lebih kompleks dapat dipecahkan dengan lebih mudah.

Pada dasarnya karakteristik utama masalah program dinamik adalah dapat dinyatakan sebagai suatu persoalan yang dapat dibagi menjadi beberapa tahap.



Gambar 3. Diagram jaringan rute perjalanan

### 3.2 Solusi Menggunakan Kendali Optimal

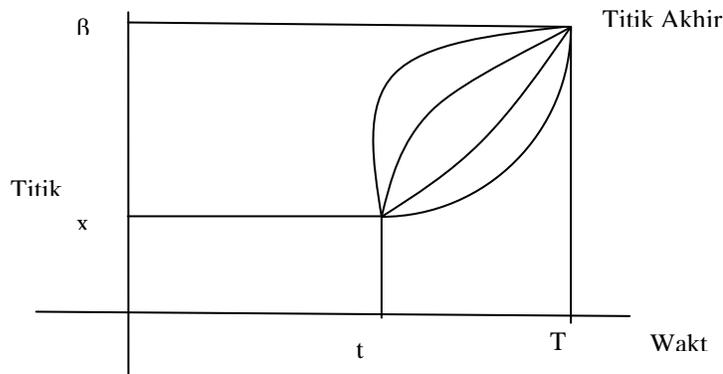
Dalam masalah ini akan digunakan kendali optimal dengan menggunakan konsep Euler. Diberikan masalah minimum sebuah fungsi :

$$\tilde{J}(x) = \int_0^T f(x, \dot{x}, t) dt$$

dengan  $x(0) = \alpha$  dan  $x(T) = \beta$ ,  $\tilde{J}(x)$  dinotasikan dengan fungsi yang bebas dalam interval  $x(T)$ ,  $0 \leq t \leq T$  yang nilainya diantara  $(\alpha, 0)$  dan  $(\beta, T)$  dalam wilayah  $x-t$ . Program dinamik didefinisikan untuk menentukan nilai optimal dari interval waktu  $t$  hingga  $T$  yaitu :

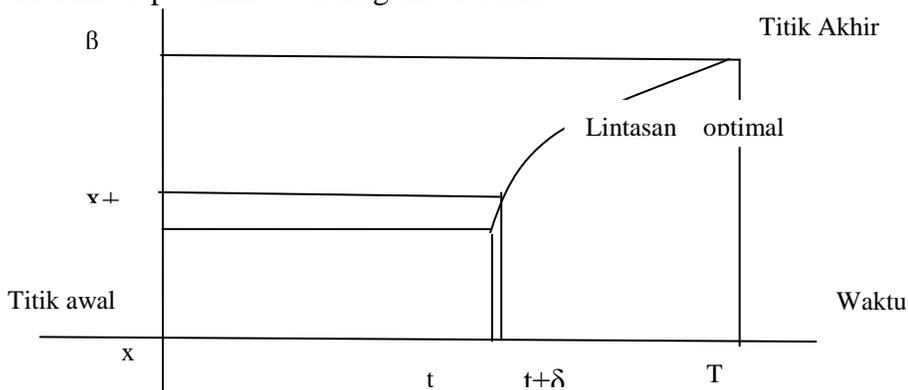
$$S(t, x) = \min_{y, \dot{y}} \int_t^T f(y, \dot{y}, \tau) d\tau,$$

$y(t) = x$  dan  $y(T) = \beta$ . Dengan kata lain jika sebuah titik dalam posisi  $x$  waktu  $t$ , nilai minimumnya adalah intergral  $\int_t^T f(x, \dot{x}, t) dt$ . Nilai akhirnya dengan  $x(T) = \beta$  adalah diberikan khusus interval  $y(\tau)$  dan nilainya  $S(t, x)$ . Ini dapat diberikan dalam gambar berikut



Gambar 4

Pada gambar di atas terdapat beberapa lintasan yang mungkin dari  $(t,x)$  menuju  $(T,\beta)$ . Sekarang dapat diperoleh  $S(t,x)$  hingga diperoleh bagian dari  $x$  pada waktu  $t$  menuju  $x + \delta x$  hingga menuju waktu  $t+\delta t$  dan kemudian  $x+\delta x$  hingga waktu akhir  $T$ . Hal ini dapat dilihat dalam gambar berikut



Gambar 5

Hal ini dapat dicari dengan menggunakan

$$S(t,x) = \int_t^{t+\delta t} f(y, \dot{y}, \tau) d\tau + S(t + \delta t, x + \delta x)$$

Sehingga  $S(t + \delta t, x + \delta x)$  dijadikan nilai minimum integral dari  $(t+\delta t, x+\delta x)$  hingga  $(T,\beta)$ . Kita dapat aproksimasi nilainya dengan menggunakan.

$$\int_t^{t+\delta t} f(y, \dot{y}, \tau) d\tau \equiv \delta t f(y(t), \dot{y}(t), t) = C f(x, \dot{x}, t).$$

Hal ini digunakan dengan cara

$$\int_a^b f(x) dx \equiv (b - a)f(a), \text{ dengan interval } b - a \text{ sangat kecil. Juga dapat}$$

ditentukan nilainya dengan menggunakan deret Taylor

$$S(t + \delta t, x + \delta x) \equiv S(t, x) + \delta t \frac{\partial S}{\partial t} + \delta x \frac{\partial S}{\partial x} + \dots$$

Sehingga akan diperoleh

$$S(t, x) = \min_{\delta x} \{ \delta t f(x, \dot{x}, t) + S(t, x) + \delta t \frac{\partial S}{\partial t} + \delta x \frac{\partial S}{\partial x} + \dots \}$$

Nilai minimumnya dengan merubah  $\delta x$  dengan  $\delta x \equiv \dot{x} \delta t$  berarti  $\dot{x}$  akan diperoleh

$$0 = \min_{\dot{x}} \{ \delta t f(x, \dot{x}, t) + \delta t \frac{\partial S}{\partial t} + \delta t \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} + 0 (\delta t^2) \}$$

Karena akan diperoleh nilai  $\delta t \neq 0$ , akan diperoleh nilai

$$0 = \min_{\dot{x}} \{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} \} \text{ dan karena nilai } \frac{\partial S}{\partial t} \text{ adalah bebas linier dengan } \dot{x}$$

maka akan diperoleh

$$\frac{-\partial S}{\partial t} = \min_{\dot{x}} \{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} \} \text{ Ini adalah persamaan Bellman's, yang ekuivalen}$$

dengan persamaan Euler. Selain itu Program Dinamik dapat juga digunakan untuk menyelesaikan masalah numerik dan juga masalah kalkulus variasi.

Dalam tahap  $(n,i)$  terdapat beberapa langkah yang mungkin dilakukan. Andaikan  $K_{n,i}$  dinotasikan sebagai langkah dalam tahap  $(n,i)$ , dan langkah  $k = 1,2,\dots,k_{n,i}$  dimana  $k_{n,i} = \{1,2,\dots,k_{n,i}\}$ .

Contoh :  $k_{2,1} = \{1,2,3\}$  dimana

Langkah 1 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,1)$

Langkah 2 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,2)$

Langkah 3 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,3)$

Secara umum, tahap dapat dibuat  $(n-1,j)$  dari tahap  $(n,i)$  diperoleh dari langkah sebelumnya, sehingga dapat dikenalkan fungsi transisi  $t$ , dan dituliskan  $j = t(n,i,k)$ .

Sehingga dari contoh di atas dapat kita peroleh  $j = k$ . Sehingga akan diperoleh Langkah 1 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,1)$ , Langkah 2 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,2)$ , Langkah 3 dinotasikan langkah dari  $(2,1)$  ke  $(1,3)$  dan seterusnya.

Kemudian juga dapat didefinisikan langkah  $(n,i)$  dengan langkah  $k$  sebagai  $r(n,i,k)$  yang disebut fungsi return. Sehingga dari contoh diperoleh

$$(2,1) \rightarrow (1,1) = r(2,1,1) = 4.$$

$$(2,1) \rightarrow (1,2) = r(2,1,2) = 6.$$

$$(2,1) \rightarrow (1,3) = r(2,1,3) = 2.$$

Nilai dari

$$v(2,1) = (2,1)_{\text{opt}} (0,1) = 2+2 = 4$$

$$v(2,2) = (2,2) \rightarrow (0,1) = 4+3 = 7$$

$$v(2,3) = (2,3)_{\text{opt}} (0,1) = 5+2 = 7$$

Dengan menggunakan notasi yang dikenalkan di atas maka dapat ditentukan solusi dari masalah  $v_{\text{opt}}$ . Berarti  $v(0,1) = 0$ . Dalam tahap 1 adalah  $(1,1),(1,2),(1,3)$  hanya terdapat satu langkah  $k = 1$ , yaitu

$$(1,1) \rightarrow (0,1) \text{ dan } v(1,1) = 3$$

$$(1,2) \rightarrow (0,1) \text{ dan } v(1,2) = 6$$

$$(1,3) \rightarrow (0,1) \text{ dan } v(1,3) = 2$$

Dilanjutkan tahap 2 adalah untuk  $(2,1)$ . Terdapat tiga nilai  $k = 1,2,3$  yang memberikan nilai

$$r(2,1,1) + v(1,1) = 4 + 3 = 7.$$

$$r(2,1,2) + v(1,2) = 6 + 6 = 12.$$

$$r(2,1,3) + v(1,3) = 2 + 2 = 4.$$

Pemilihan nilai di bawah nilai optimal adalah 4 untuk  $v(2,1)$ . Kita dapat kan metode untuk nilai optimal untuk langkah  $(2,1)$  dengan  $v(2,1) = \min [r(2,1,k) + v(1,k)]$ .  $k \in K_{2,1} = \{1,2,3\}$ .

#### **4. KESIMPULAN**

Berdasarkan pada pembahasan hasil-hasil yang diperoleh pada penelitian ini, maka diperoleh kesimpulan bahwa selain dengan konsep rekursif maju dan rekursif mundur masalah program dinamik juga dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep teori kendali. Bagi para peneliti selanjutnya, disarankan agar meneliti aplikasi

Teori Kendali ke bidang operasi riset yang lain. Selain itu juga dapat mengamati sifat-sifat dalam model matematika tersebut yaitu sifat keterkendalian, keteramatan dan juga sifat-sifat lainnya.

## **5.DAFTAR PUSTAKA**

- Hamdy, A. Taha, *Riset Operasi*, Departement of industrial Engineering university of Arkans.
- Wayne L. Winston 1982, *Operations Research*, Indiana university.
- Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control* .John Wiley & Sons. New York.
- Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design*, Madison AvenueNew York.
- Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.
- Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation*. The University of Texas at Arlington. New York.
- Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction*.Prentice Hall International, Inc.Philippines.
- Katsuhiko Ogata.1995.*Discrete-Time Control Systems*, 2 editions, Prentice-Hall International, INC.
- Murray R. Spiegel Statistic Schaum, 2 edition Renselaer. Polytechnic Institut Hartford.
- Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1 . Delft University of Technology. Netherlands.
- Perko, L., 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. Springer-Verlag, New York.
- Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation*.3 Editions, John Wiley & Sons. New York.
- Shety S.P and Thompson G.L 1985. *Optimal Control Theory : Applied to Management science and economics*. 2 editions.
- Stephen F.Love.1979. *Inventory Control*. McGraw-Hill International Book Company.Tokyo.