Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.1 (Juni 2018) Hal. 54-62

SOLUSI PERMAINANAN LIGHT OUT MENGGUNAKAN ALJABAR LINIER

Akhmad Basuki, Thresye, Pardi Affandi
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jln. A. Yani KM. 36, Banjarbaru, 70714, Kalimantan Selatan
Email: *akhmadbasuki1@gmail.com*

ABSTRAK

Sistem persamaan linier dapat diterapkan untuk mencari dan menyelidiki solusi dari permainan light out yang berukuran $3 \times 3,\ 4 \times 4$ dan 5×5. Dimana Permainan light out tersebut dibentuk kedalam sistem persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dan dicari solusinya dengan menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan permainan tersebut punya solusi atau tidak dan mencari solusi optimalnya. Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur. Hasil dari penelitiannya adalah permainan light out yang berukuran 3×3 memiliki solusi tunggal untuk setiap kondisi permainan dan sedangkan permainan light out yang berukuran 4×4 dan 5×5 memiliki solusi untuk kondisi tertentu dan solusi yang dihasilkan tidak tunggal.

Kata Kunci : Persamaan Linier, Permainan Light Out, Eliminasi Gauss Jordan

ABSTRACT

Linear system can using for search and looking for solution of light out game which form $3 \times 3,\ 4 \times 4$ dan 5×5. This game can be belong to system linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ and can be searched with using Gauss Jordan elemenation. The purpose of this research is to get this game have a solution or not and search optimal solution. The method of this research is literature study. The result of this research are for light out game which form 3×3 have a unique solution for every configuration, for light out game which form 4×4 and 5×5 have a solution for certain conditions and have a not unique solution.

Keywords : Linear equation, Light Out Game, Gauss Jordan elemenation.

1. PENDAHULUAN

Persamaan linier adalah sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Suatu persamaan linier dari m persamaan dalam n peubah (variabel) akan membentuk sistem persamaan linier. Dimana dalam sistem persamaan linier ada yang tidak mempunyai solusi, mempunyai solusi tunggal, atau mempunyai tak hingga solusi. Sistem persamaan linier dapat berfungsi untuk menyelesaikan beberapa permasalahan dalam kehidupan nyata. Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat dibentuk dalam sistem persamaan linier dan kemudian diselesaikan dengan cara mencari solusinya. Sistem persamaan linier ini dapat diterapkan untuk mencari dan menyelidiki solusi dari permainan light out [1]. Berdasarkan penjelasan di atas maka penulis tertarik untuk mengkaji kembali tulisan Anderson 1998.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Linier dan Matriks

Suatu persamaan linear dalam n peubah (variabel) adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

dimana $a_1, a_2, \dots . a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ adalah variabel. Dengan demikian maka suatu sistem linear dari m persamaan dalam n peubah adalah satu sistem berbentuk:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

dimana a_{ij} dan b_i adalah elemen bilangan real. Sistem ini disebut sistem linear $m \times n$. Jadi sistem persamaan Linear adalah sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$.[2]

2.2 Ruang Vektor

Jika ditinjau $\boldsymbol{R^n}$ sebagai himpunan semua matriks $n \times 1$ dengan entri-entri bilangan real. Penjumlahan dan perkalian skalar untuk vektor vektor dalam $\boldsymbol{R^n}$ tak lain adalah penjumlahan dan perkalian skalar yang biasa dari matriks. Lebih umum, misalkan $\boldsymbol{R^{m\times n}}$ menyatakan himpunan semua matriks $m \times n$ dengan entri-entri bilangan real. Jika $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ dan $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$ maka jumlah $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ didefinisikan sebagai matriks $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})$ yang berorde $m \times n$, di mana

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}.$$

Jika diberikan skalar $\propto$, maka dapat didefinisikan $\propto \boldsymbol{A}$ sebagai matriks $m \times n$ dimana entri ke-ij adalah $\propto \boldsymbol{a_{ij}}$. Jadi, dengan mendefinisikan operasi-operasi pada himpunan $\boldsymbol{R^{m\times n}}$, telah membentuk suatu sistem matematika. Operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada $\boldsymbol{R^{m\times n}}$ mengikuti aturan-aturan ilmu hitung tertentu dan membentuk aksioma-aksioma yang digunakan untuk mendefinisikan ruang vektor.[3]

2.3 Permainan *Light Out*

Pada tahun 1970-an Parkers Brother merilis sebuah permainan puzzle yang bernama Merlin dengan ukuran 3×3. Kemudian pada tahun 1995 sebuah perusahaan permainan elektronik mengembangkan permainan tersebut dan permainan tersebut diberi nama *light out*, dimana ukuran permainannya di perbesar. *Light Out* adalah permainan *puzzle* yang terdiri atas 25 tombol yang tersusun atas 5 baris dan 5 kolom. Setiap tombol kondisinya menyala atau mati. Ketika permainan dimulai akan ada lampu yang menyala atau mati secara acak. Tombol yang menyala ketika ditekan akan mati dan begitu juga sebaliknya, tombol yang ditekan juga akan mempengaruhi kondisi lampu bagian vertikal dan horizontal didekatnya atau tetangganya (tetangga bagian diagonal tidak berpengaruh). Permainan ini akan dimenangkan ketika semua lampu mati. [4]

Pada pengamatan pertama pada permainan light out bahwa penekanan dua kali sama artinya dengan tidak menekan tombol sama sekali. Karena penekanan tombol dua kali akan menyebabkan permainan kembali ke kondisi semula. Oleh karena itu untuk setiap kondisi awal saat permainan dimulai strategi yang perlu dibutuhkan adalah mencari tombol mana saja yang harus ditekan dengan syarat hanya satu kali penekanan. [4]

Pada pengamatan yang kedua menunjukkan bahwa penekanan tombol hanya tergantung pada banyak tombol yang ditekan tidak pada urutan. Ini menunjukkan bahwa urutan penekanan tombol bersifat komutatif.

Pada permainan ini ada dua kondisi lampu yaitu nyala atau mati, dalam hal ini kondisi lampu akan direpresentasikan dalam modulo 2 dimana diasumsikan satu untuk kondisi lampu menyala dan nol untuk kondisi lampu mati. [2]

Pada permainan light out ukuran $n \times n$, kondisi n^2 tombol dapat dituliskan dalam sebuah vektor berikut

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n^2})^{\mathrm{T}}$$

dimana $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n^2}$ merepresentasikan kondisi awal saat permainan dimulai. Setiap kondisi awal dari $\boldsymbol{b}$ akan dicari tombol mana saja yang akan ditekan, dimana akan dinotasikan sebagai

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n^2})^{\mathrm{T}}$$

dimana $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n^2}$ representasi tombol yang akan ditekan dalam permainan.[1]

Secara umum, diberikan konfigurasi $\boldsymbol{b} = [b_{i,j}]$, solusi penyelesain permainan tersebut dapat dirumuskan dalam sebuah sistem persamaan linier yaitu solusi penyelesain permainan tersebut dapat dirumuskan dalam sebuah sistem persamaan linier yaitu

$$\sum_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le n} \boldsymbol{A_{i,j} x_{i,j}} = \boldsymbol{b_{i,j}}$$

dimana $x_{i,j} \in \{0,1\}$, $x_{i,j}$ merepresentasikan tombol mana saja yang harus ditekan, dan $x_{i,j}$ dinamakan matriks strategi dan $b_{i,j}$ merepresentasikan kondisi lampu atau tombol pada awal permainan. [5]

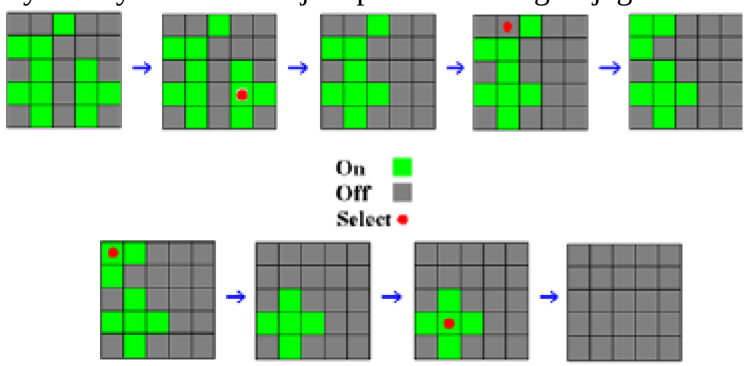
3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berkaitan dengan persamaan linier dan solusi permainan light out. Referensi tersebut dipelajari, dibahas serta dijabarkan sehingga diperoleh solusi dari permainan tersebut. Langkah pada pembahasan meliputi

a. Light Out ukuran $\mathbf{3 \times 3}$
b. Light Out ukuran 4x4 dan 5x5

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada saat memulai permainan *light out* yang berukuran $n \times n$, dimana ada sebanyak n^2 jumlah tombol, setiap tombol kemungkinannya menyala atau padam. Untuk tombol yang menyala ketika ditekan akan menjadi padam begitu juga sebaliknya. Penekanan tombol juga mempengaruhi kondisi samping vertikal dan horizontal dari tombol tersebut, bagian samping vertikal dan horizontal yang sebelumnya menyala akan menjadi padam dan begitu juga sebaliknya.



Permainan ini akan dimenangkan ketika semua lampu menjadi padam. Strategi permainan ini adalah mencari tombol mana saja yang harus ditekan untuk menghasilkan solusi yang optimal (penekanan tombol sedikit mungkin).

4.1 Light Out ukuran 3×3

Pada permainan ini ada dua kondisi lampu yaitu nyala atau mati, dalam hal ini kondisi lampu akan direpresentasikan dalam modulo 2 dimana diasumsikan satu untuk kondisi lampu menyala dan nol untuk kondisi lampu mati

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6
b_7	b_8	b_9

Gambar 4.1.1 $(x_1, x_2, \cdots, x_9)$ merepresentasikan tombol-tombol permainan light out ukuran 3×3 dan $(b_1, b_2, \cdots, b_9)$ merepresentasikan kondisi tombol pada awal permainan

Pada permainan light out ukuran 3×3, kondisi 9 tombol dapat dituliskan dalam sebuah vektor berikut

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_8, b_9)^{\mathrm{T}}$$

dimana $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_8, b_9$ merepresentasikan kondisi awal saat permainan dimulai. Setiap kondisi awal dari $\boldsymbol{b}$ akan dicari tombol mana saja yang akan ditekan, dimana akan dinotasikan sebagai

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_8, x_9)^{\mathrm{T}}$$

dimana $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_8, x_9$ representasi tombol yang akan ditekan dalam permainan. Jika permainan dimulai dengan kondisi awal $\boldsymbol{b}$ dicari dengan strategi $\vec{x}$, maka ketika dimainkan x_1, lampu b_1 menjadi $b_1 + x_1$. Untuk membuat b_1 menjadi nol maka perlu memainkan x_2 dan x_4 juga. Oleh karena itu $b_1 + x_1 + x_2 + x_4 = 0$ dan didapat persamaan

$$x_1 + x_2 + x_4 = b_1$$

Untuk membuat b_2 menjadi nol maka perlu memainkan x_1, x_2, x_3 danx_5. Oleh karena itu didapat persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = b_2$$

Dengan cara sama, didapatkan 7 persamaan lainnya.

$$x_2 + x_3 + x_6 = b_3$$
$$x_1 + x_5 + x_7 + x_4 = b_4$$
$$x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_5 = b_5$$
$$x_3 + x_5 + x_9 + x_6 = b_6$$
$$x_4 + x_8 + x_7 = b_7$$
$$x_5 + x_7 + x_9 + x_8 = b_8$$
$$x_6 + x_8 + x_9 = b_9$$

Penulisan sistem persamaan linier diatas dapat singkat dengan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, dimana $\mathbf{A}$ adalah matrik ukuran 9×9

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari solusi dari matriks $\boldsymbol{A}$ dapat menggunakan operasi-operasi baris dan menerapkan operasi-operasi serempak pada I untuk menghasilkan A^{-1} atau matriks elementernya. untuk melihat solusi dari matriks tersebut, dengan menggunakan matriks yang diperbesar yaitu menjadi matriks $(A|I)$, matriks tersebut kemudian direduksi menggunakan operasi baris yang sama sehingga matriks A menjadi eselon baris tereduksi atau identitas sedangkan matriks I nanti akan menjadi invers matriks A atau $(I|A^{-1})$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena matriks $\boldsymbol{A}$ memiliki invers maka berdasarkan teorema penyelesaian dari sistem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ memiliki tunggal solusi yang yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$.

4.2 Light Out ukuran 4x4 dan 5x5

Untuk matriks 4x4 didapat matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk light out ukuran 5x5 didapat matriks A

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$$

Dimana $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berukuran 5×5, $\boldsymbol{O}$ adalah matriks nol berukuran 5×5 dan $\boldsymbol{Z}$ adalah matriks

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari solusi dari matriks $\boldsymbol{A}$ dapat menggunakan operasi-operasi baris dan menerapkan operasi-operasi serempak pada I untuk menghasilkan A^{-1} atau matriks elementernya. Untuk melihat solusi dari matriks tersebut, dengan menggunakan matriks yang diperbesar yaitu menjadi matriks $(A|I)$, matriks tersebut kemudian direduksi menggunakan operasi baris sehingga matriks A menjadi eselon baris tereduksi sedangkan matriks I nanti akan menjadi matriks elementer.

$$(G|R) = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc|cccccccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1
\end{array}\right)$$

Untuk menentukan sistem diatas memiliki solusi atau tidak dan untuk menentukan solusi optimal dari sistem tersebut maka harus digunakan beberapa teorema untuk menyilidiki sistem tersebut memiliki solusi atau tidak.

Teorema 4.2.1

Sistem persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\boldsymbol{b}$ orthogonal dengan dua vektor $\boldsymbol{n_1}$ dan $\boldsymbol{n_2}$, dimana $\boldsymbol{n_1}$ dan $\boldsymbol{n_2}$ adalah elemen pada kolom ke-15 dan ke-16 pada matriks A yang telah dibentuk kedalam eselon baris tereduksi. dimana diambil $x_{15} = 0, x_{16} = 1$ atau $x_{15} = 1, x_{16} = 0$.

$$\boldsymbol{n_1} = (1,0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,0,0,1,0)$$
$$\boldsymbol{n_2} = (1,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1)$$

Bukti:

Berdasarkan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dapat diselesaikan jika dan hanya jika $\boldsymbol{b}$ termuat dalam ruang kolom $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan Col (**A**).

Karena $\boldsymbol{A}$ simetris maka ruang baris $\boldsymbol{A}$ (Row $\boldsymbol{A}$) sama dengan $Col\,\boldsymbol{A}$. Dari definisi 2.5.12 tentang ruang baris dan Ruang null, diketahui bahwa $Row\,(\boldsymbol{A})$ sama dengan komplemen orthogonal dari ruang null matriks $\boldsymbol{A}$, dinotasikan dengan $Null(\boldsymbol{A})$. Karena ruang null tidak berpengaruh pada elemenasi operasi baris Gauss Jordan, maka didapatkan matriks $\boldsymbol{E}$ yaitu bentuk eselon baris tereduksi dari matriks $\boldsymbol{A}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $Null\,(\boldsymbol{A}) = Null\,(\boldsymbol{E})$. Karena $Null\,(\boldsymbol{A}) = Null\,(\boldsymbol{E})$

maka $\boldsymbol{b}$ dapat diselesaikan jika dan hanya jika $\boldsymbol{b}$ termuat dalam komplemen orthogonal dari $Null(E)$.

Untuk menunjukkan bahwa $\boldsymbol{b}$ termuat dalam komplemen orthogonal, maka harus dicari basis dari $Null\,(\boldsymbol{E})$. matriks $\boldsymbol{E}$ adalah sebuah sistem persamaan yang merupakan penyelesaian untuk variabel takbebas. Didapat persamaan

$$\begin{gathered} 0 = e_1 + e_{15} \\ 0 = e_2 + e_{16} \\ 0 = e_3 + e_{15} + e_{16} \\ \vdots \\ 0 = e_{14} + e_{15} + e_{16} \end{gathered}$$

Karena perhitungan dilakukan dalam modulo 2 maka didapat

$$\begin{gathered} e_1 = e_{15} \\ e_2 = e_{16} \\ e_3 = e_{15} + e_{16} \\ \vdots = \vdots \\ e_{14} = e_{15} + e_{16} \\ e_{15} = e_{15} \\ e_{16} = e_{16} \end{gathered}$$

Bentuk diatas dapat ditulis dalam bentuk basis sehingga didapat

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{16} \end{bmatrix} = e_{15} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_{16} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan diatas didapat bahwa basis dari $Null(\mathbf{E})$ adalah $\boldsymbol{n_1}$ dan $\boldsymbol{n_2}$.
Untuk membuktikan bahwa kedua bentuk vektor adalah basis orthogonal maka hasil kali titik kedua vektor adalah nol.

$$\boldsymbol{n_1}.\boldsymbol{n_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0 + 0 + 1 + \cdots + 0)\; mod\; 2 \; = 4\; mod\; 2 = 0$$

Didapat $\boldsymbol{n_1}.\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{0}$, sehinggga terbukti bahwa $\boldsymbol{n_1}$dan $\boldsymbol{n_2}$ adalah basis dari $Null(\mathbf{E})$ dan terbukti bahwa $\boldsymbol{b}$ konsisten jika dan hanya jika orthogonal dengan vektor $\boldsymbol{n_1}$ dan $\boldsymbol{n_2}$.■

Teorema 4.2.2

Jika konfigurasi $\vec{b}$ dapat diselesaikan maka ada empat strategi untuk mencari solusi optimal permainan yaitu

$$\vec{x} = R\vec{b}$$

$$\vec{x} = R\vec{b} + n_1$$

$$\vec{x} = R\vec{b} + n_1 + n_2 \qquad \vec{x} = R\vec{b} + n_2$$

R adalah hasil dari matriks elementer yang didapat dari eselon baris tereduksi, $RA = E$.

Bukti:

Matriks $\boldsymbol{E}$ memiliki dua variabel bebas yaitu x_{15} dan x_{16} maka ada 4 kemungkinan yang mungkin terjadi, yaitu

Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.1 (Juni 2018) Hal. 54-62

$x_{15} = 0$ dan $x_{16} = 0$
$x_{15} = 1$ dan $x_{16} = 0$
$x_{15} = 0$ dan $x_{16} = 1$
$x_{15} = 1$ dan $x_{16} = 1$
pertama, pilih $x_{15} = 0$ dan $x_{16} = 0$. Maka didapat bahwa $E\vec{x} = \vec{x}$, persamaan ini di subtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat

$$\vec{x} = E\vec{x} = RA\vec{x} = R\vec{b}$$

Pilih $x_{15} = 1$ dan $x_{16} = 0$, Maka didapat $\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1)$, persamaan ini disubtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat

$$\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1) = E\vec{x} + E\vec{n}_1 = RA\vec{x} + E\vec{n}_1 = R\vec{b} + \vec{n}_1$$

Pilih $x_{15} = 0$ dan $x_{16} = 1$, maka didapat $\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1)$, persamaan ini disubtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat.

$$\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_2) = E\vec{x} + E\vec{n}_2 = RA\vec{x} + E\vec{n}_2 = R\vec{b} + \vec{n}_2$$

Pilih $x_{15} = 1$ dan $x_{16} = 1$, maka didapat $\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2)$, persamaan ini disubtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat

$$\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = E\vec{x} + E\vec{n}_1 + E\vec{n}_2 = RA\vec{x} + E\vec{n}_1 + E\vec{n}_2 = R\vec{b} + \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \blacksquare$$

Jadi untuk permainanan light out 4x4 memiliki 4 solusi yaitu

$$\vec{x} = R\vec{b}$$
$$\vec{x} = R\vec{b} + n_1$$
$$\vec{x} = R\vec{b} + n_2$$
$$\vec{x} = R\vec{b} + n_1 + n_2$$

Untuk matriks 5x5 dengan eliminasi Gauss jordhan didapat matriks G dengan rank 24 dan memiliki satu variabel bebas yaitu x_{25}. Sistem persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\boldsymbol{b}$ orthogonal dengan dua vektor $\boldsymbol{n_1}$, dimana $\boldsymbol{n_1}$ adalah elemen pada kolom ke-25 (ruang null), dimana diambil $x_{25} = 1$

$$\boldsymbol{n_1} = (1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1)$$

Jika konfigurasi $\vec{b}$ dapat diselesaikan maka ada dua strategi untuk mencari solusi optimal permainan yaitu

$$\vec{x} = R\vec{b}$$
$$\vec{x} = R\vec{b} + n_1$$

R adalah hasil dari matriks elementer yang didapat dari eselon baris tereduksi, $RA = E$.

Bukti:

Matriks $\boldsymbol{E}$ memiliki satu variabel bebas yaitu x_{25} maka ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi, yaitu

$$x_{25} = 0 \text{ atau } x_{25} = 1$$

pertama, pilih $x_{25} = 0$. Maka didapat bahwa $E\vec{x} = \vec{x}$, persamaan ini di subtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat

$$\vec{x} = E\vec{x} = RA\vec{x} = R\vec{b}$$

$x_{25} = 1$, maka didapat $\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1)$, persamaan ini disubtitusikan ke $RA = E$ dan $A\vec{x} = \vec{b}$ maka didapat.

$$\vec{x} = E(\vec{x} + \vec{n}_1) = E\vec{x} + E\vec{n}_1 = RA\vec{x} + E\vec{n}_1 = R\vec{b} + \vec{n}_1 \blacksquare$$

Sehingga untuk light out ukuran sedangkan untuk 5×5 jika memiliki dua solusi, yaitu $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Rb}$, $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{R\vec{b}} + \boldsymbol{n_1}$

5. KESIMPULAN

1. Permainan light out yang berukuran 3×3 memiliki solusi untuk setiap $\boldsymbol{b}$ (kondisi awal permainan), misalkan $b = (1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1)^T$ maka solusinya $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}$ sedangkan untuk ukuran 4×4 memiliki solusi jika $\boldsymbol{b}$ ortogonal dengan $\boldsymbol{n}_1$ dan $\boldsymbol{n_2}$**,** misalkan $\boldsymbol{b} = (1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,)^T$ maka permainan memiliki solusi dan solusinya $\boldsymbol{x} = (1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0)^T$ dan untuk 5×5 memiliki solusi jika $\boldsymbol{b}$ ortogonal dengan $\boldsymbol{n_1}$, misalkan $\boldsymbol{b} = (1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1)^T$ maka permainan memiliki solusi dan solusinya $\boldsymbol{x} = (0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0)^T$.
2. Permainan light out yang berukuran 3×3 memiliki solusi yang tunggal yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$ sedangkan permainan light out yang berukuran 4×4 jika memiliki solusi, solusinya yaitu $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Rb}, \vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{n_1}$, $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{n_2}, \vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2}$ misalkan dan permainan memiliki solusi sedangkan untuk 5×5 jika memiliki solusi, solusinya ada dua yaitu $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Rb}$, $\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{n_1}$ dan solusi optimalnya adalah yang memiliki penekanan tombol paling sedikit.

DAFTAR PUSTAKA

[1]Anderson, Marlow.1998. *Turning Light Out with Algebra*.Vol.71, No.74 pp. 300-303 Mathematical Assosiation Of America.

[2]Delin, Tan. *Linear algebra analyzing on light out game.* Journal of science & Mathematics Education Vol. 9 No.1.

[3]Howard, Anton. 2000. *Dasar- Dasar Aljabar Linier.Edisi 7 jilid 1*. Interaksara:Batam

[4]Madsen, Matthew A. 2010. Light out Solutions Using Linear Algebra. Disajikan Mei 2010, hal 36-40.http://ripon.edu/macs/summation.

[5]Mulholland, Jamie. 2016. *Permutation Puzzle A mathematical perspective*. Departement Of mathematics Simon fraser University.