

MODEL MATEMATIKA KOMENSALISME ANTARA DUA SPESIES DENGAN SUMBER TERBATAS

Friska Erlina, Yuni Yulida, Faisal

*Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani. Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
Email: friska_erlina12@yahoo.com*

ABSTRACT

ABSTRACT. Commensalism term used to describe the symbiotic relationship, one organism to eat foods that are not exploited by others. In a commensalism model, population is divided into two subpopulations: the subpopulation of commensal species and the subpopulation of host species. This model is one of them describes the relationship between who is remora fish and shark, which the remora fish as commensal species or species that benefit from the presence of host species, while the shark as host species or species who does not get a profit or loss. In commensal species food sources and places to live are limited in the host species. Commensalism model of two species is a differential equation system first order nonlinear. One way to determine the solution to use a numerical approach. This study aims to explain the formation of a commensalism model between the two species, determine the equilibrium and stability of the system in equilibrium, determine the solution of the model using numerical approach and create simulation model.

Commensalism model two species can be written as follows:

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1K_1 - a_{11}N_1^2 + a_{11}CN_1N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2K_2 - a_{22}N_2^2$$

In the model there are four commensalism equilibrium point is $(0, 0)$, $(K_1, 0)$, $(0, K_2)$ and (K_1+CK_2, K_2) . The stability of the system at the equilibrium point at commensalism models is $(0, 0)$ unstable and type of equilibrium point is a node point, $(K_1, 0)$ and $(0, K_2)$ unstable and type of equilibrium point is a saddle point, and (K_1+CK_2, K_2) is asymptotically stable and type of equilibrium point is a node point. Solution approach to the variation t (time) to N_1 (a subpopulation of commensal species) and N_2 (a subpopulation of host species) in the commensalism model two species can be calculated numerically using the Runge-Kutta method fourth order for the initial value and some parameter values are known.

Key words: *two species commensalism model, equilibrium point, stability, Runge-Kutta fourth order method.*

1. PENDAHULUAN

Komensalisme berarti “bersama-sama pada satu meja”. Istilah ini digunakan untuk menggambarkan hubungan simbiosis, yaitu satu organisme memakan makanan yang tidak dimanfaatkan oleh yang lain. Hubungan antara remora dengan ikan hiu merupakan contoh yang khas. Sirip dorsal remora berubah menjadi alat pengisap yang dipakai untuk melekatkan diri pada ikan hiu. Ikan hiu tersebut tidak merasa terganggu oleh hal ini, dan tidak mencoba

memangsa remora. Bila ikan hiu makan, remora dapat menangkap sisa-sisa makanan ikan hiu tersebut [9]

Pada model komensalisme populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi spesies komensal dan subpopulasi spesies inang. Model ini salah satunya menggambarkan hubungan antara ikan remora dan ikan hiu, dimana ikan remora sebagai spesies komensal atau spesies yang diuntungkan dengan kehadiran spesies inang, sedangkan ikan hiu sebagai spesies inang atau spesies yang tidak mendapatkan keuntungan atau kerugian. Pada spesies komensal sumber makanan dan tempat tinggalnya terbatas pada spesies inang. Model komensalisme dua spesies ini merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu. Solusi eksak sistem persamaan diferensial nonlinier dapat juga ditentukan dengan menggunakan pendekatan numeric. [11]

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan bersifat studi literatur. Prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah mengumpulkan dan mengkaji bahan-bahan yang berkaitan dengan penelitian, menentukan asumsi-asumsi yang sesuai untuk model, menjelaskan terbentuknya model, menentukan titik ekuilibrium model, menentukan kestabilan titik ekuilibrium pada model, menentukan solusi numerik, membuat simulasi sistem dengan beberapa parameter dan membuat kesimpulan penelitian.

3. TINJAUAN PUSTAKA

3.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang memuat fungsi yang tidak diketahui dan turunan-turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa untuk orde satu dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

dengan x sebagai variabel bebas dan y sebagai variabel yang tidak bebas dan $f(x, y)$ dapat berupa fungsi linier maupun nonlinier [8]

3.2 Sistem Persamaan Diferensial NonLinier

Bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier orde-1 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

n merupakan fungsi dari $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sehingga $dx_j(t) / dt = f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Persamaan (2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3)$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ dan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$ [6]

3.3 Model Lotka-Volterra Dua Spesies

Model Lotka-Volterra dimodelkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Model ini sering digunakan untuk menggambarkan dinamika sistem biologis dengan dua spesies berinteraksi, satu pemangsa dan satu mangsa. Model ini menggambarkan evolusi pemangsa dan mangsa pada populasi ikan di laut Adriatik.

Pada model ini, X_1 dinyatakan sebagai populasi mangsa dan X_2 dinyatakan sebagai populasi pemangsa. Diasumsikan bahwa tidak ada persaingan antar individu dalam spesies, maka laju pertumbuhan dari populasi mangsa yaitu $\frac{dX_1}{dt} = a$. Nilai $a > 0$ karena populasi mangsa mempunyai persediaan makanan

berlebihan dan karena itu jumlah mangsa bertambah banyak. Kehadiran pemangsa memungkinkan terjadinya kerugian bagi populasi mangsa yang menyebabkan laju pertumbuhan populasi mangsa menurun, sehingga dapat dinyatakan sebagai $\frac{dX_1}{dt} = a - bX_2$. Laju pertumbuhan populasi pemangsa juga akan menurun tanpa

hadirnya populasi mangsa karena populasi pemangsa tidak mempunyai persediaan makanan (mangsa), yang dituliskan dalam bentuk $\frac{dX_2}{dt} = -c$. Kehadiran mangsa

akan menyebabkan laju pertumbuhan populasi pemangsa meningkat yaitu $\frac{dX_2}{dt} = -c + dX_1$. Berdasarkan asumsi di atas, maka model mangsa-pemangsa

Lotka-Volterra dapat diberikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= (a - bX_2)X_1 \\ \frac{dX_2}{dt} &= (-c + dX_1)X_2 \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $a, b, c, d > 0$ [2]

3.4 Titik Ekuilibrium dan Kestabilan Sistem

Definisi 3.4.1 [7]

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik ekuilibrium) persamaan (3) jika $f(t, \hat{x}) = \mathbf{0}$.

Matriks Jacobian persamaan (3) untuk dua peubah di titik ekuilibrium (\hat{x}) adalah sebagai berikut:

$$J(\hat{x}) = J(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

[4]

Berikut diberikan tabel stabilitas sistem linier untuk menentukan kestabilan sistem di titik ekuilibrium dan tipe titik ekuilibrium.

Tabel 1. Stabilitas Sistem Linier [13]

Nilai eigen	Tipe Titik Ekuilibrium	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Sadel	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a > 0$ $a < 0$	Spiral	Tidak stabil Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm ib$ (Pure Imajiner)	Center	Stabil tetapi tidak stabil asimtotik

3.5 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode Runge-Kutta orde empat adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ yang diketahui dengan menggunakan persamaan umum :

$$y_{n+1} = y_n + h/6 [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (6)$$

dimana :

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + 1/2 h, y_n + 1/2 h.k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + 1/2 h, y_n + 1/2 h.k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h.k_3)$$

Langkah pertama: Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode Runge-Kutta orde empat adalah mencari nilai h dan mencari nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 , dimana $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 merupakan slope.

Langkah kedua: Melakukan iterasi untuk mencari nilai y_{n+1} dengan persamaan (6)

[10]

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Komensalisme Dua Spesies dengan Sumber Terbatas

Adapun asumsi-asumsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Subpopulasi spesies komensal dan subpopulasi spesies inang merupakan spesies yang berbeda.
2. Tanpa adanya kompetisi, maka laju pertumbuhan subpopulasi spesies komensal maupun spesies inang akan tumbuh secara logistik.
3. Pada subpopulasi spesies komensal sumber makanan dan tempat tinggal terbatas pada subpopulasi spesies inang, sehingga menyebabkan terjadi interaksi antara spesies komensal dan spesies inang.
4. Subpopulasi spesies komensal akan mendapatkan keuntungan berupa makanan dari spesies inang.
5. Subpopulasi spesies inang tidak mendapatkan keuntungan atau kerugian dari kehadiran spesies komensal.

Dari asumsi-asumsi dan uraian di atas, dapat dibentuk model Komensalisme sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1K_1 - a_{11}N_1^2 + a_{11}CN_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2K_2 - a_{22}N_2^2\end{aligned}\quad (7)$$

dimana a_{11} (Laju pertumbuhan alami subpopulasi spesies komensal terhadap waktu t), a_{22} (Laju pertumbuhan alami subpopulasi spesies inang terhadap waktu t), K_1 (Kapasitas batas subpopulasi spesies komensal), K_2 (Kapasitas batas subpopulasi spesies inang), C (Koefisien komensalisme).

4.2 Titik Ekuilibrium dan Kestabilan Model

Titik ekuilibrium pada model komensalisme persamaan (7) harus memenuhi kondisi $\frac{dN_1}{dt} = 0$ dan $\frac{dN_2}{dt} = 0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}N_1(a_{11}K_1 - a_{11}N_1 + a_{11}CN_2) &= 0 \\ N_2(a_{22}K_2 - a_{22}N_2) &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

Pada model komensalisme diperoleh 4 titik ekuilibrium: $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (K_1, 0)$, $E_3 = (0, K_2)$ dan $E_4 = (K_1 + CK_2, K_2)$.

Kestabilan model melalui linierisasi menggunakan matrik Jacobian. Dari Persamaan (7) diperoleh matrik Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial N_1} & \frac{\partial F}{\partial N_2} \\ \frac{\partial G}{\partial N_1} & \frac{\partial G}{\partial N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11}N_1 + a_{12}N_2 & a_{12}N_1 \\ 0 & a_2 - 2a_{22}N_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

1. Kestabilan untuk Titik Ekuilibrium (0, 0)

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $E_1 = (N_1, N_2) = (0, 0)$ diperoleh dengan mensubsitusikan $N_1 = 0$ dan $N_2 = 0$ ke dalam persamaan (9), yaitu $J(E_1)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (10) yaitu:

$$|J(E_1) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) = 0 \quad (11)$$

dari persamaan (11) diperoleh $\lambda_1 = a_1$, dengan $a_1 > 0$ sehingga $\lambda_1 > 0$ atau $\lambda_2 = a_2$, dengan $a_2 > 0$ sehingga $\lambda_2 > 0$. Berdasarkan tabel 1, maka sistem tidak stabil di titik ekuilibrium (0, 0) karena λ_1 dan λ_2 keduanya bernilai positif dan tipe titik ekuilibriumnya adalah titik simpul.

2. Kestabilan untuk Titik Ekuilibrium ($K_1, 0$)

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $E_2 = (N_1, N_2) = (K_1, 0)$ diperoleh dengan mensubsitusikan $N_1 = K_1$ dan $N_2 = 0$ ke dalam persamaan (9), yaitu $J(E_2)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11}K_1 & a_{12}K_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (12) yaitu:

$$|J(E_2) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (a_1 - 2a_{11}K_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) = 0 \quad (13)$$

dari persamaan (13) diperoleh: $\lambda_1 = -a_1$, dengan $a_1 > 0$ sehingga $\lambda_1 < 0$ atau $\lambda_2 = a_2$, dengan $a_2 > 0$ sehingga $\lambda_2 > 0$. Berdasarkan tabel 1, maka sistem tidak stabil di titik ekuilibrium ($K_1, 0$) karena salah satu dari λ_1 atau λ_2 bernilai positif yaitu $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$ dan tipe titik ekuilibriumnya adalah titik sadel.

3. Kestabilan untuk Titik Ekuilibrium (0, K_2)

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $E_3 = (N_1, N_2) = (0, K_2)$ diperoleh dengan mensubsitusikan $N_1 = 0$ dan $N_2 = K_2$ ke dalam persamaan (9), yaitu $J(E_3)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} a_1 + a_{12}K_2 & 0 \\ 0 & a_2 - 2a_{22}K_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (14) yaitu:

$$|J(E_3) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (a_1 + a_{12}K_2 - \lambda)(a_2 - 2a_{22}K_2 - \lambda) = 0 \quad (15)$$

dari persamaan (15) diperoleh: $\lambda_1 = a_1 + a_{12}K_2$, dengan a_1, a_{12} dan $K_2 > 0$ sehingga $\lambda_1 > 0$ atau $\lambda_2 = -a_2$, dengan $a_2 > 0$ sehingga $\lambda_2 < 0$. Berdasarkan tabel 1, maka sistem tidak stabil di titik ekuilibrium $(0, K_2)$ karena salah satu dari λ_1 atau λ_2 bernilai positif yaitu $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$ dan tipe titik ekuilibriumnya adalah titik sadel.

4. Kestabilan Sistem di Titik Ekuilibrium $(K_1 + CK_2, K_2)$

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium $E_4 = (N_1, N_2) = (K_1 + CK_2, K_2)$ diperoleh dengan mensubstitusikan $N_1 = K_1 + CK_2$ dan $N_2 = K_2$ ke dalam persamaan (9), yaitu $J(E_4)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11}K_1 - 2a_{11}CK_2 + a_{12}K_2 & a_{12}K_1 + a_{12}CK_2 \\ 0 & a_2 - 2a_{22}K_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (16) yaitu:

$$|J(E_4) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (a_1 - 2a_{11}K_1 - 2a_{11}CK_2 + a_{12}K_2 - \lambda)(a_2 - 2a_{22}K_2 - \lambda) = 0 \quad (17)$$

dari persamaan (17) diperoleh: $\lambda_1 = -a_1 - a_{12}K_2$, dengan a_1, a_{12} dan $K_2 > 0$ sehingga $\lambda_1 < 0$ atau $\lambda_2 = -a_2$, dengan $a_2 > 0$ sehingga $\lambda_2 < 0$. Berdasarkan tabel 1, maka sistem stabil asimtotik di titik ekuilibrium $(K_1 + CK_2, K_2)$ karena λ_1 dan λ_2 bernilai negatif dan tipe titik ekuilibriumnya adalah titik simpul.

4.3 Solusi Numerik Model Komensalisme Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

Dengan mensubstitusikan nilai $K_1 = \frac{a_1}{a_{11}}$, $K_2 = \frac{a_2}{a_{22}}$ dan $C = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ ke persamaan (7), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_1N_1 - a_{11}N_1^2 + a_{12}N_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_2N_2 - a_{22}N_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Solusi pendekatan dengan variasi t (waktu) terhadap N_1 (subpopulasi spesies komensal) dan N_2 (subpopulasi spesies inang) pada model komensalisme di interval $[0,5]$ untuk 10 contoh kejadian dapat dihitung secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk nilai awal dan beberapa nilai parameter a_1, a_2, a_{11}, a_{22} , dan a_{12} yang ditunjukkan pada tabel 2 sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai awal dan parameter untuk 10 kejadian

Kejadian	a_1	a_{11}	a_{12}	a_2	a_{22}	$N_1 (t=0)$	$N_2 (t=0)$
1.	1.5	0.05	0.02	1.7	0.007	2	1
2.	1.35	0.02	0.002	1.9	0.02	2	1
3.	2.3	0.04	0.1	2.5	0.05	3	1
4.	2.5	0.6	0.005	1.5	0.3	2	1
5.	1	0.007	0.003	2.25	0.03	3	1
6.	2	0.1	0.007	1.3	0.08	2	1
7.	1.2	0.009	0.0002	0.8	0.006	3	1
8.	0.25	0.004	0.05	0.75	0.003	2	1
9.	1	0.9	0.7	1.5	0.5	2	1
10.	2.5	0.32	0.0006	2	0.15	2	1

Solusi Numerik untuk Kejadian 1

Misalkan nilai awal $N_1 (0) = 2$ dan $N_2 (0) = 1$ untuk $t = 0$ sampai $t = 5$ dan beberapa nilai parameter $a_1 = 1.5, a_{11} = 0.05, a_{12} = 0.02, a_2 = 1.7$ dan $a_{22} = 0.007$ Substitusikan nilai parameter di atas pada persamaan (18), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= f_1(t, N_1, N_2) = 1.5N_1 - 0.05N_1^2 + 0.02N_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= f_2(t, N_1, N_2) = 1.7N_2 - 0.007N_2^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Pada interval $[0, 5]$ menggunakan ukuran langkah $h = 0.1$ dan jumlah iterasi $n = (\text{interval (2)} - \text{interval (1)}) / h = (5 - 0) / 0.1 = 50$.

Penyelesaian:

Iterasi 1:

Untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan (19) adalah dengan menentukan nilai k_1 pada awal interval pada saat $t = t_0 = 0$:

$$k_{1,1} = f_1(0, 2, 1) = 3$$

$$k_{1,2} = f_2(0, 2, 1) = 2$$

Kemudian menentukan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ pada titik tengah dari nilai k_1 pada saat $t = t_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$:

$$N_1(0.05) = N_1(0) + k_{1,1} \cdot \frac{h}{2} = 2 + 3 \frac{(0.1)}{2} = 2$$

$$N_2(0.05) = N_2(0) + k_{1,2} \cdot \frac{h}{2} = 1 + 2 \frac{(0.1)}{2} = 1$$

Gunakan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ di atas untuk menentukan nilai k_2 pada saat $t = t_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$:

$$k_{2,1} = f_1(0.05, 2, 1) = 3$$

$$k_{2,2} = f_2(0.05, 2, 1) = 2$$

Nilai di atas digunakan untuk menentukan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ pada titik tengah dari k_2 pada saat $t = t_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$:

$$N_1(0.05) = N_1(0) + k_{2,1} \cdot \frac{h}{2} = 2 + 3 \frac{(0.1)}{2} = 2$$

$$N_2(0.05) = N_2(0) + k_{2,2} \cdot \frac{h}{2} = 1 + 2 \frac{(0.1)}{2} = 1$$

Gunakan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ di atas untuk menentukan nilai k_3 pada saat $t = t_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$:

$$k_{3,1} = f_1(0.05, 2, 1) = 3$$

$$k_{3,2} = f_2(0.05, 2, 1) = 2$$

Nilai di atas digunakan untuk menentukan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ dari k_3 pada saat $t = t_0 + h = 0.1$:

$$N_1(0.1) = N_1(0) + k_{3,1} \cdot h = 2 + 3(0.1) = 2$$

$$N_2(0.1) = N_2(0) + k_{3,2} \cdot h = 1 + 2(0.1) = 1$$

Gunakan nilai $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ di atas untuk menentukan nilai k_4 pada akhir interval pada saat $t = t_0 + h = 0.1$:

$$k_{4,1} = f_1(0.1, 2, 1) = 3$$

$$k_{4,2} = f_2(0.1, 2, 1) = 2$$

Solusi numerik sistem persamaan (19) pada saat $t = t_0 + h = 0.1$ pada kejadian1:

$$N_1(0.1) = N_1(0) + \frac{h}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}]$$

$$= 2 + \frac{0.1}{6}[3 + 2(3) + 2(3) + 3]$$

$$= 2$$

$$N_2(0.1) = N_2(0) + \frac{h}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]$$

$$= 1 + \frac{0.1}{6}[2 + 2(2) + 2(2) + 2]$$

$$= 1$$

Selanjutnya solusi numerik variasi t terhadap N_1 dan N_2 untuk 50 iterasi diperlihatkan pada tabel 3 berikut ini:

Tabel 3. Solusi numerik kejadian 1

t	N_1	N_2	t	N_1	N_2	t	N_1	N_2
0	2	1	1.7	17	17	3.4	72	139

0.1	2	1	1.8	18	20	3.5	77	149
0.2	3	1	1.9	20	23	3.6	82	158
0.3	3	2	2.0	22	27	3.7	86	168
0.4	3	2	2.1	25	31	3.8	91	176
0.5	4	2	2.2	27	36	3.9	95	184
0.6	5	3	2.3	29	42	4.0	99	191
0.7	5	3	2.4	32	48	4.1	103	198
0.8	6	4	2.5	35	55	4.2	106	204
0.9	6	5	2.6	38	62	4.3	109	209
1.0	7	5	2.7	41	70	4.4	111	214
1.1	8	6	2.8	45	79	4.5	113	218
1.2	9	7	2.9	49	88	4.6	115	221
1.3	10	8	3.0	53	98	4.7	117	224
1.4	12	10	3.1	57	108	4.8	118	227
1.5	13	12	3.2	62	118	4.9	119	229
1.6	15	14	3.3	66	128	5.0	121	231

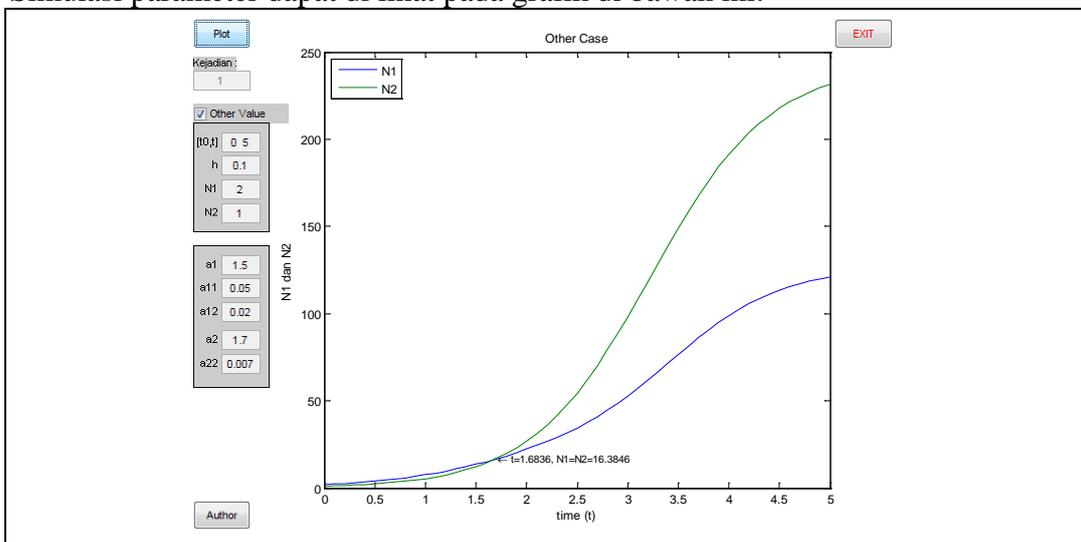
4.5 Simulasi Sistem

Variasi t (waktu) terhadap subpopulasi spesies komensal (N_1) dan subpopulasi spesies inang (N_2) dari persamaan (7) untuk 10 contoh kejadian yang solusi numeriknya telah diperoleh, dapat digambarkan dalam bentuk grafik dengan melakukan simulasi pada sistem tersebut dengan menggunakan nilai awal dan beberapa nilai parameter a_1 , a_2 , a_{11} , a_{22} , dan a_{12} seperti yang ditunjukkan pada tabel 2.

Simulasi untuk Kejadian 1:

Misalkan jumlah subpopulasi spesies komensal (ikan remora) dan jumlah subpopulasi spesies inang (ikan hiu) pada saat $t = 0$ dinyatakan sebagai berikut: $N_1(0) = 2$ ekor dan $N_2(0) = 1$ ekor dan beberapa nilai parameter $a_1 = 1.5$, $a_{11} = 0.05$, $a_{12} = 0.02$, $a_2 = 1.7$ dan $a_{22} = 0.007$.

Simulasi parameter dapat di lihat pada grafik di bawah ini:



Gambar 1. Simulasi untuk kejadian 1

Pada gambar 1, awalnya pertumbuhan subpopulasi spesies komensal (ikan remora) lebih meningkat dibandingkan pertumbuhan subpopulasi spesies inang (ikan hiu), sampai pada saat $t = 1.6836$ jumlah subpopulasi spesies komensal (ikan remora) dan subpopulasi spesies inang (ikan hiu) sama. Setelah $t = 1.6836$, pertumbuhan subpopulasi spesies inang (ikan hiu) mengalami peningkatan melebihi pertumbuhan subpopulasi spesies komensal (ikan remora). Hal ini terjadi karena terbatasnya jumlah konsumsi yang diperoleh subpopulasi spesies komensal (ikan remora) dari subpopulasi spesies inang (ikan hiu).

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer*, Edisi kelima. Erlangga. Jakarta.
- [2] Arrowsmith, D.K., & Place, C.M. 1992. *Dynamical Systems Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall Mathematics. London.
- [3] Baigent, S. 2010. *Lotka-Volterra Dynamics*. http://www.ucl.ac.uk/~ucess29/LTCC_LV2010.pdf
- [4] Bellomo, N. & Preziosi L. 1995. *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press. Florida.
- [5] Borrelli, R.L. 1996. *Differential Equations A modeling Perspective, Preliminary Edition*. Published Simultaneously. Canada.
- [6] Braun, M. 1992. *Differential Equation and Their Applications-Fourth Edition*. Springer-Verlag. New York.
- [7] Engwerda, J., dkk. 2005. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. LTD. England.
- [8] Farlow, S.J. 1994. *Differential Equations and Their Applications*. Dover Publications. United States of America.
- [9] Kimball, J.W. 1999. *Biologi Jilid 3 Edisi Kelima*. Erlangga. Jakarta.
- [10] Munif, A., dkk. 1995. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Guna Widya. Surabaya
- [11] Phanikumar. 2011. A two species commensalism model with limited resources- a numerical approach. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences VOL. 6, No.2, February 2011*.
- [12] Ross, S. L. 1984. *Differential Equation-Third Edition*. Jhon Wiley & Sons, Inc. New York.
- [13] Steven, C. 2005. *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientist*. Mc Graw-Hill International Edition. United States of America.