Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.1 (2015) Hal. 20-31

JOINT LIFE DALAM ASURANSI JIWA BERJANGKA

Dini Hidayati, Dewi Anggraini, Dewi Sri Susanti

Program Studi Matematika FMIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: vd_violet@yahoo.com

ABSTRAK

Umumnya di dalam asuransi jiwa berlaku kondisi *single life* dan *joint life*. Kondisi *single life* pada asuransi jiwa adalah kondisi ketika seseorang yang ingin membeli polis asuransi hanya untuk dirinya sendiri, artinya tidak dapat digantikan oleh orang atau pihak lain. Sedangkan kondisi *joint life* adalah kondisi ketika dua orang atau lebih yang ingin membeli polis asuransi. Contohnya suami, isteri, orang tua, dan anak, sehingga terdapat ketergantungan antar pemegang polis baik dalam peluang bersama, jumlah uang pertanggungan, atau pembayaran premi. Penelitian ini bertujuan mengetahui bentuk rumusan peluang hidup dan mati untuk 3 orang pemegang polis, dan rumusan *joint life* di dalam anuitas berjangka dan asuransi jiwa berjangka.Penelitian ini bersifat studi literatur, yaitu peneliti mengumpulkan bahan atau materi yang berkaitan dengan topik penelitian. Kemudian mempelajari dan menjelaskan kembali konsep tersebut dengan mengaplikasikannya pada contoh soal.Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa peluang hidup dan mati untuk 3 orang pemegang polis berbentuk ${}_n p_{\overline{xyz}}^{m} = \sum_{i=m}^{3} {}_n p_{\overline{xyz}}^{(i)}$. Anuitas *joint life* berjangka tergantung dari peluang hidup bersama dan bunga tertentu yang berbentuk $a_{xyz:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t+1}p_{xyz}$ dan $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t}\, {}_{t}p_{xyz}$. Asuransi *joint life* berjangka tergantung dari peluang mati bersama dan bunga tertentu yang berbentuk $A^{1}_{xyz:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{xyz}$.

Kata Kunci: *Asuransi jiwa berjangka, joint life, peluang bersama, anuitas berjangka*.

1. PENDAHULUAN

Asuransi jiwa terbagi menjadi tiga jenis yaitu asuransi berjangka, asuransi seumur hidup, dan asuransi endowmen. Umumnya di dalam asuransi jiwa berlaku kondisi *single life* dan *joint life*. Kondisi *single life* pada asuransi jiwa maksudnya adalah kondisi ketika seseorang yang ingin membeli polis asuransi hanya untuk dirinya sendiri, artinya tidak dapat digantikan oleh orang atau pihak lain. Perbedaan antara kondisi *single life* dan *joint life* adalah pada pemegang polis. Kondisi *joint life* adalah kondisi dua orang atau lebih yang ingin membeli polis asuransi. Contohnya suami dan isteri, orang tua dan anak, dan sebagainya, sehingga terdapat ketergantungan antar masing-masing pemegang polis.

Penelitian ini akan mengkaji bagaimana rumusan peluang hidup dan mati pada kondisi *joint life* untuk 3 orang pemegang polis, dan rumusan anuitas berjangka dan asuransi jiwa berjangka pada kondisi *joint life*. Sehingga hal ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dan wawasan tentang kondisi *joint life* dalam asuransi jiwa.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Kaidah Penjumlahan dan Penggandaan Peluang

Definisi 2.1.1 [8]

Jika T dan T' adalah dua kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya, maka: $P(T)+P(T')=1$

Definisi 2.1.2 [8]

Jika dua kejadian T dan U saling bebas, maka:

$$P(T\cap U)=P(T)P(U)$$

Definisi 2.1.3 [8]

Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan sebaran peluang berikut ini:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\cdots$	$P(x_n)$

Maka nilai harapan bagi X adalah: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

2.2 *Life Function* dan *Life Table*

2.2.1 Nilai Peluang Hidup dan Mati

Berdasarkan tabel mortalita dari pengalaman seluruh perusahaan asuransi jiwa di Jepang (1984-1985) terlihat adanya fungsi antara umur dan waktu. Perhitungan yang menggunakan hubungan antara umur dan waktu disebut *life function*. *Life function* ini bisa digunakan untuk menentukan nilai peluang hidup dan nilai peluang mati. Rumus-rumus yang berhubungan dengan nilai peluang hidup dan nilai peluang mati bagi individu yang berusia *x* tahun yang dirumuskan dalam **[4]**, yaitu:

1. Peluang hidup bagi individu yang berusia *x* tahun dalam jangka waktu *n* tahun adalah: ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ dengan l_x =Jumlah individu yang berusia *x* tahun.

   l_{x+n} =Jumlah individu yang berusia *x*+*n* tahun.

2. Peluang mati bagi individu yang berusia *x* tahun dalam jangka waktu *n* tahun adalah: ${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$ atau ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$ atau ${}_n p_x + {}_n q_x = 1$

   jumlah individu yang mati pada usia *x*+*n* tahun dapat di tuliskan dengan d_{x+n} yang merupakan selisih jumlah individu yang berusia *x*+*n* tahun dengan jumlah individu yang berusia *x*+*n*+1 tahun dan dapat dituliskan sebagai berikut: $d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1}$

3. Peluang hidup bagi individu yang berusia *x* tahun dalam jangka waktu *n* tahun dan kemudian mati dalam 1 tahun berikutnya adalah:

$$ {}_{n|1}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x - {}_{n+1}p_x \text{ dan } {}_{n|1}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x \cdot {}_1 q_{x+n} $$

4. Peluang hidup bagi individu yang berusia *x* tahun dalam jangka waktu *n* tahun dan kemudian mati dalam *r* tahun berikutnya adalah:

$${}_{n|r}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+r}}{l_x} = {}_n p_x \cdot {}_{n+r} p_x \text{ dan } {}_{n|r}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_{x+n}} \cdot \frac{l_{x+n} - l_{x+n+r}}{l_x} = {}_n p_x \cdot {}_r q_{x+n}$$

2.2.2 *Life Table*

Misal dalam suatu kelompok yang masing-masing anggotanya diobservasi tingkat kematiannya berdasarkan umur. Tabel yang diperoleh dari hasil observasi itu berupa *life table* dan tabel mortalita. Tabel yang datanya diperoleh dari penelitian yang dilakukan oleh seluruh perusahaan asuransi jiwa di Jepang (1984-1985) untuk jenis kelamin pria dapat dilihat **[4]**. Berdasarkan pemaparan di buku tersebut sehingga dapat diperoleh rumus sebagai berikut:

$$l_x - d_x = l_{x+1} \text{ atau } d_x = l_x - l_{x+1}$$

Hubungan-hubungan lain yang terdapat dalam *life table* adalah sebagai berikut:

$$l_{x+1} = l_x \cdot {}_1p_x \text{ atau } d_x = l_x \cdot {}_1q_x \text{ atau } {}_1p_x + {}_1q_x = 1$$

2.2.3 Harapan Hidup

Ketika seseorang berusia x tahun, maka rata-rata lama hidup di kemudian tahun disebut harapan hidup atau harapan hidup lengkap yang dinotasikan $\overset{o}{e}_x$. Lama hidup yang dapat dicapai disebut dengan harapan hidup curtate (*curtate expectation of life*) yang dinotasikan e_x. Berdasarkan Definisi 2.1.3.3, jika nilai harapan suatu peubah acak diskrit X merupakan harapan hidup yang dapat dicapai bagi individu yang berusia x tahun dari usia x+1 tahun sampai ω tahun (usia tertinggi dalam *life table*) dan $P(x_1)$, $P(x_2)$, … , $P(x_{\omega-x})$ berturut-turut merupakan peluang dari individu yang berusia x tahun untuk jangka waktu 1 tahun, 2 tahun, dan seterusnya sampai $\omega - x$ tahun akan tetap hidup maka harapan hidup yang dapat dicapai bagi individu yang berusia x tahun dari usia x+1 tahun sampai ω tahun adalalah sebagai berikut:

$$E(X) = e_x = \sum_{n=1}^{\omega-x} x_n \cdot P(x_n) = {}_1p_x + {}_2p_x + \cdots + {}_{\omega-x}p_x$$

2.3 Asuransi Jiwa

Usaha kerjasama suatu asuransi jiwa dilakukan melalui perusahaan asuransi dengan memanfaatkan apa yang disebut dalam statistika hukum bilangan besar (*law of large numbers*) yang disebutkan pada Teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.1 (Dudewicz, 1995)

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *barisan peubah acak dengan* $E(X_i) = a$, $\sigma^2(X_i) = b^2$ *dengan* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Misalkan* $\delta > 0$ *dan* $\varepsilon > 0$ *sebarang, maka terdapat* $M(\varepsilon, \delta)$ *sehingga untuk semua* $n > M(\varepsilon, \delta)$

$$P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| > \delta\right] < \varepsilon \quad \textit{atau} \quad \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to a$$

Bukti:

Misalkan $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$, maka $E(Z_n) = \dfrac{1}{n}na = a$ dan $\sigma^2(Z_n) = \dfrac{1}{n^2}nb^2 = \dfrac{b^2}{n}$ dan menurut ketidaksamaan Chebyshev

$$P\left[\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|>\delta\right]\leq\frac{\sigma^2\left(Z_n\right)}{\delta^2}=\frac{b^2}{n\delta^2}$$

Misalkan $M\left(\varepsilon,\delta\right)$ bilangan bulat positif terkecil, maka *n* memenuhi $\frac{b^2}{n\delta^2}<\varepsilon$ dan teorema telah terbukti ■

Hubungan Teorema 2.3.1 pada asuransi jiwa adalah jika perusahaan yang besar dengan pemegang saham yang banyak akan mudah mengatasi santunan asuransi dari anggota yang meninggal. Semakin banyak pemegang saham menginvestasikan dana, maka jumlah santunan asuransi yang didapat akan semakin mendekati jumlah yang diharapkan masing-masing dari anggota yang meninggal.

Dana yang terkumpul pada perusahaan asuransi akan diinvestasikan dengan tingkat bunga tertentu. Premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya disebut premi bersih. Premi dapat dibayarkan langsung sekaligus yang disebut premi tunggal, dan dapat dibayarkan dalam jangka waktu tertentu atau seumur hidup. Jika pemegang polis meninggal sebelum berakhir jangka waktu pembayaran maka pembayaran dianggap telah selesai (Sembiring, 1986).

2.4 Anuitas Berjangka

Anuitas berjangka adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu secara berkelanjutan. Anuitas akhir berjangka bagi individu berusia *x* tahun dengan jangka waktu *n* tahun dinotasikan dengan $a_{x:\overline{n}|}$, sedangkan anuitas awal berjangka bagi individu berusia *x* tahun dengan jangka waktu *n* tahun dinotasikan dengan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Sehingga berdasarkan Definisi anuitas dan dapat dilihat di Futami (1988), total nilai sekarang dari anuitas akhir berjangka bagi individu berusia *x* tahun dengan jangka waktu*n* tahun yaitu: $a_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\,{}_{t+1}p_x$ maka

$$a_{x:\overline{n}|}=\frac{v.l_{x+1}}{l_x}+\frac{v^2.l_{x+2}}{l_x}+...+\frac{v^n.l_{x+n}}{l_x}=\frac{v^{x+1}.l_{x+1}}{v^x.l_x}+\frac{v^{x+2}.l_{x+2}}{v^x.l_x}+...+\frac{v^{x+n}.l_{x+n}}{v^x.l_x}$$

Simbol-simbol komutasi untuk menyederhanakan perhitungan asuransi jiwa yang dirumuskan dalam Larson (1962) adalah:

$$D_x=l_xv^x$$

$$C_x=v^{x+1}d_x$$

$$N_x=\sum_{k=0}D_{x+k}=D_x+D_{x+1}+...+D_\omega$$

$$S_x=\sum_{k=0}N_{x+k}=N_x+N_{x+1}+...+N_\omega$$

$$M_x=\sum_{k=0}C_{x+k}=C_x+C_{x+1}+...+C_\omega$$

$$M_{x+n}=\sum_{k=0}C_{x+n+k}=C_{x+n}+C_{x+n+1}+...+C_\omega$$

$$R_x=\sum_{k=0}M_{x+k}=M_x+M_{x+1}+...+M_\omega$$

Maka $a_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$. Sedangkan total nilai sekarang dari anuitas awal berjangka bagi individu yang berusia *x* tahun dengan janka waktu *n* tahun yaitu: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x + ... + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_t p_x$ maka

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + \frac{v.l_{x+1}}{l_x} + ... + \frac{v^{n-1}.l_{x+n-1}}{l_x} = 1 + \frac{v^{x+1}.l_{x+1}}{v^x.l_x} + ... + \frac{v^{x+n-1}.l_{x+n-1}}{v^x.l_x}$$

Berdasarkan simbol komutasi, maka: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$

Berikut ini merupakan rumus lain yang berhubungan dengan anuitas berjangka awal dan anuitas berjangka akhir adalah:

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x + ... + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x = 1 + \left(a_{x:\overline{n}|} - v^n\,{}_n p_x\right)$ maka $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + v^n\,{}_n p_x = a_{x:\overline{n}|}$

2.5 Asuransi Berjangka dengan Uang Pertanggungan yang Dibayarkan pada Akhir Tahun Polis

Asuransi berjangka merupakan asuransi yang pembayaran santunannya dilakukan dalam jangka waktu tertentu. Dalam polis asuransi ini, santunan akan dibayarkan perusahaan kepada pewaris jika pemegang polis meninggal selama jangka waktu tertentu. Untuk menyederhanakan perhitungan dalam asuransi ini maka akan diasumsikan terlebih dahulu dengan jangka waktu setahun **[7].** Berdasarkan **[4]**, uang pertanggungan yang dibayarkan pada akhir tahun polis maksudnya adalah tahun ketika pemegang polis meninggal.

Misalkan $A^1_{x:\overline{n}|}$ menyatakan nilai tunai asuransi atau premi tunggal bersih asuransi Rp. 1,- pada usia *x* tahun selama jangka waktu *n* tahun yang uang pertanggungannya dibayarkan pada akhir tahun polis. Sehingga $A^1_{x:\overline{n}|}$ dapat dilihat di Sembiring (1986) dan dituliskan sebagai berikut:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{v.d_x}{l_x} + \frac{v^2.d_{x+1}}{l_x} + ... + \frac{v^n.d_{x+n-1}}{l_x} = \frac{C_x + C_{x+1} + ... + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Berikut ini merupakan rumus lain yang berhubungan dengan asuransi jiwa berjangka bagi individu yang berusia *x* tahun adalah sebagai berikut:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{v.d_x}{l_x} + \frac{v^2.d_{x+1}}{l_x} + ... + \frac{v^n.d_{x+n-1}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|1}q_x$$

Jika individu yang berusia *x* tahun membeli polis asuransi berjangka selama *n* tahun, tetapi dia memulai membayar premi asuransi ketika berusia *x+f* tahun. Sehingga jika dia meninggal dalam jangka waktu *x+f+n* tahun berikutnya akan dibayarkan uang pertanggungan. Rumusan asuransi berjangka seperti ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} {}_{f|}A^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{v^{f+1}d_{x+f}}{l_x} + \frac{v^{f+2}.d_{x+f+1}}{l_x} + ... + \frac{v^{f+n}.d_{x+f+n-1}}{l_x} \\ &= \frac{v^{x+f+1}d_{x+f} + v^{x+f+2}.d_{x+f+1} + v^{x+f+n}.d_{x+f+n-1}}{v^x l_x} \end{aligned}$$

$$= \frac{C_{x+f} + C_{x+f+1} + ... + C_{x+f+n-1}}{D_x} = \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}$$

Dengan ${}_{f|}A^1_{x:\overline{n}|}$ nilai tunai asuransi atau premi tunggal bersih asuransi berjangka bagi individu yang berusia x tahun, dengan pembayaran preminya dimulai pada usia $x+f$ tahun sampai jangka waktu n tahun dengan uang pertanggungan Rp. 1,-. Rumus hubungan $A^1_{x:\overline{n}|}$ dan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\, {}_{t|1}q_x = (v-1)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + 1 - v^n\, {}_np_x$$

Jika $d = 1 - v$ maka Persamaan (2.46) dapat disederhanakan menjadi:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = -d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + 1 - v^n\, {}_np_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n\, {}_np_x$$

2.6 *Joint Life*

Joint life adalah suatu keadaan di mana peluang hidup matinya seseorang merupakan gabungan dari dua faktor atau lebih, misalnya suami dan isteri, orang tua dan anak **[5]**. Pada dasarnya, *joint life* tidak jauh berbeda dengan *single life*. Bedanya hanya pada kebijakan pemegang polis, dimana untuk *joint life* kebijakannya ditanggung bersama sedangkan untuk *single life* kebijakannya ditanggung satu orang saja. Asuransi *joint life* mempunyai kebijakan yaitu santunan hanya dilakukan satu kali saja, yang artinya santunan akan diberikan kepada pewaris ketika semua tertanggung meninggal. *Joint life* sangat cocok untuk pasangan suami isteri yang sudah mempunyai anak, karena sebagai bahan pertimbangan untuk memberikan perlindungan yang cukup untuk anak-anaknya. Contohnya perlindungan dalam hal kesehatan dan kehidupan pensiun yang nyaman **[2].**

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Peluang Hidup dan Mati pada *Joint Life* untuk Tiga Orang Pemegang Polis

Pertama yang akan dibahas adalah fungsi hidup dan perhitungan yang berhubungan dengan *joint life*. Misal x merupakan notasi untuk individu yang berusia x tahun yang digunakan untuk mempermudah perhitungan. Pada *life table* jumlah individu berusia x tahun adalah l_x, berusia y tahun adalah l_y, dan berusia z tahun adalah l_z, dan diasumsikan meninggalnya individu yang berusia x, y, dan z tahun adalah saling bebas.

Berdasarkan Definisi 2.1.2, peluang hidup bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun jika meninggalnya tidak saling mempengaruhi atau saling bebas maka nilai peluang ketiganya akan hidup dalam n tahun kemudian adalah:

$${}_np_x \cdot {}_np_y \cdot {}_np_z = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y}\frac{l_{z+n}}{l_z}$$

Misal peluang hidup bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun untuk n tahun berikutnya notasi matematisnya adalah ${}_np_{xyz}$ dan $l_{x+n}l_{y+n}l_{z+n}$ dinotasikan dengan $l_{x+n,y+n,z+n}$, sehingga dapat disederhanakan menjadi:

$$ {}_{n}p_{xyz} = \frac{l_{x+n}l_{y+n}l_{z+n}}{l_x l_y l_z} = \frac{l_{x+n,y+n,z+n}}{l_{x,y,z}},\ n = 1, 2, 3, \ldots $$

Jumlah titik sampel individu yang mati pada usia $x+n$, $y+n$, dan $z+n$ tahun merupakan selisih dari jumlah titik sampel individu yang berusia $x+n$, $y+n$, dan $z+n$ dengan jumlah titik sampel individu yang berusia $x+n+1$, $y+n+1$, dan $z+n+1$ tahun. Misal jumlah titik sampel individu yang mati pada usia $x+n$, $y+n$, dan $z+n$ tahun notasi matematisnya adalah $d_{x+n,y+n,z+n}$. Sehingga jumlah titik sampel individu yang mati pada usia $x+n$, $y+n$, dan $z+n$ tahun dapat dirumuskan sebagai berikut: $d_{x+n,y+n,z+n} = l_{x+n,y+n,z+n} - l_{x+n+1,y+n+1,z+n+1}$

Peluang mati bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka waktu n tahun yang dinotasikan dengan ${}_{n}q_{xyz}$ adalah hasil bagi antara jumlah titik sampel individu yang mati pada usia $x+n$, $y+n$, dan $z+n$ tahun dengan jumlah titik sampel individu yang berusia x, y, dan z tahun yang dapat dirumuskan sebagai berikut: ${}_{n}q_{xyz} = \dfrac{d_{x+n,y+n,z+n}}{l_{x,y,z}}$, n= 1, 2, 3, ...

Nilai-nilai peluang bersama bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun adalah sebagai berikut:

1. Peluang hidup bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka n tahun adalah: ${}_{n}p_{xyz} = \dfrac{l_{x+n,y+n,z+n}}{l_{x,y,z}}$
2. Peluang mati paling sedikit 1 orang bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka n tahun adalah: ${}_{n}q_{xyz} = 1 - {}_{n}p_{x}\,{}_{n}p_{y}\,{}_{n}p_{z}$

   Peluang mati paling sedikit 1 orang bagi individu yang berusia $x+t$, $y+t$, dan $z+t$ tahun dalam jangka n tahun dinotasikan dengan ${}_{n}q_{(x+t)(y+t)(z+t)}$, maka diperoleh bahwa: ${}_{n}q_{(x+t)(y+t)(z+t)} = 1 - {}_{n}p_{x+t} \cdot {}_{n}p_{y+t} \cdot {}_{n}p_{z+t} = 1 - {}_{n}p_{(x+t)(y+t)(z+t)}$

   sehingga untuk peluang mati paling sedikit 1 orang bagi individu yang berusia $x+t$, $y+t$, dan $z+t$ tahun dalam jangka 1 tahun adalah sebagai berikut:

   $${}_{1}q_{(x+t)(y+t)(z+t)} = 1 - {}_{1}p_{(x+t)(y+t)(z+t)}$$

   Jika kedua ruas ditambah dengan ${}_{1}p_{(x+t)(y+t)(z+t)}$, maka dapat dibentuk menjadi:

   $${}_{1}p_{(x+t)(y+t)(z+t)} + {}_{1}q_{(x+t)(y+t)(z+t)} = 1$$
3. Peluang hidup bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka waktu n tahun dan paling sedikit 1 orang mati dalam 1 tahun berikutnya adalah:

   $${}_{n|1}q_{xyz} = {}_{n}p_{xyz} - {}_{n+1}p_{xyz} \text{ dan } {}_{n|1}q_{xyz} = \frac{d_{x+n,y+n,z+n}}{l_{x,y,z}}$$
4. Peluang mati semua bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun jika antara individu yang berusia x, y, dan z tahun meninggalnya tidak saling mempengaruhi adalah:

   $${}_{n}q_{\overline{xyz}} = {}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z} = (1 - {}_{n}p_{x})(1 - {}_{n}p_{y})(1 - {}_{n}p_{z})$$
5. Peluang hidup paling sedikit 1 orang bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka n tahun adalah:

$$ {}_n p_{\overline{xyz}} = {}_n p_x (1 - {}_n p_y) + {}_n p_y (1 - {}_n p_z) + {}_n p_z (1 - {}_n p_x) + {}_n p_{xyz} $$

6. Peluang hidup paling sedikit 1 orang bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka n tahun dan mati dalam 1 tahun berikutnya adalah:

$$ {}_{n|1} q_{\overline{xyz}} = {}_n p_{\overline{xyz}} - {}_{n+1} p_{\overline{xyz}} $$

7. Peluang hidup 2 orang bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka n tahun adalah: ${}_n p_{\overline{xyz}}^{(2)} = {}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz} - 3 {}_n p_{xyz}$

8. Peluang hidup sedikitnya m orang bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dalam jangka waktu n tahun dengan m = 1, 2, 3 adalah:

$$ {}_n p_{\overline{xyz}}^{m} = \sum_{i=m}^{3} {}_n p_{\overline{xyz}}^{(i)} $$

dengan $\sum$ menunjukkan jumlah semua kombinasi untuk m orang.

$$ {}_n p_{\overline{xyz}}^{1} = {}_n p_{\overline{xyz}}^{(1)} + {}_n p_{\overline{xyz}}^{(2)} + {}_n p_{xyz}, \quad {}_n p_{\overline{xyz}}^{2} = {}_n p_{\overline{xyz}}^{(2)} + {}_n p_{xyz}, \quad {}_n p_{\overline{xyz}}^{3} = {}_n p_{xyz} $$

Misal untuk m = 2, maka diperoleh:

$$ {}_n p_{\overline{xyz}}^{2} = {}_n p_{\overline{xyz}}^{(2)} + {}_n p_{xyz} = {}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz} - 2 {}_n p_{xyz} $$

Kondisi *joint life* juga terdapat harapan hidup yang dapat dicapai. Ketika terdapat individu yang berusia x, y, dan z tahun, maka lama hidup yang dapat dicapai disebut dengan harapan hidup curtate (*curtate expectation of life*) yang dinotasikan e_{xyz}.Berdasarkan Definisi 2.1.3, jika nilai harapan suatu peubah acak diskrir XYZ masing-masing merupakan harapan hidup individu yang berusia x tahun dari jangka usia x+1 tahun sampai ω tahun (usia tertinggi dalam *life table*), harapan hidup individu yang berusia y tahun dari jangka usia y+1 tahun sampai ω tahun, harapan hidup individu yang berusia z tahun dari jangka usia z+1 tahun sampai ω tahun maka dapat dituliskan bahwa harapan hidup individu yang berusia x tahun dari jangka usia x+1 tahun sampai ω tahun, bagi individu yang berusia y tahun dari jangka usia y+1 tahun sampai ω tahun, dan bagi individu yang berusia z tahun dari jangka usia z+1 tahun sampai ω tahun. seperti dibawah ini:

$$ \begin{aligned} E(XYZ) = e_{xyz} &= \sum_{n=1,1,1}^{\omega-x,\omega-y,\omega-z} (x_n y_n z_n) \cdot P(x_n y_n z_n) \\ &= P(x_1 y_1 z_1) + P(x_2 y_2 z_2) + \cdots + P(x_{\omega-x} y_{\omega-y} z_{\omega-z}) \\ &= P(x_1 y_1 z_1) + P(x_2 y_2 z_2) + \cdots + P(x_\infty y_\infty z_\infty) \\ &= {}_1 p_{xyz} + {}_2 p_{xyz} + \cdots + {}_\infty p_{xyz} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_{xyz} \end{aligned} $$

3.2 Anuitas Berjangka dan Asuransi Jiwa Berjangka pada Kondisi *Joint Life*

1. Anuitas Berjangka untuk Kondisi *Joint Life*

Anuitas akhir berjangka dengan jangka waktu n tahun bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun dinotasikan dengan $a_{xyz:\overline{n|}}$ Sehingga untuk anuitas akhir berjangka untuk kondisi *joint life* dengan jangka waktu n tahun bagi individu yang berusia x, y, dan z tahun, jika setiap tahunnya harus membayar sebesar Rp. 1,- maka nilai sekarang untuk tahun polis pertama yaitu vp_{xyz}, untuk tahun polis kedua yaitu $v^2\,{}_2p_{xyz}$, dan dengan cara yang sama juga dapat dilakukan untuk tahun polis berikutnya hingga mencapai *n* tahun. Total nilai sekarang untuk pembayaran setiap akhir tahun merupakan nilai sekarang dari anuitasnya yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$a_{xyz:\overline{n}|} = vp_{xyz} + v^2\,{}_2p_{xyz} + \ldots + v^n\,{}_np_{xyz} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t+1}p_{xyz}$$

dengan $a_{xyz:\overline{n}|}$ anuitas akhir berjangka bagi individu yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun dengan jangka waktu *n* tahun. sehingga juga dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{xyz:\overline{n}|} &= \frac{v.l_{x+1,y+1,z+1}}{l_{x,y,z}} + \frac{v^2.l_{x+2,y+2,z+2}}{l_{x,y,z}} + \ldots + \frac{v^n.l_{x+n,y+n,z+n}}{l_{x,y,z}} \\ &= \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+1}.l_{x+1,y+1,z+1}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}} + \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+2}.l_{x+2,y+2,z+2}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}} + \ldots + \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+n}.l_{x+n,y+n,z+n}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}} \end{aligned}$$

Misal dibentuk simbol-simbol komutasi untuk menyederhanakan perhitungan asuransi jiwa untuk kondisi *joint life* adalah sebagai berikut:

$$D_{x,y,z} = v^{\frac{1}{3}(x+y+z)} l_{x,y,z}$$

$$C_{x,y,z} = v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+1} d_{x,y,z}$$

$$N_{x,y,z} = \sum_{k=0} D_{x+k,y+k,z+k} = D_{x,y,z} + D_{x+1,y+1,z+1} + \ldots$$

$$S_{x,y,z} = \sum_{k=0} N_{x+k,y+k,z+k} = N_{x,y,z} + N_{x+1,y+1,z+1} + \ldots$$

$$M_{x,y,z} = \sum_{k=0} C_{x+k,y+k,z+k} = C_{x,y,z} + C_{x+1,y+1,z+1} + \ldots$$

$$M_{x+n,y+n,z+n} = \sum_{k=0} C_{x+n+k,y+n+k,z+n+k} = C_{x+n,y+n,z+n} + C_{x+n+1,y+n+1,z+n+1} + \ldots$$

$$R_{x,y,z} = \sum_{k=0} M_{x+k,y+k,z+k} = M_{x,y,z} + M_{x+1,y+1,z+1} + \ldots$$

Berdasarkan simbol komutasi, maka dapat disederhanakan menjadi:

$$a_{xyz:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1,y+1,z+1}}{D_{x,y,z}} + \frac{D_{x+2,y+2,z+2}}{D_{x,y,z}} + \ldots + \frac{D_{x+n,y+n,z+n}}{D_{x,y,z}} = \frac{N_{x+1,y+1,z+1} - N_{x+n+1,y+n+1,z+n+1}}{D_{x,y,z}}$$

Anuitas awal berjangka bagi individu yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun dengan jangka waktu *n* tahun dinotasikan dengan $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}$. Sehingga untuk anuitas awal berjangka untuk kondisi *joint life* dengan jangka waktu *n* tahun untuk individu yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun, jika setiap tahunnya harus membayar sebesar Rp. 1,- maka nilai sekarang untuk tahun polis pertama yaitu $v^0\,{}_0p_{xyz} = 1$, untuk tahun polis kedua yaitu $v^1\,{}_1p_{xyz}$, dan dengan cara yang sama juga dapat dilakukan untuk tahun polis berikutnya hingga mencapai *n* tahun. Total nilai sekarang untuk pembayaran setiap awal tahun merupakan nilai sekarang dari anuitasnya yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} = v^0\,{}_0p_{xyz} + v^1\,{}_1p_{xyz} + \ldots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_{xyz} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_{xyz}$$

Dengan $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}$ Anuitas awal berjangka bagi individu yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun dengan jangka waktu *n* tahun. maka

$$\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} = \frac{v^0.l_{x,y,z}}{l_{x,y,z}} + \frac{v^1.l_{x+1,y+1,z+1}}{l_{x,y,z}} + \ldots + \frac{v^{n-1}.l_{x+n-1,y+n-1,z+n-1}}{l_{x,y,z}}$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}} + \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+1}.l_{x+1,y+1,z+1}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}} + \ldots + \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+n-1}.l_{x+n-1,y+n-1,z+n-1}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.l_{x,y,z}}$$

$$= \frac{D_{x,y,z}}{D_{x,y,z}} + \frac{D_{x+1,y+1,z+1}}{D_{x,y,z}} + \ldots + \frac{D_{x+n-1,y+n-1,z+n-1}}{D_{x,y,z}} = \frac{N_{x,y,z} - N_{x+n,y+n,z+n}}{D_{x,y,z}}$$

Berikut ini merupakan rumus lain yang berhubungan dengan anuitas awal berjangka untuk kondisi *joint life* dan anuitas akhir berjangka untuk kondisi *joint life* adalah:

$$\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} = 1 + vp_{xyz} + v^2\,{}_2p_{xyz} + \ldots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_{xyz} = 1 + \left(a_{xyz:\overline{n}|} - v^n\,{}_np_{xyz}\right)$$

2. Asuransi *Joint Life* Berjangka dengan Uang Pertanggungan yang Dibayarkan pada Akhir Tahun Polis

Misalkan terdapat sejumlah l_x, l_y, dan l_z orang yang semuanya tepat berusia x, y, dan z tahun sepakat menyerahkan sebesar *B* rupiah ke suatu perusahaan asuransi, dan pada akhir tahun Rp. 1,- akan dibayarkan kepada setiap pewaris dari jumlah titik sampel pemegang polis yang meninggal di antara jumlah jumlah titik sampel pemegang polis yang berusia x, y, dan z tahun pada sepanjang tahun tersebut. Banyaknya jumlah titik sampel pemegang polis yang meninggal setahun dari sebanyak $l_{x,y,z}$ orang adalah $d_{x,y,z}$. Jadi seluruh pembayaran santunan setahun kemudian adalah $d_{x,y,z}$ rupiah. Dana yang terkumpul beserta bunganya setahun dianggap sama dengan seluruh pembayaran santunan Rp. 1,- bagi setiap jumlah titik sampel yang meninggal, jadi tidak kurang maupun bersisa. Sehingga dana yang terkumpul beserta bunganya dituliskan sebagai $B.l_{x,y,z}$ $(1+i)$, sehingga seluruh pembayaran santunan setahun kemudian sebesar Rp. 1,- dapat dirumuskan sebagai berikut: 1.Jika kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{l_{x,y,z}(1+i)}$, maka diperoleh bahwa: $B = \frac{d_{x,y,z}}{l_{x,y,z}(1+i)}$, karena diketahui $\frac{1}{1+i}$ dapat disimbolkan sebagai *v*, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$B = \frac{v.d_{x,y,z}}{l_{x,y,z}} = \frac{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)+1}.d_{x,y,z}}{v^{\frac{1}{3}(x+y+z)}\cdot l_{x,y,z}} = \frac{C_{x,y,z}}{D_{x,y,z}}.$$

Nilai *B* ini disebut premi tunggal bersih suatu asuransi sebesar Rp. 1,- selama setahun. Nilai Rp. 1,- hanya akan dibayarkan bila jumlah titik sampel pemegang polis yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun meninggal dalam jangka waktu setahun. Jika mereka hidup mencapai usia $x+1$, $y+1$, dan $z+1$ tahun maka mereka tidak mendapat apapun. Misalkan $A^1_{xyz:\overline{n}|}$ menyatakan nilai tunai asuransi atau premi tunggal bersih asuransi Rp. 1,- pada pemegang polis yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun selama jangka waktu *n* tahun yang uang pertanggungannya dibayarkan pada akhir tahun polis, sehingga $A^{1}_{xyz:\overline{n|}}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A^{1}_{xyz:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t|1}q_{xyz} \text{ dan}$$

$$A^{1}_{xyz:\overline{n|}} = \frac{v.d_{x,y,z}}{l_{x,y,z}} + \frac{v^{2}.d_{x+1,y+1,z+1}}{l_{x,y,z}} + \ldots + \frac{v^{n}.d_{x+n-1,y+n-1,z+n-1}}{l_{x,y,z}}$$

$$= \frac{C_{x,y,z}}{D_{x,y,z}} + \frac{C_{x+1,y+1,z+1}}{D_{x,y,z}} + \ldots + \frac{C_{x+n-1,y+n-1,z+n-1}}{D_{x,y,z}} = \frac{M_{x,y,z} - M_{x+n,y+n,z+n}}{D_{x,y,z}}$$

Rumus hubungan $A^{1}_{xyz:\overline{n|}}$ dan $\ddot{a}_{xyz:\overline{n|}}$ dapat diperoleh berdasarkan Persamaan adalah sebagai berikut: $A^{1}_{xyz:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t|1}q_{xyz} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{xyz:\overline{n|}} - v^{n} {}_{n}p_{xyz}$, dengan $A^{1}_{xyz:\overline{n|}}$ nilai tunai asuransi berjangka atau premi tunggal bersih asuransi berjangka untuk kondisi *joint life* bagi individu yang berusia *x*, *y*, dan *z* tahun dengan uang pertanggungan Rp. 1,- yang dibayarkan pada akhir tahun polis.

Contoh Soal Asuransi Jiwa pada Kondisi *Joint Life*

Terdapat 3 orang bersaudara yang bernama Lina, Roni, dan Rizki yang masing-masing berusia 20, 22, dan 25 tahun. Mereka membeli sebuah polis asuransi *joint life* berjangka, dengan jangka waktu 20 tahun. Dengan menggunakan Tabel Mortalita Jepang tahun (1984-1985) menentukan:

a. Nilai peluang hidup Lina, Roni, dan Rizki dalam jangka *n* tahun.
b. Nilai peluang dalam jangka *n* tahun paling sedikit 1 orang mati.
c. Nilai peluang mati semua dalam jangka *n* tahun jika antara Lina, Roni, dan Rizki meninggalnya tidak saling mempengaruhi.
d. Nilai peluang paling sedikit 1 orang hidup dalam jangka *n* tahun.
e. Nilai peluang 2 orang hidup dalam jangka *n* tahun.
f. Jumlah premi tunggal untuk anuitas *joint life* berjangka awal jika mereka membayar preminya sebesar Rp.50.000,- pertahunnya. $(i = 5\%)$

Penyelesaian: Misal Lina (wanita)=*x*=20tahun, Roni(pria)=*y*=22tahun, Rizki(pria)=*z*=25 tahun maka menggunakan Tabel Mortalita Wanita Jepang(1984-1985) diperoleh: ${}_{n}p_{x} = {}_{20}p_{20} = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{98092}{99316} = 0,988$

dan menggunakan Tabel Mortalita Pria Jepang (1984-1985) diperoleh:

$${}_{n}p_{y} = {}_{20}p_{22} = \frac{l_{42}}{l_{22}} = \frac{96510}{98653} = 0,978,\quad {}_{n}p_{z} = {}_{20}p_{25} = \frac{l_{45}}{l_{25}} = \frac{95879}{98365} = 0,975$$

diperoleh:

$${}_{20}q_{20} = 1 - {}_{20}p_{20} = 1 - 0,988 = 0,012$$
$${}_{20}q_{22} = 1 - {}_{20}p_{22} = 1 - 0,978 = 0,022$$
$${}_{20}q_{25} = 1 - {}_{20}p_{25} = 1 - 0,975 = 0,025$$

a. Nilai peluang hidup Lina, Roni, dan Rizki dalam jangka *n* tahun adalah:

$${}_{20}p_{20,22,25} = {}_{20}p_{20}\,{}_{20}p_{22}\,{}_{20}p_{25} = (0,988)(0,978)(0,975) = 0,942$$

b. Peluang dalam jangka *n* tahun paling sedikit 1 orang mati adalah:

$${}_nq_{xyz} = 1 - {}_np_x\, {}_np_y\, {}_np_z = 1 - {}_np_{xyz}$$ Sehingga $${}_{20}q_{20,22,25} = 1 - {}_{20}p_{20,22,25}$$

berdasarkan hasil yang diperoleh (a), maka ${}_{20}q_{20,22,25} = 1 - 0,942 = 0,057$

c. Nilai peluang mati semua dalam jangka *n* tahun jika antara Lina, Roni, dan Rizki meninggalnya tidak saling mempengaruhi adalah:

$${}_{20}q_{\overline{20,22,25}} = (0,012)(0,022)(0,025) = 0,66 \cdot 10^{-5}$$

d. Nilai peluang paling sedikit 1 orang hidup dalam jangka *n* tahun adalah:

$${}_{20}p_{\overline{20,22,25}} = 0,988(1-0,978) + 0,978(1-0,975) + 0,975(1-0,988) + {}_{20}p_{20,22,25}$$

berdasarkan hasil yang diperoleh (a), maka ${}_{20}p_{\overline{20,22,25}} = 0,9999$

e. Nilai peluang 2 orang hidup dalam jangka *n* tahun adalah:

$${}_{20}p_{\overline{20,22,25}}^{(2)} = {}_{20}p_{20,22} + {}_{20}p_{20,25} + {}_{20}p_{22,25} - 3\,{}_{20}p_{20,22,25}$$

berdasarkan hasil yang diperoleh (a), maka ${}_{20}p_{\overline{20,22,25}}^{(2)} = 0,057$

Jumlah premi tunggal untuk anuitas *joint life* berjangka awal jika mereka membayar preminya sebesar Rp.50.000,- pertahunnya dengan bunga 5% adalah:

v=0.952. Premi tunggal $= 50000 \cdot \ddot{a}_{20,22,25:\overline{20|}} = 50000\left(\sum_{t=0}^{19} v^t\, {}_tp_{20,22,25}\right) = 641545,643$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Alwi, H. 2002. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Balai Pustaka, Jakarta.

[2]. Chong, S. 2010**.** *What Joint Term Life Insurance is All About***.** http://ezinearticles.com/?What-Joint-Term-Life-Insurance-is-All-About&id=4013506Diakses Tanggal 29 September 2010.

[3]. Dudewicz, E.D. & Satya N.M. 1995. *Statistika Matematika Modern*. ITB, Bandung.

[4]. Futami, T. 1988. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*. Rekaprint Utama, Tokyo.

[5]. Futami, T. 1994. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian II*. Rekaprint Utama, Tokyo.

[6]. Larson, R.E. 1962. *Life Insurance Mathematics*. John Wiley & Sons, New York.

[7]. Sembiring, R.K. 1986. *Asuransi III*. Universitas Terbuka, Jakarta.

[8]. Walpole, R.E. 1995. *Pengantar Statistika*. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.