Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.2 (Desember 2018) Hal. 52-60

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* BERDASARKAN DERAJAT MINIMUM PADA GRAF

Widya Anggraini, M.Mahfuzh Shiddiq, Pardi Affandi
Program Studi Matematika
Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Banjarbaru 70714, Kalsel
Email: pedrosista.liverpudlian@gmail.com

ABSTRACT

Graph $G = (V, E)$ consists of 2 sets, that are the not empty set V and set E which are the elements of V are called vertex and the elements of E are called edge. The number of edges which are connected with vertex V is called the degree and minimum of the number of edges which connected with vertex V on graph G is called minimum degree $(\delta(G))$. One of the topics studied in the coloring of the graph is the rainbow connection. Coloring edge in G is called rainbow connected if every two distinct vertices are connected by a rainbow path. Rainbow connection numbers of a G connected graph which is written with $rc(G)$ is the minimum of the number of colors needed to make G to rainbow connected. The purpose of this study is to prove the rainbow connection numbers in the graph is based on minimum degree of graph. In this paper, we search rainbow connected numbers for 2-connected graphs and 2-connected graph that does not contains a bridge. Finally, the result of those two graph is used to searching for rainbow connected numbers of graphs with a minimum degree of 3 The result of this research is for a connected graph G, if it has $\delta \geq 3$ then it has rainbow connection numbers more than $5n/6$.
Keywords : graph, degree, rainbow connection numbers.

ABSTRAK

Graf $G = (V, E)$ terdiri dari 2 himpunan yaitu himpunan tak kosong V dan himpunan E yang mana elemen V disebut titik dan elemen E disebut sisi. Banyaknya sisi yang berhubungan dengan titik V disebut derajat dan minimum dari banyaknya sisi yang berhubungan dengan titik V pada graf G disebut derajat minimum $(\delta(G))$. Salah satu topik yang dipelajari dalam pewarnaan pada graf adalah *rainbow connection.* Pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh lintasan *rainbow.* Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G ditulis $rc(G)$ yaitu minimum dari banyaknya warna yang diperlukan untuk membuat G bersifat *rainbow connected.* Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan *rainbow connection* dalam graf berdasarkan derajat minimumnya. Penelitian dilakukan dengan cara mencari bilangan *rainbow connected* untuk graf 2-terhubung. Langkah berikutnya dicari juga untuk kasus graf 2-terhubung yang tidak memuat jembatan. Tahap terakhir dari dua dua graf tersebut dilakukan pencarian bilangan rainbow connected untuk graf dengan derajat minimum 3. Hasil dari penelitian ini adalah untuk graf terhubung G, jika memiliki $\delta \geq 3$ maka memiliki bilangan *rainbow connection* lebih dari $5n/6$.
Kata Kunci :graf, derajat, bilangan *rainbow connection*.

1. PENDAHULUAN

Pencarian bilangan rainbow connected muncul pertama kali dikenalkan oleh Chartand [2]. Sebuah pewarnaan sisi pada suatu graf dengan syarat pada suatu lintasan tidak ada ada yang berwarna sama. Penelitian di kasus ini dapat dilihat diberbagai sudut pandang, diantaranya dilihat dari graf komplemennya (Li dkk. [8]), dilihat dari jari-jari graf (Basavaraju dkk. [10]).

Pada penelitian akan dicari bilangan rainbow connected dilihat dari sudut pandang derajat minimum suatu graf. Tulisan ini merupakan kajian ulang dari penelitian Caro [9]. Graf pada tulisan ini adalah graf berhingga, tak berarah dan sederhana.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut adalah beberapa definisi dan hasil-hasil yang dijadikan acuan pada pembahasan yang berkaitan dengan graf rainbow connected.

Definisi 2.1 [4]
Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial didefinisikan suatu pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$ dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Misalkan P adalah lintasan $u - v$ di graf G, P disebut lintasan rainbow jika dan hanya jika untuk sebarang dua sisi di P tidak memiliki warna yang sama.

Definisi 2.2 [4]
Bilangan rainbow connection dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$ didefinisikan sebagai minimum dari banyaknya warna yang diperlukan untuk membuat G bersifat rainbow connected.

Lemma 2.3 [4]
Jika G merupakan graf terhubung tak trivial dengan banyaknya sisi m, maka $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ dimana $diam(G)$ merupakan diameter pada G.

Teorema 2.4 [4]
Misalkan G merupakan graf terhubung tak trivial yang berukuran m.
a) $rc(G) = src(G) = 1$ *jika dan hanya jika graf G merupakan graf lengkap,*
b) $rc(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $src(G) = 2$.

Lemma 2.5 [9]
Jika G adalah graf terhubung dan $H_1, \ldots, H_k$ adalah partisi dari himpunan titik pada G ke dalam subgraf terhubung, maka $rc(G) \leq k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(H_i)$

Teorema 2.6 [4]
Untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$, maka $rc(C_n) = src(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

3. METODOLOGI

Penelitian dilakukan dengan menentukan terlebih dahulu bilangan rainbow connected dari graf 2-terhubung. Selanjutnya, peneltian juga mencari bilangan rainbow connected untuk graf 2-terhubung yang tidak memuat jembatan. Hasil dari bilangan rainbow connected dua graf tersebut dijadikan landasan pada pencarian bilangan *rainbow connected* graf dengan derajat minimum 3.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Bilangan *Rainbow Connection* pada graf 2-terhubung

Proposisi 4.1.1

Jika G adalah sebuah graf 2-terhubung dengan n titik maka $rc(G) \leq \frac{2n}{3}$

Bukti :
Karena G adalah graf 2-terhubung sehingga jika G adalah sebuah graf C_5, yang dalam hal ini merupakan graf 2-terhubung dengan 5 titik, maka berdasarkan definsi 2.2 diketahui $rc(G) = 3$ sehingga Proposisi 4.1.1 berlaku dikasus ini. Misalkan H adalah sebuah subgraf maksimal terhubung dari G yang memiliki sifat

$$rc(H) \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3}$$

dengan h sebagai banyaknya titik di H. Akan ditunjukkan bahwa H ada.

Kasus 1.
Jika G mempunyai subgraf berupa segitiga (C_3) maka H adalah subgraf berbentuk segitiga tersebut. Sehingga diperoleh

$$rc(H) = 1 \leq \frac{2(3)}{3} - \frac{2}{3}$$

$$rc(H) = 1 \leq 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Kasus 2.
Jika G mempunyai sebarang subgraf berupa C_k, dengan $k \geq 4$ dan $k \neq 5$ maka H adalah subgraf C_k tersebut sehingga berdasarkan teorema 2.6 diperoleh

$$rc(H) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \frac{2k}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2(k-1)}{3}$$

Kasus 3.
Jika setiap subgraf G berupa C_5 maka H adalah subgraf C_5 tersebut yang ditambah satu sisi.
Pada pembahasan diawal Proposisi 4.1.1 diketahui jika C_5 memiliki $rc(G) = 3$ dan jika C_5 ditambah dengan satu sisi diperoleh $rc(H)$ tetap yaitu $rc(H) = 3$, sehingga diperoleh $rc(H) = 3$.

$$rc(H) \leq \frac{2k}{3} - \frac{2}{3}$$

$$rc(H) = 3 \leq 4 - \frac{2}{3}$$

Akan ditunjukkan bahwa $h \geq n - 2$. Diasumsikan bahwa ada tiga titik di luar H, misalkan x_1, x_2, x_3 dimana setiap titik mempunyai dua tetangga di H (dimana tetangga x_i tidak harus berbeda dengan tetangga x_j). Selanjutnya di titik x_1, x_2, x_3 ditambahkan ke H dan membentuk sebuah subgraf H' dengan h + 3 titik. Misalkan e_i dan f_i adalah dua sisi yang menghubungkan x_i dengan H dan hanya digunakan 2 warna baru untuk mewarnai 6 sisi baru yaitu sisi-sisi e_1, e_2, e_3 memiliki warna yang sama dan sisi-sisi f_1, f_2, f_3 memiliki warna yang sama. Sehingga diperoleh

$$rc(H') \leq rc(H) + 2 \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2(h+3)}{3} - \frac{2}{3}$$

sehingga berdasarkan definisi komponen graf, kontradiksi dengan pernyataan bahwa *H* merupakan subgraf maksimal. Hal ini menunjukkan bahwa jika terdapat tiga titik diluar *H* maka setidaknya terdapat satu titik, misalkan *x*, memiliki sifat bahwa untuk sebuah lintasan terpendek dari *H* ke H' yang melalui *x* mempunyai panjang setidaknya 3 (lintasan harus merupakan graf 2-terhubung.
Oleh karena itu, misalkan $a, x_i, \dots, b$ dimana $a, b \in H$ membentuk sebuah lintasan dengan $x_1, \dots, x_t \notin H$ dan $t \geq 2$. Hubungkan $x_1, \dots, x_t$, ke H dan membentuk sebuah subgraf H' dengan h + t titik. Jika t ganjil, maka dapat diberikan warna pada t + 1 sisi dari lintasan dengan $\frac{t+1}{2}$ warna baru. Setengah pertama dari lintasan berwarna berbeda, dan setengah kedua lainnya diberikan warna dengan urutan yang sama dengan setengah yang pertama. Ini membuktikan bahwa H' adalah *rainbow connected*. Jika t genap, maka dapat diwarnai t + 1 sisi dari lintasan dengan $\frac{t}{2}$ warna sebagai berikut; Sisi tengah($X_{t/2}, X_{\frac{t}{2}+1}$) memiliki beberapa warna yang sudah ada di *H*. Pada sisi $\frac{t}{2}$ pertama dari lintasan memiliki warna baru yang berbeda dan di sisi $\frac{t}{2}$ terakhir dari lintasan diwarnai berulang dengan warna dan urutan yang sama. Karena H' adalah subgraf dari graf *H* yang dihubungkan dengan t titik di luar *H* dan lintasannya diberikan $\frac{t}{2}$ warna di awal dan berulang sampai akhir lintasan, maka diperoleh

$$rc(H') \leq rc(H) + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3} + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \leq \frac{2(h+t)}{3} - \frac{2}{3}$$

kontradiksi dengan pernyataan bahwa *H* subgraf maksimal. Jadi haruslah $h \geq n - 2$ maka terbukti $rc(G) \leq \frac{2(n-3)}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2n}{3}$. ■

4.2 Bilangan *Rainbow connection* pada graf 2-terhubung tanpa jembatan

Proposisi 4.2.1

Jika G adalah sebuah graf 2-terhubung tanpa jembatan dengan n titik maka $rc(G) \leq \frac{4n}{5} - 1$

Bukti :
Pertama tinjau kasus dimana G adalah graf 2-terhubung. Maka berdasarkan Proposisi 4.1.1 diketahui bahwa G memiliki $rc(G) \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ dan akan dicari nilai *n* dari graf *G* yang memenuhi $rc(G) \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \leq \frac{4n}{5} - 1$

$$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{4n}{5} - 1 \right\rfloor$$

$$\lfloor 15 \leq 12n - 10n \rfloor$$

$$\lfloor 7{,}5 \rfloor \leq n$$

$$7 \leq n$$

Berdasarkan pembahasan di atas diketahui bahwa graf G yang memiliki $rc(G) \leq \frac{[2n]}{3} \leq \frac{4n}{5} - 1$ adalah graf G yang memiliki $n \geq 7$. Graf 2-terhubung adalah graf *cycle* yang diketahui dari Lemma 2.5 memiliki $rc(G) \leq n - 2$ sehingga akan dicari nilai n yang memenuhi $n - 2 \leq \frac{4n}{5} - 1$

$n - 2 \leq \left\lfloor \frac{4n}{5} - 1 \right\rfloor$

$5n - 10 \leq 4n - 5$

$5n - 4n \leq -5 + 10$

$n \leq 5$

Berdasarkan pembahasan di atas diketahui bahwa graf G yang memiliki $rc(G) \leq n - 2 \leq \frac{4n}{5} - 1$ adalah graf G yang memiliki $n \leq 5$, yaitu $n = 3,4,5$. Graf dengan $n = 1$ dan $n = 2$ tidak termasuk karena bukan merupakan graf 2-terhubung. Sehingga berdasarkan pembahasan di atas maka kasus yang tersisa hanya jika $n = 6$ dan akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \leq 3$ dalam kasus ini.

Kasus 1

Jika *cycle* terpanjang dari G memiliki panjang 6 maka $rc(G) \leq 3$.
Diketahui $n = 6$ sehingga diperoleh,

$$rc(G) \leq \left\lfloor \frac{4n}{5} - 1 \right\rfloor$$

$$rc(G) \leq \lfloor 3{,}8 \rfloor$$

$$rc(G) \leq 3$$

Berdasarkan pembahasan di atas maka terbukti jika graf G dengan $n = 6$ memiliki $rc(G) \leq 3$.

Kasus 2

Jika *cycle* terpanjang memiliki panjang 5 maka G adalah graf C_5 dan titik berderajat 2 lain yang bertetangga adalah 2 titik yang tidak berdekatan di *cycle*. Diketahui bahwa jika graf *cycle* dengan panjang 5 memiliki $rc(G) = 3$ sehingga walaupun ditambah dengan satu titik tetap memiliki $rc(G) = 3$.

Kasus 3

Jika *cycle* terpanjang memiliki panjang 4 maka G adalah $K_{2,4}$ yang memiliki $rc(G) = 2$.

Bukti:

Diketahui bahwa graf $K_{2,4}$ adalah graf *cycle* yang mempunyai panjang 4, yaitu: (V_3,V_1,V_4), (V_1,V_4,V_2), (V_1,V_5,V_2) dan (V_1,V_6,V_2) serta memiliki $rc(G) = 2$. Ini juga membuktikan bahwa graf dengan n = 6 memiliki panjang paling sedikit 4.
Setelah membuktikan proposisi graf 2-terhubung akan dibuktikan graf terhubung tanpa jembatan pada banyaknya komponen dari graf 2-terhubung. Misalkan X adalah kumpulan titik dari komponen graf 2-terhubung G sehingga X hanya terdiri dari satu titik potong, misalkan x (dianggap bahwa komponen graf 2-terhubung selalu ada). Misalkan subgraf H dari G terbentuk dari $V(G) \backslash X) \cup \{x\}$. Sehingga

diketahui bahwa subgraf H memiliki $n - |X| + 1$ titik dan terhubung, tanpa jembatan dan memiliki paling tidak satu komponen 2-terhubung. Berdasarkan hipotesis maka diperoleh

$$rc(H) \leq \frac{4(n - |X| + 1)}{5} - 1$$

Karena graf G adalah graf yang terbentuk dari subgraf *H* dan *X* maka

$$rc(G) \leq rc(X) + rc(H)$$

Sehingga diperoleh

$$rc(G) \leq \frac{4n}{5} - 2 + \frac{4}{5} < \frac{4n}{5} - 1 \qquad \blacksquare$$

4.3 Bilangan *rainbow connection* pada graf dengan $\delta \geq 3$

Teorema 4.3.1

Jika G adalah sebuah graf terhubung dengan n titik dan $\delta \geq 3$ *maka* $rc(G) < 5n/6$

Bukti:
Diberikan sebuah graf terhubung *G = (V,E)* dengan *n* titik dan memiliki derajat minimum paling sedikit 3. Dimisalkan $B \subset E$ adalah himpunan dari jembatan-jembatan di *G*. Jika $B = \emptyset$ maka graf *G* adalah graf tanpa jembatan sehingga berdasarkan Proposisi 4.2.1 diketahui graf *G* memiliki $rc(G) \leq \frac{4n}{5} - 1$. Selanjutnya jika $B \neq \emptyset$. Misalkan $\mathcal{C}$ adalah himpunan dari komponen-komponen terhubung dari graf $G' = (V, E\backslash B)$. Karena G memiliki $\delta \geq 3$ maka $\mathcal{C}$ juga memiliki $\delta \geq 3$ sehingga $\mathcal{C}$ memiliki titik paling sedikit 4. Misalkan $G' = (V, E\backslash B)$ dan *C* adalah himpunan komponen terhubung dari G' dan karena C pada G' tidak mempunyai jembatan maka minimal anggota C adalah 2 yaitu *singleton* dan subgraf terhubung tanpa jembatan. Misalkan $S \subset \mathcal{C}$ adalah *singleton* dan $\mathcal{D} = \mathcal{C}\backslash S$.

Selanjutnya dibangun sebuah graf pohon berakar *T* yang simpul-simpulnya merupakan elemen dari $\mathcal{C}$ yang menggunakan cara rekusif berikut :

1) Akar dari *T* diambil dari sebarang elemen di $\mathcal{C}$.
2) C adalah titik-titik yang ada di *T*
3) Anak-anak dari titik C merupakan semua elemen dari $\mathcal{C}$ yang dapat dicapai dari C melalui satu jembatan, selain orang tua C di *T*
4) Daun-daun dari *T* adalah titik-titik yang tidak mempunyai anak.
5) Urutkan anak-anak dari titik C dari kiri ke kanan dan untuk anak paling kiri dinotasikan sebagai $\ell(C)$ dan anak paling kanan dinotasikan $r(C)$
6) L(C) merupakan daun paling kiri di *subtree T* yang berakar di C

Misalkan $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ adalah himpunan dari daun-daun di *T*. Diketahui bahwa $\mathcal{L}$ adalah sebuah subset dari $\mathcal{D}$. Karena masing-masing singleton di S memiliki

$\delta \geq 3$ maka menunjukkan bahwa $s \in S$ memiliki paling sedikit dua anak di T, sehingga $\ell(s) \neq r(s)$. Akibatnya, karena setiap s memiliki anak paling sedikit 2 berarti T memiliki paling sedikit 2 daun untuk setiap s di T sehingga diketahui bahwa banyaknya s di T kurang dari banyaknya daun di T sehingga diperoleh $|S| \leq |\mathcal{L}|$.

Selanjutnya, dengan alasan yang sama dimana setiap s memiliki anak paling sedikit 2 sehingga setiap s tidak mungkin memiliki anak yang sama, sehingga diketahui bahwa setiap pasang anak yaitu $\ell(s)$ dan $r(s)$ hanya memiliki satu orangtua sehingga $s_1 \neq s_2$. Karena $s_1 \neq s_2$ maka $L(r(s_1)) \neq L(r(s_2))$ sehingga berdasarkan definisi pemetaan diketahui bahwa pemetaan $\mathcal{S} - \mathcal{L}$ adalah satu-satu sehingga $\mathcal{S} \to \mathcal{L}(r(s))$ injektif.

Selanjutnya karena masing-masing *singleton* memiliki $\delta \geq 3$ maka elemen dari $\mathcal{L}$ terdiri paling sedikit oleh empat titik. Jika $X \in \mathcal{L}$ maka X adalah sebuah subgraf terhubung tanpa jembatan dari G yang terhubung hanya dengan satu jembatan. Setiap titik dari X selain yang terhubung dengan jembatan memiliki semua tetangganya di X, dan karena G memiliki derajat minimum paling sedikit 3, maka $|X| \geq 4$.

Selanjutnya $\mathcal{S}$ yang memiliki $L\big(r(s)\big)$ yaitu daun yang terdapat pada anak yang terletak di paling kanan dipartisi menjadi 2 bagian, $\mathcal{S}'$ dan $\mathcal{S}''$ dimana $\mathcal{S}'$ adalah semua singleton s dari $L(r(s))$ yang memiliki kardinalitas 4, dan $\mathcal{S}''$ adalah semua singleton s dari $L(r(s))$ yang mempunyai kardinalitas paling sedikit 5.

Diketahui bahwa banyaknya singleton pada X diperoleh dari S' yaitu partisi yang terdiri dari 4S, dan S'' yaitu partisi yang terdiri dari 5S yaitu 4S yang ditambah dengan S (orang tua dari $L(r(s))$) serta S (akar dari subgraf X). Karena S merupakan akar dari subgraf X maka S juga merupakan bagian dari S' dan S'' sehingga

$|S| + 4|S'| + 5|S"|$

$= |S'| + |S''| + 4|S'| + 5|S''|$

$= 5\,|\,S'\,| + 6\,|\,S"\,| \leq n$ ……. (1)

Selanjutnya warnai E dengan warna yang membuat G menjadi *rainbow connected*. Setiap sisi dari masing-masing elemen $X \epsilon D$ diwarnai dengan $\frac{4|X|}{5} - 1$. Kemudian warnai jembatan yang menghubungkan X dengan orangtuanya di T (kecuali jika X adalah akar dari T) dengan menggunakan satu warna. Karena jembatan yang menghubungkan X dengan orangtuanya harus memiliki warna yang berbeda maka warnai X dan jembatan yang menghubungkan dengan orangtuanya di T menggunakan $\frac{4|X|}{5}$. Demikian juga, untuk setiap $s \epsilon S$ diberikan warna untuk jembatan yang menghubungkan s ke orangtuanya di T (kecuali jika X adalah orangtua dari T) dengan satu dedikasi warna.

Diketahui $|S|$ adalah banyaknya titik pada S dan $\sum|X|$ adalah banyaknya titik pada subgraf terhubung di G. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}|S| - 1 + \tfrac{4}{5}\textstyle\sum X &= |S| - 1 + \tfrac{4}{5}(n - |S|)\\ &= |S| - 1 + \tfrac{4}{5}n - \tfrac{4}{5}|S|\\ &= \tfrac{4}{5}n + \tfrac{1}{5}|S| - 1\end{aligned}$$

Ingat bahwa setidaknya terdapat $|S'|$ elemen dari $\mathcal{D}$ yang memiliki kardinalitas 4. Karena graf 2-terhubung dengan kardinalitas $|X| = 4$ dapat menjadi *rainbow connected* hanya dengan menggunakan dua warna, maka tidak perlu menggunakan $\frac{4|X|}{5} - 1$ warna pada kasus ini, sebaliknya hanya menggunakan $\frac{4|X|}{5} - \frac{6}{5}$ warna, yang menghemat tambahan $\frac{1}{5}$ dalam perhitungan setidaknya $|S''|$ kali. Sehingga

$$rc(G) \le \frac{4}{5}n + \frac{1}{5}|S''| - 1$$

Dengan persamaan (1), maka
$|S''| \le \frac{n}{6}$. Sehingga $rc(G) < \frac{5n}{6}$ terbukti. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika G adalah graf 2-terhubung dengan n titik maka $rc(G) \le 2n/3$
2. Jika G adalah graf 2-terhubung tanpa jembatan dengan n titik maka $rc(G) \le \frac{4n}{5} - 1$.
3. Jika G adalah graf terhubung dengan n titik dan memiliki $\delta \ge 3$ maka $rc(G) < 5n/6$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] B. Bolloba´s,.1978. *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London.

[2] Chartrand,G., dkk. 2008. *Rainbow Connection in graph*. *Mathematica Bohemica*.133: 85-98.

[3] Diestel, R. 2005. *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg. New York

[4] Gross, J.L., J. Yellen, & P. Zhang. 2014. *Handbook Of Graph Theory*. Taylor & Francis Group, LLC.

[5] J.A.Bondy dan U.S.R.Murty. 2008. *Graph Theory,GTM244*. Springer. New York.

[6] Munir.R. 2005. *Metode Diskrit. Edisi ke-3*. Informatika, Bandung.

[7] Skiena,S.1990. *Implementing Discrete Mathematics:Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*.Cambridge University Press.

[8] X.Li & Y. Sun. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer Briefs In Mathematics, New York.

[9] Y.Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, R. Yuster. 2008. *On rainbow connection, Electronic J. Combin, 15, R57.*

[10] Basavaraju, M., Chandran, L.S., Rajendraprasad, D. and Ramaswamy, A., 2010. Rainbow connection number and radius. arXiv preprint arXiv:1011.0620.