Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.2 (2015) Hal. 21-28

MODEL SIR DENGAN ADANYA PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRAN

Noor Fakhriani, Yuni Yulida, Faisal
Fakultas MIPA Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat Jl. Jend. A. Yani km. 36 Banjarbaru
Email: Fakhriani@gmail.com

ABSTRACT
Some large countries, immigration is significant factor in epidemic a disease. Because disease follow a predicable disease pattern, we can be examined with the standard SIR Model. SIR Model's Kermack dan McKendrik was expanding with vaccination and immigrant effect. This model constructed with assumptiont, and then determine vaccination reproduction number (R_v), determine the equilibrium point on the model, determine stability type of equilibrium point and make simulate with the parameter values.

Keywords: Immigrants, SIR model, vaccination, equilibrium point, stability

ABSTRAK
Beberapa negara besar, imigrasi merupakan faktor signifikan dalam epidemi suatu penyakit. Karena penyakit mengikuti pola penyakit yang dapat diprediksi, sehingga dapat diperiksa dengan Model SIR standar. Model SIR Kermack Dan McKendrik dapat dikembangkan dengan pengaruh vaksinasi dan imigran. Model ini dibangun dengan asumsi, dan kemudian menentukan vaksinasi bilangan reproduksi (Rv), menentukan titik ekuilibrium pada model, menentukan jenis stabilitas titik ekuilibrium dan membuat simulasi dengan nilai parameter.

Kata Kunci :Imigran, model SIR, vaksinasi, titik ekuilibrium, stabilitas

1. PENDAHULUAN

Pemberantasan penyakit tersebut dapat dilakukan dengan melakukan vaksinasi. Vaksinasi merupakan proses pencegahan penyakit dengan pengendalian atau pemusnahan sumber penyakit, pemutusan rantai penularan dan peningkatan daya tahan. Apabila tingkat vaksinasi dalam cakupan yang rendah dapat menyebabkan tubuh seseorang yang tidak divaksinasi rentan tertular wabah penyakit. Kermack dan McKendrik (1927) mengkonstruksi suatu model SIR untuk menyelesaikan permasalahan mengenai penyebaran penyakit menular.

Konstruksi model dimulai dengan mengklasifikasikan individu dalam populasi menjadi tiga subpopulasi, yaitu : subpopulasi rentan (*Susceptible/S*), subpopulasi terinfeksi (*Infectious/I*), dan subpopulasi kebal/sembuh (*Recovered*, *Removed/R*). Model SIR Kermack dan McKendrik ini diperluas dengan adanya pengaruh dari imigran. Kemudian diselidiki titik kesetimbangan (ekuilibrium) pada model, menganalisis kestabilan pada model, serta menyelidiki eksistensi dari solusi periodik pada model, selanjutnya dibentuk simulasi sehingga melalui model SIR Kermack dan McKendrik dengan adanya pengaruh imigran dapat diselidiki dilihat perbedaan dari tingkat vaksinasi yang diberikan kepada individu dalam populasi agar penyakit tidak berkembang dalam populasi.

2. METODOLOGI

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber baik buku, artikel. Tulisan ini mengkaji kembali Model pada artikel Piccollo, C & L. Billings tahun 2005. Selanjutnya menentukan titik ekuilibrium dan tipe kestabilan titik tersebut dengan memperhatikan bilangan reproduksi vaksinasi, kemudian menyelidiki solusi periodik dan melakukan simulasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. Persamaan diferensial biasa orde satu secara umum dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

dengan $f(x, y)$ dapat berupa fungsi linier maupun nonlinier, x sebagai variabel bebas dan y sebagai variabel tidak bebas **[5]**

3.2 Sistem Persamaan Diferensial NonLinier Orde satu

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier orde-1 sebagai berikut::

$$\frac{d\,\boldsymbol{x}}{dt} = f(\,\boldsymbol{x}\,) \tag{2}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ dan $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T \in R^n$ **[3]**

3.3 Titik Kesetimbangan

Definisi dari titik ekuilibrium adalah sebagai berikut :

Definisi 3.3.1 [4]

Titik $\boldsymbol{x} \in R^n$ *disebut titik kesetimbangan (titik ekuilibrium) dari persamaan (2) jika* $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{0}$.

3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Berikut diberikan definisi dari nilai eigen dan vektor eigen:

Definisi 3.4.1 [1]

Jika A adalah matriks $n \times n$, *maka vektor tak nol* $\boldsymbol{x}$ *di dalam* R^n *dinamakan vektor eigen (eigen vektor) dari A jika* $A\boldsymbol{x}$ *adalah kelipatan skalar dari* $\boldsymbol{x}$, *yakni*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Skalar λ *dinamakan nilai eigen (eigen value) dari A dan* $\boldsymbol{x}$ *dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan* λ.

Teorema 3.4.2 [2]

Jika λ_i *merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian n x n, di titik kesetimbangan dan* $Re(\lambda_i)$ *merupakan bagian riil dari* λ_i *maka :*

i.) Untuk setiap i = 1,...,n , $Re(\lambda_i) < 0$ *maka* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *adalah stabil asimtotik*

ii.) Jika terdapat $Re(\lambda_i) > 0$*, untuk suatu i maka* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *adalah tidak stabil.*

Tabel 1. Kriteria kestabilan pada sistem linier berdasarkan nilai eigen

Nilai eigen	Tipe titik	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul (node)	Tidak stabil (unstable)
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul (node)	Stabil asimtotik (asymptotically stable)
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik pelana (saddle point)	Tidak stabil (unstable)
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul (node)	Tidak stabil (unstable)
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul (node)	Stabil asimtotik (asymptotically stable)
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a > 0$ $a < 0$	Titik spiral (spiral)	Tidak stabil (unstable) Stabil asimtotik (asymptotically stable)
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Pusat (center)	Stabil (stable) Bukan stabil asimtotik

3.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Berikut diberikan definisi matriks Routh-Hurwitz:

Definisi 3.5.1 [7]

Diberikan persamaan

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{3}$$

dengan a_0 *adalah positif dan* a_k *bilangan riil* $k = 1, 2, 3, ..., n$. *Matriks Routh-Hurwitz untuk polinomial (7) sebagai matriks bujur sangkar berukuran* n *sebagai berikut:*

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Determinan Routh-Hurwitz tingkat ke- k, dinotasikan dengan Δ_k *;* $k = 1, 2, 3, ..., n$

Kriteria Routh-Hurwitz

Semua akar polinomial dari persamaan (3) memiliki bagian riil negatif jika

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \tag{5}$$

3.6 Solusi Periodik

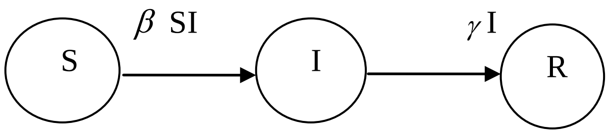
Diberikan suatu sistem :

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \tag{6}$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

Teorema 3.6 Kriteria Bendixson [8]
Diberikan D domain dalam bidang xy dan persamaan (6) *dengan P dan Q mempunyai turunan pertama parsial yang kontinu pada D, jika* $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$ *memiliki tanda yang sama di D. Maka persamaan (6) tidak memiliki lintasan tertutup di dalam domain D (tidak mempunyai solusi periodik).*

3.7 Model SIR

Model SIR Kermack dan McKendrick dapat digambarkan dalam diagram alir di bawah ini:



Gambar 1. Diagram alir Model SIR Kermack McKendrick

Sistem persamaan diferensial nonlinier dari gambar diagram alir tipe SIR Kermack McKendrick di atas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=-\beta SI\\ \frac{dI}{dt}&=\beta SI-\gamma I\\ \frac{dR}{dt}&=\gamma I\end{aligned}\qquad(7)$$

β : Laju penularan suatu penyakit melalui kontak atau hubungan.

γ : Laju kesembuhan dari penyakit [6]

3.8 Model SIR dengan Adanya Pengaruh Vaksinasi dan Imigran

Model penyebaran penyakit dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran dibentuk berdasarkan asumsi atau batasan tertentu. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran yaitu sebagai berikut :

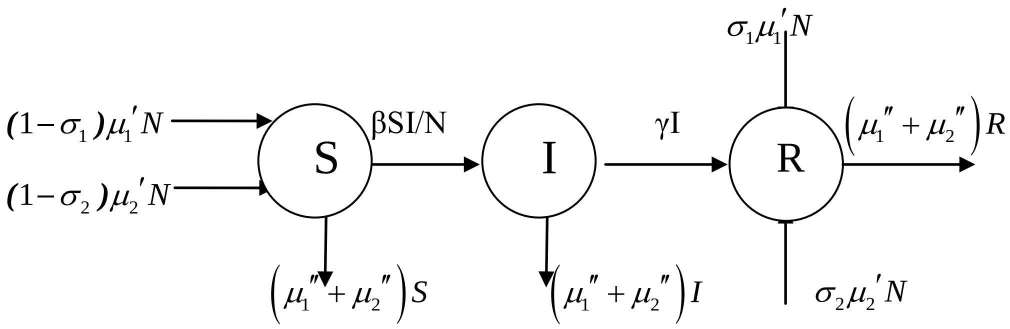
1. Populasi total (N) bernilai konstan.
2. Individu yang pada saat lahir tidak melakukan vaksinasi akan masuk kedalam kelompok *Suspectible*.
3. Individu yang telah melakukan vaksinasi pada saat lahir atau telah kebal akan masuk kedalam kelompok *Recovered.*
4. Individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal terhadap penyakit sehingga kemanjuran dari vaksinasi adalah 100%.

Total individu dalam populasi pada saat *t*, dinyatakan dengan *N(t)* yaitu :

$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$

dengan N jumlah populasi total setiap satuan waktu adalah konstan.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan dapat dibentuk alur diagram alir dibawah ini :



Gambar 2. Diagram Alir Model SIR dengan Pengaruh Vaksinasi dan Imigran

Parameter $\mu_1', \mu_2', \mu_1'', \mu_2'' \beta$ dan γ adalah konstanta positif dan batas dari laju vaksinasi adalah $0 \le (\sigma_1, \sigma_2) \le 1$.

Laju kelahiran penduduk asli (μ_1') sama dengan laju kematian penduduk asli (μ_1'') dan dapat disimbolkan $\mu_1' = \mu_1'' = \mu_1$. Laju kematian atau keluarnya imigran dari populasi (μ_2''), dapat disimbolkan $\mu_2' = \mu_2'' = \mu_2$. Berdasarkan penjelasan tersebut maka dapat diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (1-\sigma_1)\mu_1 N + (1-\sigma_2)\mu_2 N - \frac{\beta SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)S \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)I \\
\frac{dR}{dt} &= \sigma_1\mu_1 N + \sigma_2\mu_2 N + \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)R
\end{aligned} \tag{8}$$

Persamaan (8) disebut sebagai model SIR dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran.

Pada persamaan (8) banyaknya individu pada masing-masing kelompok dapat dinyatakan dalam proporsi sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N} \tag{9}$$

Karena jumlah populasi total (N) yaitu $S+I+R=N$ sehingga diperoleh :

$$s + i + r = \frac{S}{N} + \frac{I}{N} + \frac{R}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Sistem persamaan diferensial dalam proporsi dari tiga kelompok *Suspectibles*, *infected*, dan *Recovered* dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= (1-\sigma_1)\mu_1 + (1-\sigma_2)\mu_2 - \beta si - (\mu_1 + \mu_2)s \\
\frac{di}{dt} &= \beta si - (\gamma + \mu_1 + \mu_2)i \\
\frac{dr}{dt} &= \sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2 + \gamma i - (\mu_1 + \mu_2)r
\end{aligned} \tag{10}$$

Pada proporsi individu yang telah sembuh *(r)* tidak muncul pada persamaan (10) bagian pertama maupun kedua sehingga *(r)* dapat diperoleh :

$$s+i+r=1$$
$$r=1-(s+i)$$

Oleh karena itu, sistem yang digunakan untuk analisa adalah sebagai berikut :

$$\frac{ds}{dt}=(1-\sigma_1)\mu_1+(1-\sigma_2)\mu_2-\beta si-(\mu_1+\mu_2)s$$
$$\frac{di}{dt}=\beta si-(\gamma+\mu_1+\mu_2)i \tag{11}$$

3.9 Kesetimbangan Model

Model SIR dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran dalam bentuk proporsi terdapat titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

3.9.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit terjadi pada saat $\bar{i}=0$ yaitu tidak ada individu pada kelompok *Infected* yang dapat menyebarkan penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah $\overline{E}=(\bar{s},\bar{i})=\left(\frac{(1-\sigma_1)\mu_1+(1-\sigma_2)\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)},0\right)$ dan jenis kestabilan pada titik ekulibrium bebas penyakit adalah Stabil Asimtotik tipe dari titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik simpul.

Bilangan reproduksi vaksinasi (R_v) merupakan parameter yang digunakan untuk mengetahui masalah atau tingkat penyebaran suatu penyakit dengan adanya vaksinasi. Jadi, bilangan reproduksi vaksinasi untuk model SIR dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran yaitu :

$$R_v=\frac{\beta\left((1-\sigma_1)\mu_1+(1-\sigma_2)\mu_2\right)}{(\gamma+\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)} \tag{12}$$

Dari persamaan (16) dapat diselidiki tingakat vaksinasi minimum yang diperlukan untuk mencegah penyebaran penyakit pada populasi dengan adanya imigran. Jika kondisi imigran tidak divaksinasi ($\sigma_2=0$) tingkat vaksinasi minimum penduduk asli (σ_{V_1}),

$$\sigma_{V_1}=\frac{(\mu_1+\mu_2)\left(\beta-(\gamma+\mu_1+\mu_2)\right)}{\mu_1\beta} \tag{13}$$

1. Jika kondisi penduduk asli tidak divaksinasi ($\sigma_1=0$)tingkat vaksinasi minimum imigran (σ_{V_2}),

$$\sigma_{V_2}=\frac{(\mu_1+\mu_2)\left(\beta-(\gamma+\mu_1+\mu_2)\right)}{\mu_2\beta} \tag{14}$$

2. Jika kondisi imigran dan penduduk asli sama-sama divaksinasi dengan tingkat vaksinasi yang sama ($\sigma_1=\sigma_2$) tingkat vaksinasi minimum penduduk asli dan imigran yang dinotasikan dengan $\sigma_{V\min}$

$$\sigma_{V\,min}=\frac{\beta-(\gamma+\mu_1+\mu_2)}{\beta} \tag{15}$$

3.9.2 Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik untuk model SIR dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran adalah $E^* = (s^*, i^*) = \left(\frac{(\gamma + \mu_1 + \mu_2)}{\beta}, \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{\beta}(R_v - 1) \right)$ dengan syarat $R_v > 1$. Diperoleh bahwa titik ekuilibrium endemik adalah stabil asimtotik. Kemudian untuk menyelidiki tipe titik ekuilibrium dari persamaan (16), tipe titik ekuilibrium endemik adalah titik spiral asalkan nilai eigen komplek yaitu jika reproduksi vaksiansi (R_v) adalah $1 < R_v < \frac{4(\gamma + \mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)}$

3.10 Solusi Periodik

Solusi periodik ditentukan untuk mengetahui penyakit akan kembali menyebar dalam populasi pada selang waktu yang tetap atau berkala, digunakan teorema 2.6 pada persamaan (11) diperoleh bahwa persamaan (11) tidak mempunyai solusi periodik.

4 KESIMPULAN

Dari penelitian ini diperoleh beberapa kesimpulan yaitu sebagai berikut: Kesimpulan Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik asalkan $R_v < 1$. Sedangkan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik asalkan $R_v > 1$. Pada model SIR dengan adanya pengaruh vaksinasi dan imigran tidak mempunyai solusi periodik. Pada simulasi jika tingkat vaksinasi diberikan lebih kecil dari tingkat vaksinasi minimum, penyakit selalu ada dalam populasi dan sebaliknya.

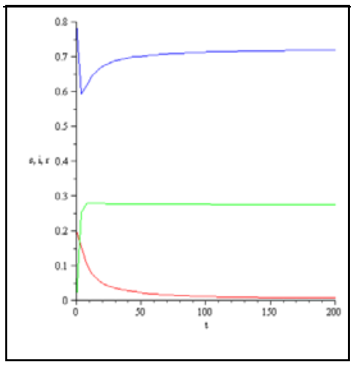
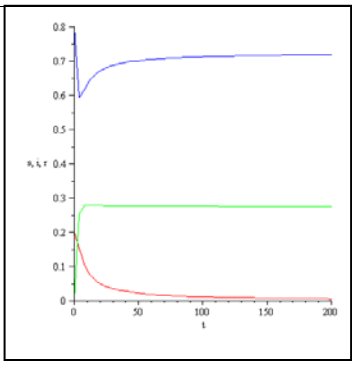
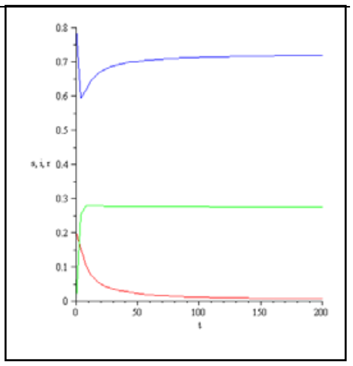
DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer,* Edisi kelima. Erlangga. Jakarta.
[2] Bellomo, N. & Preziosi L. 1995. *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation.*CRC Press. Florida
[3] Braun, M. 1992. *Differential Equation and Their Applications-Fourth Edition.* Springer-Verlag. New York.
[4] Engwerda, J., dkk. 2005. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games.* LTD. England.
[5] Farlow, S.J. 1994. *Differential Equations and Their Applications.* Dover Publications. United States of America.
[6] Florence. 2005. *SIR Models of Epidemics*. Theoretical Biology Institute of Integrative Biology ETH Zurich (701-1418-00)
[7] Gantmacher, F.R. 1959. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company. New York.
[8] Ross, S. L. 1984. *Differential Equation-Third Edition.* Jhon Wiley & Sons, Inc. New York.
[9] Piccollo, C & L. Billings. 2005. The Effect of Vaccinations in an Immigrant Model. *Mathematical and Computer Modelling* (2005). No, 42, 291-299

Simulasi Model

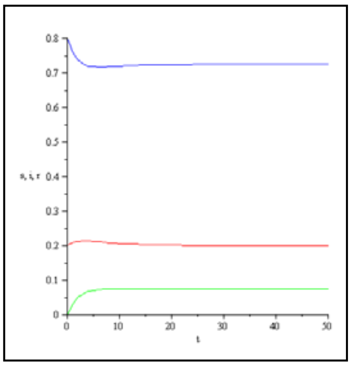
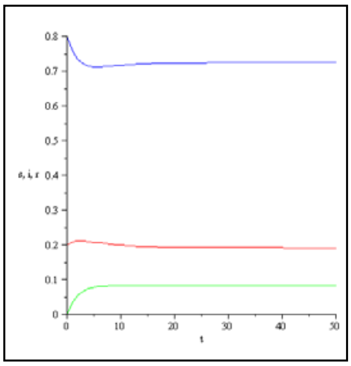
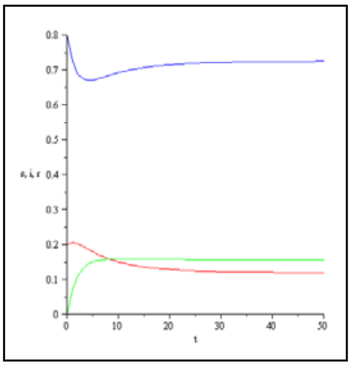
= Susfectible
= Infected
= Recovered

1. Simulasi tingkat vaksinasi minimum

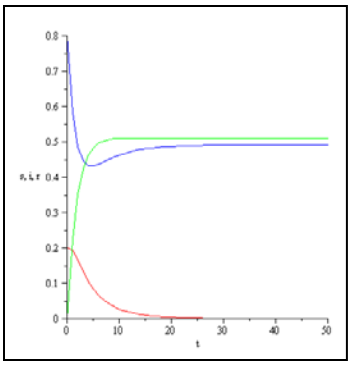
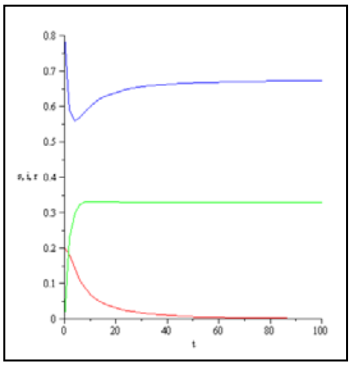
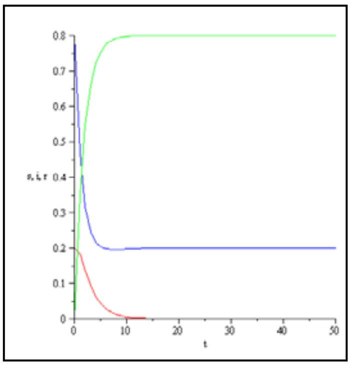
$\sigma_1 = 0,4321$ $\sigma_2 = 0,7563$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.275$

2. Simulasi penyebaran penyakit dengan tingkat vaksinasi yang diberikan lebih kecil dari tingkat vaksinasi minimum

$\sigma_1 = 0.1 < \sigma_{V_1} = 0.4321$ $\sigma_2 = 0.2 < \sigma_{V_2} = 0.7563$ $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_{V_{\min}} = 0.275$

3. Simulasi penyebaran penyakit dengan tingkat vaksinasi yang diberikan lebih besar dari tingkat vaksinasi minimum

$\sigma_1 = 0.8 > \sigma_{V_1} = 0.4321$ $\sigma_2 = 0,9 > \sigma_{V_2} = 0,7563$ $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_{V_{\min}} = 0.275$