KONSTRUKSI SEMIGRUP REGULER DENGAN TRANSVERSAL INVERS IDEAL KUASI

Thresye dan Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Suatu transversal invers S^o dari semigrup reguler S disebut transversal invers ideal kuasi atau Q-transversal invers jika $S^oSS^o \subseteq S^o$ di mana S^o adalah ideal kuasi dari S. Misal S adalah semigrup reguler dengan dengan transversal invers S^o yang merupakan ideal kuasi dari S. Misal $R = \{x \in S : x^o x = x^o x^{oo}\}$ dan misal $L = \{a \in S : aa^o = a^{oo}a^o\}$, maka R dan L merupakan semigrup ortodoks dengan dengan transversal invers S^o yang merupakan ideal kanan dari R dan merupakan ideal kiri dari L. Dapat dikonstruksi semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi berbentuk $R|\times|L = \{(x,a) \in R \times L : x^o = a^o\}$.Jika dihubungkan dengan band, maka semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi berbentuk $R|\times|B = \{(x,e) \in R \times B : x^o x = e^o\}$

Kata Kunci: *Ideal kuasi, Semigrup regular. Transversal Invers, Q-Transversal invers*

1. PENDAHULUAN

Himpunan S yang dilengkapi dengan operasi biner $\circ$ disebut semigrup jika $(S,\circ)$ memenuhi sifat assosiatif, yaitu $(\forall x, y, z \in S)\,(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. Semigrup S disebut semigrup reguler, jika setiap elemennya adalah elemen reguler, yaitu untuk setiap $a \in S$ terdapat $x \in S$ sehingga $a = axa$. Elemen suatu semigrup belum tentu memiliki invers. Jika setiap elemen dari semigrup S mempunyai invers, yaitu jika untuk setiap $a \in S$ terdapat suatu elemen tunggal $a^{-1} \in S$ sehingga berlaku $a = aa^{-1}a$ dan $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$, maka S disebut semigrup invers.

Suatu subsemigrup invers S^o dari semigrup reguler S disebut transversal invers dari S jika S^o memuat dengan tunggal invers dari masing-masing elemen dalam S (Blyth dan McFadden ,1982). Invers tunggal dari $x \in S$ yang juga anggota S^o dinyatakan oleh x^o ; dan x^{oo} menyatakan $(x^o)^o = (x^o)^{-1}$. Semigrup reguler kemungkinan memiliki lebih dari satu transversal invers.

Menurut Saito Suatu Subset Q dari semigrup reguler S disebut kuasi ideal dari S jika $QSQ \subseteq Q$, sehingga transversal invers S^o dari semigrup reguler S disebut kuasi ideal jika $S^oSS^o \subseteq S^o$.

Semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi dibangun dari semigrup reguler, semigrup invers, semigrup ortodoks, dan band. Berdasarkan hal tersebut ingin dicari bagaimana cara konstruksinya dan bentuk semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sifat Dasar Semigrup

Suatu himpunan tak kosong *S* yang dilengkapi dengan suatu operasi biner disebut dengan grupoid. Jika opersi biner tersebut mempunyai sifat assosiatif, maka *S* disebut semigrup, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.1.1 (Clifford, 1961)

Grupoid S disebut semigrup jika operasi biner "$\circ$" bersifat asosiatif, yaitu $(\forall x, y, z \in S)(xy)z = x(yz)$.

Definisi 2.1.2 (Howie, 1976)

Diberikan S semigrup, $T \subseteq S$ *dan* $T \neq \varnothing$. *T disebut subsemigrup S jika memenuhi* $(\forall x, y \in T)\, xy \in T$.

2.2 Idempoten dan Band

Berikut akan diberikan definisi idempoten, yaitu :

Definisi 2.2.1 (Clifford, 1961)

Diberikan S semigrup dan $a \in S$ *memenuhi* $aa = a^2 = a$. *selanjutnya a disebut elemen idempoten. Jika setiap elemen dari semigrup S adalah idempoten, maka S dikatakan idempoten.*

Selanjutnya didefinisikan himpunan semua elemen idempoten dari suatu semigrup S yaitu $E(S) = \{a \mid a = aa \text{ dan } a \in S\}$. Berikut ini definisi band dan jenis-jenis band, serta definisi semilattice pada semigrup :

Definisi 2.2.2 (Clifford, 1961)

Semigrup S yang setiap elemennya adalah elemen idempoten disebut band.

Definisi 2.2.3 (Howie,1976)

Diberikan suatu band S dan $a, b, c \in S$

1. *S disebut rectangular band jika* $aba = a$;
2. *S disebut band normal kiri jika* $abc = acb$;
3. *S disebut band normal kanan jika* $abc = bac$;
4. *S disebut band normal jika* $abca = acba$.

Definisi 2.2.4 (Howie, 1976)

Semilattice adalah suatu grupoid $(S, \circ)$ *yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. *Komutatif, yaitu* $(\forall x, y \in S)\; x \circ y = y \circ x$;
2. *Assosiatif, yaitu* $(\forall x, y, z \in S)\; x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$;
3. *Idempoten, yaitu* $(\forall x \in S)\; x \circ x = x$.

2.3. Ideal dan Ideal Quasi

Berikut ini diberikan definisi ideal pada semigrup :

Definisi 2.3.1 (Clifford, 1961)

Diberikan S semigrup dan $A \subseteq S$ dengan $A \neq \varnothing$

1. *A disebut ideal kiri jika* $SA \subseteq A$;
2. *A disebut ideal kanan jika* $AS \subseteq A$;
3. *A disebut ideal jika A ideal kanan dan ideal kiri.*

Definisi 2.3.2 (McAlister&McFadden, 1982)
Himpunan bagian Q dari semigrup S, disebut quasi ideal jika $QSQ \subseteq Q$.

2.4. Semigrup Reguler

Semigrup reguler adalah semigrup yang setiap elemennya adalah elemen reguler. Berikut akan diberikan definisi semigrup reguler:

Definisi 2.4.1 (Howie,1976)
Diberikan semigrup S, elemen $a \in S$ *disebut reguler jika terdapat* $x \in S$ *sedemikian sehingga* $axa = a$. *Semigrup S disebut semigrup reguler jika setiap elemennya adalah elemen reguler*

2.5 Semigrup Invers

Suatu semigrup S dikatakan semigrup invers jika setiap elemen dari S mempunyai invers dengan tunggal dalam S. Berikut diberikan definisi dan teorema mengenai semigrup invers.

Definisi 2.5.1 (Howie,1976)
Diberikan semigrup S dan $a \in S$. *Suatu* $a' \in S$ *disebut invers dari* a *jika memenuhi* $aa'a = a$ *dan* $a'aa' = a'$.

Definisi 2.5.2 (Clifford, 1961)
Suatu semigrup S disebut semigrup invers jika untuk setiap $a \in S$ *terdapat suatu elemen tunggal* $a^{-1} \in S$ *sehingga berlaku* $a = aa^{-1}a$ *dan* $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$

2.6 Semigrup Ortodoks

Berikut ini definisi dari semigrup ortodoks dan beberapa sifat yang berkaitan dengan semigrup ortodoks:

Definisi 2.6.1 (Clifford, 1974)
Suatu semigrup S disebut semigrup ortodoks jika S semigrup reguler yang himpunan idempotennya membentuk sebuah subsemigrup. Kelas dari semigrup ortodoks adalah semigrup invers dan band.

Teorema 2.6.2 (Howie, 1976)
Jika S semigrup reguler maka pernyataan di bawah ini ekivalen:
(1) *S semigrup ortodoks*;
(2) *Untuk setiap* $a, b \in S$, *jika* a' *merupakan invers* a *dan* b' *merupakan invers dari* b, *maka* $b'a'$ *adalah invers dari* ab;
(3) *Jika e adalah idempoten maka setiap invers dari e adalah idempoten*.

2.7 Semigrup Reguler dengan Transversal Invers

2.7.1 Transversal Invers

Berikut definisi transversal invers dan beberapa sifat yang berkaitan dengan transversal invers :

Definisi 2.7.1.1(Saito, 1984)
Misal S adalah semigrup reguler, dan $E(S)$ *adalah himpunan idempoten dalam S. Suatu Subsemigrup invers* S^o *dari* S *disebut transversal invers dari* S, *jika* $|S^o \cap V(x)| = 1$ *untuk setiap* $x \in S$, *dengan* $V(x) = \{a \in S \mid xax = x \text{ dan } axa = a\}$.

Selanjutnya invers dari $x \in S$ dinotasikan dengan $x^o \in S^o$ dan x^{oo} menyatakan $(x^o)^o = (x^o)^{-1}$.

2.7.2 Sifat-Sifat Semigrup Reguler dengan Transversal Invers

Jika S adalah semigrup reguler dengan transversal invers S^o, maka diperoleh sifat-sifat berikut :

1. $R(S) \cap L(S) = S^o$, $I(S) \cap \Lambda(S) = E(S^o)$, $E(R(S)) = I(S)$, dan $E(L(S)) = \Lambda(S)$
2. Jika $I(S)$ $[\Lambda(S)]$ adalah subsemigrup dari S, maka $I(S)$ $[\Lambda(S)]$ adalah band reguler kiri [kanan] dengan transversal invers $E(S^o)$ dan $R(S)[L(S)]$ adalah subsemigrup invers kiri [kanan] dari S.
3. Jika S adalah semigrup invers kiri [kanan], maka $R(S) = \mathrm{S}$ $[L(S) = S]$ dan $I(S) = \mathrm{E(S)}$ $[\Lambda(S) = E(S)]$
4. S adalah isomorfik pada himpunan $\{(e,a) \in I(S) \times L(S), e^o = aa^o\}$ di bawah operasi perkalian $\{(e,a)(f,b) = (eaf(af)^o),(af)^{oo}(af)^o afb\}$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Kontruksi Semigrup Regular Dengan Transversal Invers Ideal Kuasi

Berikut ini teorema yang mendasari pengkontruksian semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi :

Teorema 3.1.1

Misal R dan L adalah semigrup reguler dengan transversal invers S^o. Andaikan bahwa S^o adalah ideal kanan dari R dan ideal kiri dari L. Misal $L \times R \to S^o$ didefinisikan oleh $(a,x) \to a * x$ untuk suatu $x, y \in R$ dan $a, b \in L$

1. $(a * x)y = a * xy$ dan $b(a * x) = ba * x$

2. $x \in S^o$ atau $a \in S^o$ maka $a * x = ax$

Ditentukan suatu perkalian pada himpunan $R|\times|L = \{(x,a) \in R \times L : x^o = a^o\}$ oleh $(x,a)(y,b) = (xx^o(a * y),(a * y)y^o b)$. Maka $R|\times|L$ adalah semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada S^o.

Berdasarkan Teorema 3.1.1, jika S semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi S^o dapat dikontruksikan semigrup reguler $R|\times|L$ dengan transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada S^o sebagai berikut :

1. Bentuk himpunan R dan L sesuai dengan (4.1) dan (4.2)
2. Definisikan $a * x = ax$ untuk setiap $a \in L$ dan $x \in R$.
3. Definisikan pemetaan $R|\times|L \to S$ dengan $(x,a) \mapsto xx^o a$, sedemikian sehingga $R|\times|L = S$

Berikut ini teorema yang mendasari pengkontruksian semigrup reguler transversal invers ideal kuasi, jika dihubungkan dengan suatu *band*.

Teorema 3.1.2

Misal R adalah semigrup dengan transversal invers ideal kanan S^o dan misal B adalah band dengan transversal invers ideal kiri E^o. Andaikan bahwa himpunan idempoten dari S^o termuat dalam E^o. Misal $B \times R \to S^o$ didefinisikan oleh $(e,s) \to e * x$ sedemikian sehingga , untuk setiap $x, y \in R$ dan untuk setiap $e, f \in B$

1. $(e*x)y = e*xy$ *dan* $f(e*x) = fe*x$

2. Jika $x \in E^o$ *atau* $e \in E^\circ$ *maka* $e*x = ex$

Ditentukan definisi perkalian pada himpunan $R|\times|B = \{(x,e) \in R \times B : x^o x = e^o\}$ *oleh* $(x,e)(y,f) = \left(x(e*x), \left[(e*y)^o(e*y)\right]f\right)$. *Maka* $R|\times|B$ *adalah semigrup reguler transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada* S^o.

Sebaliknya setiap semigrup reguler transversal invers ideal kuasi dapat dikontruksikan dengan cara tersebut.

Bukti :

Dari (1) dan (2) , Ambil $(x,e),(y,f),(z,g) \in R|\times|B,$ dapat dihitung

$$\left[x(e*y)^o\right]^o x(e*y) = (e*y)^o(e*y)$$
$$= \left\{\left[(e*y)^o(e*y)\right]f\right\}^o$$
$$[(x,e)(y,f)](z,g) = \left(x(e*y)(f*z), \left\{\left[(e*y)(f*z)\right]^o(e*y)(f*z)\right\}g\right)$$
$$= (x,e)[(y,f)(z,g)]$$

Jika $r,s \in S^o$, maka $(r, r^o r)(s, s^o s) = (rs, (rs)^o rs)$

Diberikan $(x,e) \in R|\times|B$ maka diperoleh

$x(e*x^o)x = x(e*x^o x) = x(e*e^o) = x(ee^o) = xe^o = x$,

dan $(e*x^o)x(e*x^o) = e^o(e*x^o) = e^o e*x^o = e*x^o$,

sehingga $e*x^o = x^o$.

Ini digunakan untuk membuktikan bahwa $(x^o, x^{oo}x^o)$ adalah invers dari himpunan $S^o|\times|E^o = \{(r, r^o r) : r \in S^o\}$ dari (x,e)

Selanjutnya, $R|\times|B$ adalah semigrup reguler yang memuat subsemigrup invers $S^o|\times|E^o$ yang isomorfik pada S^o, dan elemen dari $R|\times|B$ mempunyai invers yaitu $S^o|\times|E^o$.

Misal $(r, r^o r)$ adalah invers dari $S^o|\times|E^o$ dari $(x,e) \in R|\times|B.$ Maka diperoleh

$$(x,e) = (x,e)(r, r^o r)(x,e)$$
$$= \left(x(e*r)x, \left\{\left[(e*r)x\right]^o(e*r)x\right\}e\right)$$
$$(r, r^o r) = (r, r^o r)(x,e)(r, r^o r)$$
$$= \left(rx(e*r), \left[rx(e*r)\right]^o rx(e*r)\right)$$

Selanjutnya diperoleh $x = x(e*r)x$ dan $r = rx(e*r)$

Karena $e*r = e*rx(e*r) = (e*r)x(e*r)$,

sehingga $e*r = x^o$, dan karena

$x^o r^o = (e*r)r^o = e*rr^o = e(rr^o)$

Dengan $x^o r^o$ adalah idempoten dalam S^o, sehingga

$rx = (rx)^{oo} = (x^o r^o)^o = x^o r^o$

Selanjutnya diperoleh

$x^o = e*r = (e*r)r^o r = x^o r^o r = rxr = rxrx(e*r) = rx(e*r) = r$

Sehingga $S^o|\times|E^o$ adalah transversal invers dari $R|\times|B$.

Sebaliknya , diberikan S adalah semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi S^o. Misal $R = \{x \in S; x^o x = x^o x^{oo}\}$ dan misal $B = \{e \in S; e^o e = e\}$. Diberikan $R|\times|B \to S^o$ adalah pemetaan dengan definisi $(e,x) \mapsto e * x = ex$. Maka pemetaan memenuhi (1) dan (2). Selanjutnya dapat dikonstruksi semigrup $R|\times|B = \{(x,e) \in R \times B; x^o x = e^o\}$di bawah perkalian $(x,e)(y,f) = (xey,(ey)^o eyf)$

Ditentukan suatu pemetaan $\theta : R|\times|B \to S$ didefinisikan $(e,x) \to xe$. Maka untuk setiap $x \in S$ diperoleh $(xx^o x^{oo}, x^o x) \in R|\times|B$ dan $(xx^o x^{oo}, x^o x)\theta = xx^o x^{oo} x^o x = x$.

Untuk setiap $(x,e),(y,f) \in R|\times|B$ diperoleh

$$\begin{aligned}[(x,e)(y,f)]\theta &= (xey,(ey)^o eyf)\theta \\ &= xey(ey)^o eyf \\ &= xeyf \\ &= (x,e)\theta(y,f)\theta\end{aligned}$$

Dari Teorema 3.1.1 diketahui $(x,e)\theta = (y,f)\theta$ berlaku $x = y$ dan $e = f$. Akibatnya $R|\times|B = S$

Berdasarkan Teorema 3.1.2, jika S adalah semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi S^o, dikontruksikan semigrup reguler $R|\times|B$ dengan transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada S^o sebagai berikut :

1. Bentuk himpunan $R = \{x \in S; x^o x = x^o x^{oo}\}$ dan $B = \{e \in S; e^o e = e\}$
2. Definisikan pemetaan $R|\times|B \to S^o$ dengan definisi $(e,x) \mapsto e * x = ex$
3. Dikontruksikan semigrup $R|\times|B = \{(x,e) \in R \times B; x^o x = e^o\}$di bawah perkalian $(x,e)(y,f) = (xey,(ey)^o eyf)$
4. Dibentuk pemetaan $\theta : R|\times|B \to S$ yang didefinisikan $(e,x) \mapsto xe$, sedemikian sehingga $R|\times|B = S$

4. KESIMPULAN

1. Jika S semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi S^o dapat dikontruksikan semigrup reguler $R|\times|L$ dengan transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada S^o sebagai berikut :
   i. Bentuk himpunan R dan L sesuai dengan (4.1) dan (4.2)
   ii. Definisikan $a * x = ax$ untuk setiap $a \in L$ dan $x \in R$.
   iii. Definisikan pemetaan $R|\times|L \to S$ dengan $(x,a) \mapsto xx^o a$, sedemikian sehingga $R|\times|L = S$
2. Jika S adalah semigrup reguler dengan transversal invers ideal kuasi S^o, dikontruksikan semigrup reguler $R|\times|B$ dengan transversal invers ideal kuasi yang isomorfik pada S^o dan B suatu *band* sebagai berikut :
   i. Bentuk himpunan $R = \{x \in S; x^o x = x^o x^{oo}\}$ dan $B = \{e \in S; e^o e = e\}$

ii. Definisikan pemetaan $R|\times|B \to S^o$ dengan definisi $(e,x) \mapsto e * x = ex$

iii. Dikontruksikan semigrup $R|\times|B = \{(x,e) \in R \times B; x^o x = e^o\}$ di bawah perkalian $(x,e)(y,f) = (xey,(ey)^o eyf)$

iv. Dibentuk pemetaan $\theta : R|\times|B \to S$ yang didefinisikan $(e,x) \mapsto xe$, sedemikian sehingga $R|\times|B = S$

5. DAFTAR PUSTAKA

Clifford,A.H,Preston,G.B.,1961, The Algebraic Theory of Semigroup, Mathematical Surveys, No.7 Vol.1, *American Matematical Society Providence*, RI.

Howie, J.M., 1976, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, New York.

Saito, T., 1985, Structure of regular semigroups with a quasi-ideal inverse transversals, *Semigroup Forum* 31, 305-309.

Saito, T., Relationship between the inverse transversals of regular semigruops, *Semigroup Forum* 33, 245-250, 1986.

Saito, T., A note on regular semigroups with inverse transversals, *Semigroups Forum* , 33, 149-152, 1986.

Zhu, F., 1999, Regular semigroups with a left Ideal Inverse Transversal, *Southeast Asian Buletin of Mathematics* 23, 743-749,