Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 6-14

PEMETAAN KONTRAKSI CIRIC-MATKOWSKI PADA RUANG METRIK TERURUT

Mariatul Kiftiah

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, Kalimantan Barat 78124
Email : kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

ABSTRACT

In this paper, a new concept about Ciric-Matkowski contraction mapping in ordered metric space (related to ≤) is contructed. Different from the metric space, the Ciric-Matkowski contraction mapping in ordered metric space does not imply that the mapping to be continous. Next, some fixed point theorem of the Ciric-Matkowski contraction mapping in ordered metric space which is continous and not are proved. The result shows that the theorems do not guarantee the existence and uniqueness fixed point in ordered metric space. Adding comparable condition in it space then its mapping have a unique fixed point.

Keywords: *fixed point,metric space,contraction mapping.*

ABSTRAK

Dalam penelitan ini, dibangun konsep pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski di ruang metrik terurut (terhadap relasi urutan ≤). Berbeda dengan ruang metrik, pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski di ruang metrik terurut tidak selalu kontinu. Selanjutnya, dalam penelitan ini dibangun beberapa teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski yang kontinu dan tak kontinu. Hasil penelitian menunjukkan teorema tersebut tidak menjamin ketunggalan titik tetap di ruang metrik terurut. Dengan menambahkan sifat komparabel pada dua anggota dalam ruang metrik terurut maka dapat ditunjukkan bahwa pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski memiliki titik tetap tunggal.

Kata kunci : *titik tetap, ruang metrik, pemetaan kontraksi*

1. PENDAHULUAN

Konsep pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski diperkenalkan oleh L.J.Ciric (1981) dan J.Matkowski (1980). Pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski merupakan pemetaan dari ruang metrik (X,d) ke dirinya sendiri (*self-mapping*) dengan sifat untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ dengan $x < y$ dan $\varepsilon < d(x,y) < \varepsilon + \delta$ berakibat $d\big(f(x),f(y)\big) \leq \varepsilon$. Dalam penelitiannya, Ciric-Matkowski memberikan syarat cukup yang menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraksi yang terdefinisi dalam ruang metrik lengkap.

Konsep ruang metrik terus mengalami perkembangan. Untuk suatu himpunan terurut parsial $(X, \leq)$ dan suatu metrik d sedemikian sehingga (X, d) ruang metrik maka (X, d) merupakan ruang metrik terurut terhadap relasi urutan $\leq$.

Beberapa ilmuwan dalam penelitiannya telah membuktikan eksistensi dan ketunggalan pemetaan kontraksi di ruang metrik terurut. Salah satunya adalah Harjani [1] yang berhasil membuktikan eksistensi dan ketunggalan pemetaan kontraksi Meir-Keeler di ruang metrik terurut. Dalam penelitiannya, Matkowski [2] mendefinisikan pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski sebagai perluasan dari pemetaan kontraksi Meir-Keeler. Berdasarkan gagasan yang dilakukan oleh Harjani dan Matkowski, maka dalam paper ini akan dibangun konsep pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski pada ruang metrik terurut. Lebih lanjut, akan dikaji eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari pemetaan kontraksi tersebut pada ruang metrik terurut.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Terurut Parsial

Himpunan terurut parsial merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan relasi "$\leq$" dan memenuhi beberapa aksioma relasi. Berikut ini diberikan definisi Himpunan terurut parsial.

Definisi 2.1.1 [3]
Relasi "$\leq$" pada himpunan tak kosong X dikatakan urutan parsial (partial order) jika dan hanya jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku :
(i) $x \leq x$ (sifat refleksif)
(ii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$ (sifat antisimetris)
(iii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$ (sifat transitif)
Lebih lanjut, $(X, \leq)$ disebut ***himpunan terurut parsial****.*

Contoh 2.1.2
Diberikan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real.
$(\mathbb{R}, \leq)$ merupakan himpunan terurut parsial, sebab " $\leq$ " memenuhi sifat refleksif, antisimetris dan transitif pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.3 [3]
Diberikan $(X, \leq)$ himpunan terurut parsial. Untuk setiap $x, y \in X$ disebut ***komparabel*** *jika $x \leq y$ atau $y \leq x$. Jika $x \leq y$ dan $x \neq y$ maka $x < y$.*
Untuk setiap $x, y \in X$ yang tidak komparabel disebut dengan ***inkomparabel****.*

2.2 Ruang Metrik Terurut

Untuk membahas Ruang Metrik Terurut diawali dengan membahas konsep ruang metrik.

Definisi 2.2.1 [4]
Diberikan sebarang himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut ***metrik*** *pada X jika memenuhi sifat-sifat :*

(M1) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$
$d(x,y) > 0$, *untuk setiap* $x, y \in X$, *dengan* $x \neq y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$, *untuk setiap* $x, y \in X$
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, *untuk setiap* $x, y, z \in X$
Himpunan X yang dilengkapi dengan suatu metrik d disebut ***ruang metrik*** *dan dituliskan dengan (X, d) atau X asalkan metriknya telah diketahui.*

Selanjutnya, pengertian barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.2.2 [4]
Diberikan ruang metrik (X, d).
a. *Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan* ***konvergen*** *ke $x \in X$, ditulis dengan $lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.*
   Dalam hal ini x disebut ***limit*** *barisan $\{x_n\}$.*
b. *Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ disebut* ***barisan Cauchy***, *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*
c. *Ruang metrik yang setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen disebut* ***ruang metrik lengkap***.

Pada ruang metrik didefinisikan konsep fungsi tak turun sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 [4]
Diberikan (X, d) ruang metrik dan fungsi $f: X \to X$. Fungsi f dikatakan ***tak turun*** *jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku*
$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Definisi 2.2.4 [2]
Diberikan (X, d) ruang metrik dan pemetaan $f: X \to X$. Pemetaan f dikatakan memenuhi ***kontraksi Ciric-Matkowski*** *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > \varepsilon$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\varepsilon < d(x,y) < \delta$ dan $x < y$ berakibat $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \varepsilon$.*

Definisi 2.2.6 [6]
Diberikan (X, d) ruang metrik dan pemetaan $f: X \to X$. Pemetaan f dikatakan memenuhi ***kontraksi Meir-Keeler*** *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > \varepsilon$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\varepsilon \leq (x,y) < \delta$ dan $x < y$ berakibat $d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.*

Selanjutnya, dibawah ini didefinisikan Ruang Metrik Terurut.

Definisi 2.2.7 [3]
Diberikan $(X, \leq)$ himpunan terurut parsial dan d metrik pada X. Himpunan (X, d) disebut dengan ***ruang metrik terurut terhadap relasi*** *$\leq$. Selanjutnya, jika (X, d) ruang metrik lengkap maka* ***ruang metrik terurutnya*** *disebut dengan* ***ruang metrik terurut lengkap.***

Contoh 2.2.8
Diberikan $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan relasi urutan $R = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$, maka $(\mathbb{R}, R)$ himpunan terurut parsial.
Selanjutnya, (X, d) merupakan ruang metrik terhadap metrik d:

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

Karena $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik lengkap maka $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik terurut lengkap terhadap relasi R.

3. METODE PENELITIAN

Materi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari literatur, baik dari buku teks maupun dari paper yang terkait. Penelitian ini dilakukan dengan membangun pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski pada ruang metrik terurut. Kemudian diselidiki kekontinuan pemetaan tersebut. Di akhir penelitian ini dikaji syarat cukup yang menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski pada ruang metrik terurut.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pemetaan Kontraksi Ciric-Matkowski pada Ruang Metrik Terurut

Pada bagian ini konsep pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski di Ruang Metrik Terurut didefinisikan.

Definisi 4.1.1
*Diberikan $(X, \leq)$ himpunan terurut parsial, suatu metrik d sedemikian sehingga (X, d) ruang metrik terurut (terhadap relasi $\leq$) dan $f: X \to X$ pemetaan. Pemetaan f dikatakan memenuhi **kontraksi Ciric-Matkowski** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x < y$ dan $\varepsilon < d(x, y) < \varepsilon + \delta$ berakibat $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \varepsilon$.*

Dari Definisi 4.1.1, dapat dilihat bahwa $x, y \in X$ komparabel. Hal ini berarti dengan mengambil $\varepsilon = d(x, y)$, maka diperoleh $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$, untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x < y$.

Untuk lebih jelasnya, di bawah ini diberikan contoh fungsi kontraksi tipe Ciric-Matkowski di ruang metrik terurut.

Contoh 4.1.2
Diberikan $X = \{3n\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{3n + 1 + \frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$
Didefinisikan relasi urutan $R = \{(x, x), x \in X\}$, maka (X, R) himpunan terurut parsial.
Selanjutnya, (X, d) merupakan ruang metrik terhadap metrik d:

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

Didefinisikan pemetaan $f: X \to X$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x = 3n + 1 + \dfrac{1}{n+1} \\ 0, & \text{jika } x = 3n \end{cases}$$

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Dipilih

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{jika } 0 < \varepsilon < 1 \\ 2\varepsilon + 1, & \text{jika } 1 \leq \varepsilon < \infty \end{cases}$$

maka $\delta > \varepsilon$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $\varepsilon < d(x, y) < \delta$ dan $x < y$ berakibat $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \varepsilon$. Dengan kata lain, f memenuhi pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski.

4.2 Eksistensi Titik Tetap untuk Pemetaan Kontraksi Ciric-Matkowski

Dari Contoh 4.1.2, menunjukkan tidak selalu berlaku bahwa f pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski di ruang metrik terurut merupakan pemetaan kontinu. Oleh karena itu, untuk membuktikan eksistensi titik tetap dari pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski di ruang metrik teurut ditambahkan syarat cukup bahwa f kontinu. Berikut teorema yang menjamin eksistensi titik tetap tersebut.

Teorema 4.2.1

Diberikan $(X, \leq)$ himpunan terurut parsial, suatu metrik d sedemikian sehingga (X, d) ruang metrik lengkap (terhadap relasi $\leq$) dan $f: X \to X$ suatu pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski. Jika kedua kondisi berikut terpenuhi :

1. *Pemetaan f kontinu dan tak turun*
2. *Terdapat $x_o \in X$ sehingga $x_o \leq f(x_o)$*

maka f mempunyai titik tetap.

Bukti.

Diberikan $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \leq f(x_0)$. Untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ didefinisikan barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dengan $x_{n+1} = f(x_n)$

Akan ditunjukkan $\{x_n\}$ merupakan barisan tak turun.

Karena f tak turun maka $x_0 \leq f(x_0) = x_1$ yang berakibat $x_1 = f(x_0) \leq f(x_1) = x_2$. Jadi, untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ diperoleh

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

Jadi, $\{x_n\}$ merupakan barisan tak turun.

Akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Jika $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, untuk suatu $n_0 \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, maka f mempunyai titik tetap yaitu $x_{n_0} \in X$.

Jika $x_n \neq x_{n+1}$, untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, maka diperoleh $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$

Karena d metrik pada X maka $d(x_n, x_{n+1}) > 0$, untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Selanjutnya, karena f memenuhi pemetaan kontraksi Ciric maka

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) < d(x_{n-1}, x_n)$$

Dengan kata lain, $\{d(x_n, x_{n+1})\}_{n=0}^{\infty}$ merupakan barisan turun dan terbatas ke bawah. Berarti ada $\varepsilon_0 \geq 0$ dengan $\varepsilon_0 = \inf\big\{d(x_n, x_{n+1}) : n \in \{0, 1, 2, \cdots\}\big\}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \varepsilon_0$.

Akan ditunjukkan $\varepsilon_0 = 0$. Andaikan $\varepsilon_0 > 0$. Karena f pemetaan kontraksi Ciric maka ada $\delta_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 < d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_0 + \delta_0$. Selanjutnya, karena $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \varepsilon_0$ maka ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\varepsilon_0 < d(x_N, x_{N+1}) < \varepsilon_0 + \delta_0$. Akibatnya diperoleh $d(x_{N+1}, x_{N+2}) \leq \varepsilon_0$. Timbul kontradiksi dengan $\varepsilon_0 = \inf\big\{d(x_n, x_{n+1}) : n \in \{0, 1, 2, \cdots\}\big\}$. Jadi, $\varepsilon_0 = 0$. Hal ini berarti $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $\delta \leq \varepsilon$. Karena $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, maka ada $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n > \mathrm{K}$ berlaku $d(x_{n-1}, x_n) < \delta$. Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n > \mathrm{K}$. Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $m > n$, maka $m = n + p$, untuk suatu $p \in \mathbb{N}$. Untuk menunjukkan $\{x_n\}$ barisan Cauchy maka akan ditunjukkan

$$d\left(x_n, x_{n+p}\right) = d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Pernyataan akan dibuktikan dengan induksi matematika.
Akan ditunjukkan benar untuk $p = 1$.
Karena $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n)$ dan $d(x_{n-1}, x_n) < \eta$ maka

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n) < \delta \leq \varepsilon.$$

Selanjutnya, jika pernyataan dianggap benar untuk p, yaitu $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \leq \varepsilon$, akan ditunjukkan pernyataan tersebut benar pula untuk $p + 1$.

$$\begin{aligned} d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right) &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d\left(x_n, x_{n+p}\right) \\ &< \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

Ada dua kasus:

1. Jika $d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right) > \varepsilon$.
   Hal ini berarti $\varepsilon < d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right) < \delta + \varepsilon$. Karena $x_{n-1} < x_{n+p}$ maka diperoleh $d\left(x_n, x_{n+p+1}\right) \leq \varepsilon$
2. Jika $d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right) \leq \varepsilon$.
   Karena $x_{n-1} < x_{n+p}$ maka diperoleh
   $$d\left(x_n, x_{n+p+1}\right) < d\left(x_{n-1}, x_{n+p}\right) \leq \varepsilon$$

Jadi, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.
Karena X lengkap maka ada $u \in X$ sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Karena f kontinu maka

$$u = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(u)$$

Jadi, ada $u \in X$ yang merupakan titik tetap f.

Dari Teorema 4.2.1 di atas, dapat dilihat bahwa eksistensi titik tetap di ruang metrik terurut ditentukan oleh kekontinuan pemetaan f. Pada teorema berikut membuktikan bahwa dengan mengasumsikan suatu kondisi kekonvergenan pada barisan tak turun di ruang metrik terurut, kekontinuan pemetaan f tidak lagi menjadi syarat cukup untuk eksistensi titik tetap.

Teorema 4.2.2
Diberikan $(X, \leq)$ himpunan terurut parsial, suatu metrik d sedemikian sehingga (X, d) ruang metrik lengkap (terhadap relasi $\leq$) dan $f: X \to X$ suatu pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski. Jika ketiga kondisi berikut terpenuhi :

1. *Pemetaan f tak turun*
2. *Terdapat $x_o \in X$ sehingga $x_o \leq f(x_o)$*
3. *Untuk setiap $\{x_n\}$ barisan yang konvergen dengan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, maka terdapat subbarisan $\left\{x_{n_k}\right\} \subseteq \{x_n\}$ sedemikian sehingga $x_{n_k} \leq x$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$*

maka f mempunyai titik tetap.

Bukti.
Diberikan $x_0 \in X$ sehingga $x_0 \leq f(x_0)$. Untuk setiap $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ didefinisikan barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dengan

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Sejalan dengan Teorema **b,** dapat ditunjukkan bahwa

1. $\{x_n\}$ merupakan barisan tak turun
2. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$
3. $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy

Selanjutnya, karena X lengkap maka ada $u \in X$ sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Karena $\{x_n\} \subseteq X$ barisan tak turun maka menurut yang diketahui terdapat subbarisan $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ sedemikian sehingga $x_{n_k} \leq u$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
Ada dua kasus:

1. Jika $x_{n_{k_0}} = u$, untuk suatu $k_0 \in \mathbb{N}$, maka untuk setiap $k \geq n_{k_0}$ diperoleh
$$u = x_{n_{k_0}} \leq x_k \leq u$$
Jadi, $x_k = u$, untuk setiap $k \geq n_{k_0}$.
Lebih lanjut, $x_{n_{k_0}} = u = x_{n_{k_0+1}} = f(x_{n_{k_0}})$. Dengan kata lain, $x_{n_{k_0}} = u$ merupakan titik tetap untuk f.
2. Jika $x_{n_k} < u$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka dengan mengambil $\varepsilon = d(x_{n_k}, z)$ maka diperoleh
$$d\left(f(x_{n_k}), f(z)\right) = d\left(x_{n_k+1}, f(z)\right) < d\left(x_{n_k}, z\right) = \varepsilon$$
Karena $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_k}, u\right) = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_k+1}, f(u)\right) = 0$.
Selanjutnya, karena $\{x_{n_k+1}\} \subseteq \{x_n\}$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, u) = 0$ diperoleh
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, u) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_k+1}, u\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(f\left(x_{n_k}\right), u\right) = 0$$
Dengan menggunakan ketunggalan limit fungsi diperoleh $f(u) = u$.
Dengan kata lain, u merupakan titik tetap untuk f.

Jadi terbukti bahwa f mempunyai titik tetap.

4.3 Ketunggalan Titik Tetap untuk Pemetaan Kontraksi Ciric-Matkowski

Teorema 4.2.1 dan Teorema 4.2.2 tidak menjamin ketunggalan titik tetap di ruang metrik terurut. Berikut merupakan contoh dari pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski f di ruang metrik terurut mempunyai titik tetap tidak tunggal.

Contoh 4.3.1
Diberikan $X = \{(a, 0), (0, a)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. , dengan $a \in \mathbb{R}^+$. Didefinisikan relasi urutan di $\mathbb{R}^2$ dengan

$$(k, l) \leq (y, z) \Leftrightarrow \quad k \leq y \text{ dan } l \leq z$$

$(X, \leq)$ merupakan himpunan terurut parsial dimana untuk setiap $p, q \in X$ akan komparabel jika dan hanya jika $p = q$.
Didefinisikan d_2 metrik Euclidean di X yaitu

$$d_2(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

dengan $p = (p_1, p_2)$ dan $q = (q_1, q_2)$.
Diperoleh (X, d_2) merupakan ruang metrik lengkap.
Selanjutnya didefinisikan pemetaan identitas $f: X \to X$ dengan $f(x, y) = (x, y)$, maka f kontinu, tak turun dan f memenuhi pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski.
Lebih lanjut, $(a, 0) \leq f(a, 0)$ dan

$$d_2(f(a,0),(a,0)) = d_2(f(a,0),(0,a)) = 0$$

Jadi $(a,0)$ dan $(0,a)$ merupakan titik tetap untuk f. Dengan kata lain, f memiliki titik tetap tidak tunggal.

Dengan menambahkan kondisi komparabel pada setiap dua anggota di X sebagai syarat cukup pada kedua teorema di atas, maka ketungalan titik tetap dari pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski dapat dibuktikan kebenarannya. Berikut diberikan teorema yang menjamin ketungalan titik tetap dari pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski.

Teorema 4.3.2

Diberikan $(X,\leq)$ himpunan terurut parsial, suatu metrik d sedemikian sehingga (X,d) ruang metrik lengkap (terhadap relasi $\leq$) dan $f\colon X \to X$ suatu pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski yang memenuhi kondisi 1 dan 2 pada ***Teorema*** *dan kondisi 1, 2, 3 pada* ***Teorema****. Jika untuk setiap $x,y \in X$, terdapat $z \in X$ sedemikian sehingga z komparabel dengan x dan y, maka f mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti.

Andaikan terdapat $x,y \in X$ merupakan titik tetap untuk f, dengan $x \neq y$. Ada dua kasus:

1. Misalkan x dan y komparabel.
   Diasumsikan $x < y$ (dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk $y < x$). Dengan mengambil $\varepsilon = d(x,y)$, dan mengingat bahwa f memenuhi pemetaan kontaksi Ciric-Matkowski maka
   $$d(x,y) = d\big(f(x),f(y)\big) < d(x,y) = \varepsilon$$
   Timbul kontradiksi.
2. Misalkan x dan y inkomparabel.
   Menurut yang diketahui, terdapat $z \in X$ sedemikian sehingga z komparabel dengan x dan y.
   Diasumsikan $x < z$ (dengan cara yang sama dapat ditunjukkan untuk $z < x$). Karena f tak turun maka $f^n(x) = x \leq x \leq f^n(z)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut diperoleh
   a. Jika $f^{n_0}(x) = x = f^{n_0}(z)$, untuk suatu $n_0 \in \mathbb{N}$, dan karena x titik tetap untuk f maka
   $f^n(z) = x$, untuk setiap $n \geq n_0$. Akibatnya $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = x$.
   b. Jika $f^n(x) = x < f^n(z)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan karena f memenuhi pemetaan kontaksi Ciric-Matkowski maka dengan mengambil $\varepsilon = d(f^n(x),f^n(z))$ diperoleh
   $$\begin{aligned} d\big(f^{n+1}(x),f^{n+1}(z)\big) = d\big(x,f^{n+1}(z)\big) &\leq d\big(f^n(x),f^n(z)\big) \\ &= d(x,f^n(z)) \end{aligned}$$
   Jadi, $\{d(x,f^n(z))\}$ merupakan barisan turun dan terbatas ke bawah. Berarti ada $\varepsilon_0 \geq 0$ dengan $\varepsilon_0 = \inf\{d(x,f^n(z)) : n \in \mathbb{N}\}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x,f^n(z)) = \varepsilon_0$.
   Akan ditunjukkan $\varepsilon_0 = 0$. Andaikan $\varepsilon_0 > 0$. Karena f pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski maka ada $\delta_0 > 0$ sehingga untuk $x < f^n(z)$ maka $\varepsilon_0 < d(x,f^n(z)) < \varepsilon_0 + \delta_0$. Selanjutnya, karena $\lim_{n\to\infty} d(x,f^n(z)) =$

ε_0 maka ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\varepsilon_0 < d(x, f^N(z)) < \varepsilon_0 + \delta_0$. Akibatnya diperoleh $d\big(f(x), f^{N+1}(z)\big) \leq \varepsilon_0$. Timbul kontradiksi dengan $\varepsilon_0 = \inf\{d(x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Jadi, $x = y$. Dengan kata lain, titik tetap f tunggal.

5. KESIMPULAN

Pada ruang metrik terurut, pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski tidak berakibat bahwa pemetaan tersebut kontinu. Oleh karena itu, kekontinuan pemetaan merupakan syarat cukup untuk menjamin eksistensi titik tetap. Di sisi lain, syarat kekontinuan pada pemetaan dapat dihilangkan dengan menambahkan sifat kekonvergen barisan tak turun di ruang metrik terurut. Dengan demikian, eksistensi titik tetap untuk pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski yang tak kontinu dijamin keberadaannya. Lebih lanjut, ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraksi Ciric-Matkowski dapat ditunjukkan dengan menambahkan sifat komparabel pada dua anggota dalam ruang metrik terurut.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Harjani, J., *et al.* 2011. Fixed Point Theorem for Meir-Keeler Contractions in ordered Metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, **1** (83) 1-8.

[2] J. Matkowski. 1980. Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces, *Cas. Pest. Mat.* (105)341–344.

[3] Trotter, W.T. 1992. Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory. J. Hopkins University Press: U.S.

[4] Royden, H.L. 1989. *Real Analysis.* 3rd ed. Macmillan Publishing Company: New York.

[5] Ciric, L., 1981. A New Fixed-Point Theorem For Contractive Mappings. *Publications De L'Institut Mathematique (N.S).* **30** (44), 25–27

[6] Meir, A, Keeler. E. 1969. A Theorem On Contraction Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. (28)326–329.