Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 4 No.2 Desember 2010: 1 - 13

TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK-*D*

Muhammad Ahsar Karim, Dewi Sri Susanti, dan Nurul Huda
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: m_ahsar@yahoo.com

ABSTRAK

Pada ruang metrik dikenal teorema titik tetap Banach. Di dalam tulisan ini, teorema tersebut tersebut akan dikonstruksi pada ruang metrik-*D*. Kajian ini dimulai dengan mengkonstruksi konsep-konsep: bola terbuka, himpunan terbuka, barisan konvergen, dan barisan Cauchy masing-masing pada ruang metrik-*D*. Kemudian diberikan konsep pemetaan kontinu dan pemetaan kontinu seragam pada ruang metrik-*D*. Selanjutnya dikonstruksi teorema titik tetap Banach di dalam ruang metrik-*D*.

Kata Kunci: *Ruang Metrik-D, Bola Terbuka-D, Himpunan Terbuka-D, Barisan Konvergen-D, Barisan Cauchy-D, Pemetaan Kontinu-D, Pemetaan Kontinu-D Seragam, dan Pemetaan Kontraksi-D.*

1. PENDAHULUAN

Analisis abstrak merupakan salah satu materi di bidang analisis matematika yang terus mengalami perkembangan dari waktu ke waktu, baik dari segi teori maupun aplikasinya. Salah satu pembahasan di dalam analisis abstrak adalah ruang metrik (*metric space*). Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Mourice Frechet pada tahun 1906. Pada tahun 1992, konsep ruang metrik diperluas oleh Dhage, yang dikenal dengan konsep ruang metrik-*D* (*D-metric space*). Kemudian pada tahun 2007, konsep ruang metrik-*D* dimodifikasi oleh Sedghi dan Shobe, yang dikenal dengan ruang metrik-*D**.

Di dalam ruang metrik-*D*, Dhage telah melakukan beberapa konstruksi dan perluasan terhadap konsep-konsep dasar pada ruang metrik. Demikian pula oleh Sedghi dan Shobe di dalam ruang metrik-*D**. Diantara konsep-konsep tersebut adalah: bola terbuka, himpunan terbuka, himpunan tertutup, barisan konvergen, barisan Cauchy, dan kelengkapan. Perluasan konsep tersebut mendorong penulis mengkonstruksi generalisasi dari salah satu konsep pada ruang metrik, yaitu teorema titik tetap Banach pada ruang metrik-*D**. Selanjutnya, di dalam tulisan ini, ruang metrik-*D** cukup ditulis ruang metrik-*D* saja.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Ruang Metrik

Di dalam kehidupan sehari-hari, metrik diartikan sebagai jarak. Secara matematis, definisi metrik pada himpunan dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1. *Diberikan X himpunan tak kosong.*

(i) *Fungsi* $d : X \times X \to R$ *(R menyatakan sistem bilangan real) yang memenuhi sifat-sifat:*

(M1) $d(x,y) \geq 0$ *untuk setiap* $x, y \in X$,
$d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$,
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *, dan*
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$,
disebut ***metrik*** *pada X.*

(ii) *Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik d, dituliskan dengan* (X, d), *disebut* ***ruang metrik****. Selanjutnya, jika metriknya telah diketahui (tertentu), ruang metrik biasa ditulis dengan X saja.*

Sistem bilangan real R merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan $d(x,y) = |x - y|$, untuk setiap $x, y \in R$. Ruang metrik (R, d) disebut **ruang metrik biasa**. Sistem bilangan kompleks C merupakan ruang metrik terhadap modulusnya, yaitu $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ untuk setiap $z_1, z_2 \in C$, ditulis (C, d). Jika diberikan himpunan tak kosong X dan didefinisikan $d : X \times X \to R$ dengan:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } x \neq y \text{ dan } x, y \in X \\ 0 \text{ untuk } x = y \text{ dan } x, y \in X, \end{cases}$$

maka dapat ditunjukkan pula bahwa (X, d) merupakan ruang metrik, selanjutnya disebut **ruang metrik diskrit**.

Lemma 2.1.1. *Diberikan ruang metrik* (X, d) *sebarang. Untuk setiap* $A \subset X$, (A, d) *merupakan ruang metrik.*

Selanjutnya diberikan pengertian bola terbuka di dalam ruang metrik.

Definisi 2.1.2. *Diberikan ruang metrik* (X, d). *Untuk sebarang* $x \in X$ *dan bilangan real* $r > 0$, *didefinisikan himpunan* $B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$. *Himpunan* $B(x,r)$ *disebut* ***persekitaran*** x *dengan jari-jari* r *, biasa juga disebut* ***bola terbuka*** *dengan pusat* x *dan jari-jari* r .

Di dalam ruang metrik dikenal beberapa jenis kedudukan titik terhadap himpunan. Misalkan (X, d) ruang metrik, $x \in X$, dan $A \subset X$. Titik x disebut **titik dalam** A jika ada bilangan $r > 0$ sehingga $B(x,r) \subset A$. Titik x disebut **titik limit** A jika untuk setiap bilangan $r > 0$ berlaku $B(x,r) \cap A - \{x\} \neq \varnothing$. Selanjutnya diberikan pengertian himpunan terbuka dan pengertian himpunan tertutup di dalam ruang metrik.

Definisi 2.1.3. *Diberikan ruang metrik* (X, d) *dan himpunan* $A \subset X$.

(i) *Himpunan A dikatakan* ***terbuka*** *jika setiap anggotanya merupakan titik dalam himpunan A.*

(ii) *Himpunan A dikatakan* ***tertutup*** *jika* A^c *terbuka.*

Dari Definisi 2.1.2 dan Definisi 2.1.3 dapat dikatakan bahwa himpunan A terbuka jika dan hanya jika untuk setiap $x \in A$ ada bilangan $r > 0$ sehingga

$B(x,r) \subset A$. Di dalam ruang metrik, setiap bola terbuka merupakan himpunan terbuka. Hal ini dinyatakan di dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.1.1. *Diberikan ruang metrik* (X,d). *Untuk setiap* $x \in X$ *dan* $r > 0$, *bola terbuka* $B(x,r)$ *merupakan himpunan terbuka.*

Selanjutnya diberikan sifat operasi himpunan terbuka pada ruang metrik.

Teorema 2.1.2. *Diberikan ruang metrik* (X,d). *Jika* τ *menyatakan koleksi semua himpunan terbuka di dalam X, maka*
(i) $\varnothing, X \in \tau$,
(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,
(iii) untuk sebarang $\sigma \subset \tau$ *berlaku* $\cup_{A \in \sigma} A \in \tau$.
Koleksi semua himpunan terbuka τ di dalam *X* yang memenuhi (i), (ii), dan (iii) disebut **topologi** pada *X*.

Dari Definisi 2.1.3, diketahui bahwa komplemen himpunan terbuka merupakan himpunan tertutup, demikian pula sebaliknya. Berdasarkan hal tersebut diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 2.1.3. *Diberikan ruang metrik* (X,d). *Jika* ξ *menyatakan koleksi semua himpunan tertutup di dalam X, maka*
(i) $\varnothing, X \in \xi$,
(ii) $A, B \in \xi \Rightarrow A \cup B \in \xi$,
(iii) untuk sebarang $\varsigma \subset \xi$ *berlaku* $\cap_{C \in \varsigma} C \in \xi$.

2.2 Barisan

Konsep barisan (*sequence*) di dalam ruang metrik merupakan abstraksi dari konsep barisan di dalam sistem bilangan real *R*. Diberikan ruang metrik (X,d), barisan di dalam *X*, ditulis dengan $\{x_n\}$, merupakan fungsi dari sistem bilangan asli *N* ke X. Berikut ini diberikan beberapa pengertian penting berdasarkan ciri atau karakter suatu barisan di dalam ruang metrik.

Definisi 2.2.1. *Diberikan ruang metrik* (X,d) *dan barisan* $\{x_n\} \subset X$. *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* ***konvergen*** *(convergent) jika terdapat* $x \in X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sehingga untuk setiap bilangan asli* $n \geq n_0$ *berlaku* $d(x_n, x) < \varepsilon$. *Dalam hal* $\{x_n\}$ *konvergen, dikatakan bahwa* ***barisan*** $\{x_n\}$ ***konvergen ke*** *x atau barisan* $\{x_n\}$ *mempunyai limit x untuk* $n \to \infty$ *dan dituliskan dengan* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, *atau* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Selanjutnya, x disebut* ***limit*** *barisan* $\{x_n\}$. *Barisan yang tak konvergen dikatakan* ***divergen*** *(divergent).*

Diberikan ruang metrik biasa (R,d) dan barisan $\left\{ 1/n \right\}$, $n=1,2,3,\dots$. Dapat ditunjukkan bahwa barisan $\left\{ 1/n \right\}$ konvergen ke 0, tetapi barisan $\left\{ 1/n \right\}$ divergen di dalam ruang metrik $((0,1],d)$. Selanjutnya diberikan sifat ketunggalan limit dari barisan konvergen di dalam ruang metrik.

Teorema 2.2.1. *Diberikan ruang metrik (X,d) dan barisan $\{x_n\} \subset X$. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen, maka limitnya tunggal.*

Pengertian barisan Cauchy di dalam ruang metrik sebagai berikut.

Definisi 2.2.2. *Diberikan ruang metrik (X,d) dan barisan $\{x_n\} \subset X$. Barisan $\{x_n\}$ disebut* ***barisan Cauchy*** *atau barisan fundamental, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ berlaku $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.*

Di dalam ruang metrik, setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy. Hal ini ditunjukkan di dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.2.2. *Diberikan ruang metrik (X,d) dan barisan $\{x_n\} \subset X$. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen, maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.*

Konvers dari Teorema 2.2.2 belum tentu benar. Jika setiap barisan Cauchy merupakan barisan konvergen, maka ruang metrik (X,d) dikatakan **lengkap**. Ruang metrik biasa (R,d) merupakan ruang metrik lengkap. Sedangkan ruang metrik $\left((0,1],d\right)$ pada tidak lengkap sebab barisan Cauchy $\left\{ 1/n \right\} \subset (0,1]$ tidak konvergen di dalam ruang metrik $\left((0,1],d\right)$.

Selanjutnya diberikan pengertian pemetaan kontinu dan pemetaan kontinu seragam pada ruang metrik. Konsep tersebut merupakan generalisasi konsep pemetaan kontinu dan pemetaan kontinu seragam pada sistem bilangan real *R*.

Definisi 2.2.3. *Diberikan ruang metrik (X,d_1) dan (Y,d_2). Pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan* ***kontinu*** *(continuous)* ***di*** *(at) $a \in X$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $d_1(x,a) < \delta$ berakibat $d_2(T(x),T(a)) < \varepsilon$.*
Pemetaan T dikatakan ***kontinu pada*** *(on) $A \subset X$ jika T kontinu di setiap $a \in A$.*

Definisi 2.2.3 dapat dituliskan sebagai berikut: "pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu di a, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga, jika $x \in B_\delta(a)$ berakibat $T(x) \in B_\varepsilon\left(T(a)\right)$." Jelas bahwa bilangan δ tersebut ditentukan oleh titik a dan ε. Jika terdapat bilangan $\delta > 0$ yang hanya ditentukan oleh bilangan $\varepsilon > 0$ saja, maka diperoleh pengertian berikut ini.

Definisi 2.2.4. *Diberikan ruang metrik-ruang metrik* (X,d_1) *dan* (Y,d_2). *Pemetaan* $T:X\to Y$ *dikatakan* ***kontinu seragam*** *(uniformly continuous) pada* $A\subset X$, *jika untuk setiap* $\varepsilon>0$ *terdapat* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *sehingga untuk setiap* $x,y\in A$ *dengan* $d_1(x,y)<\delta$ *berakibat* $d_2(T(x),T(y))<\varepsilon$.

Dapat ditunjukkan bahwa pemetaan kontinu seragam pada X merupakan pemetaan kontinu pada X, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Selanjutnya diberikan teorema pemetaan kontinu pada ruang metrik yang menyatakan hubungan pemetaan kontinu dengan barisan konvergen dan hubungan pemetaan kontinu seragam dengan barisan Cauchy.

Teorema 2.2.3. *Diberikan ruang metrik* (X,d_1) *dan* (Y,d_2). *Pemetaan* $T:X\to Y$ *kontinu di* $a\in X$ *jika dan hanya jika untuk setiap barisan* $\{x_n\}\subset X$ *yang konvergen ke a berakibat barisan* $\{T(x_n)\}$ *konvergen ke* $T(a)$.

Teorema 2.2.4. *Diberikan ruang metrik* (X,d_1) *dan* (Y,d_2). *Jika* $T:X\to Y$ *pemetaan kontinu seragam pada X dan* $\{x_n\}\subset X$ *barisan Cauchy, maka* $\{T(x_n)\}$ *barisan Cauchy.*

2.3 Ruang Metrik-*D*

Pada bagian ini diberikan konsep dasar ruang metrik tergeneralisasi yang diperkenalkan oleh Sedghi dan Shobe, sebagai modifikasi dari ruang metrik tergeneralisasi yang diperkenalkan oleh Dhage.

Definisi 2.3.1. *Diberikan X himpunan tak kosong.*

(i) *Fungsi* $\rho:X\times X\times X\to \mathbb{R}^+$ *dengan sifat, untuk setiap* $x,y,z,a\in X$ *berlaku:*

(G1) $\rho(x,y,z)\geq 0$,

(G2) $\rho(x,y,z)=0$ *jika dan hanya jika* $x=y=z$,

(G3) $\rho(x,y,z)=\rho(p\{x,y,z\})$, *(simetri) dengan p merupakan fungsi permutasi pada* X^3, *dan*

(G4) $\rho(x,y,z)\leq\rho(x,y,a)+\rho(a,z,z)$,

disebut ***metrik tergeneralisasi pada*** *X, disingkat,* ***metrik-D***.

(ii) *Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik-D* ρ, *dituliskan dengan* (X,ρ), *disebut* ***ruang metrik tergeneralisasi***, *disingkat,* ***ruang metrik-D***.

Diberikan ruang metrik biasa (R,d). Jika didefinisikan fungsi $\rho:X\times X\times X\to R^+$ dengan $\rho(x,y,z)=\text{maks}\{d(x,y),d(y,z),d(z,x)\}$ (atau $\rho(x,y,z)=d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$), untuk setiap $x,y,z\in R$, maka dapat ditunjukkan bahwa (R,ρ) merupakan ruang metrik-*D*. Selanjutnya, (R,ρ) disebut **ruang metrik-*D* biasa**.

Teorema 2.3.1. *Setiap ruang metrik dapat dibentuk menjadi ruang metrik-D.*
Bukti: Diberikan ruang metrik (X,d) sebarang dan didefiniskan fungsi $\rho : X \times X \times X \to R^{+}$ dengan $\rho(x,y,z) = \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$, untuk setiap $x,y,z \in X$. Diambil sebarang $x,y,z \in X$, maka berlaku:

(G1) $\rho(x,y,z) = \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \geq 0$, sebab $d(x,y),\ d(y,z),\ d(z,x) \geq 0$;

(G2) $\rho(x,y,z) = \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} = 0$
$\Leftrightarrow d(x,y) = 0, d(y,z) = 0,$ dan $d(z,x) = 0$
$\Leftrightarrow x = y, y = z,$ dan $z = x \ \Leftrightarrow x = y = z$;

(G3) $\rho(x,y,z) = \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} = \rho(p\{x,y,z\})$ sebab $d(x,y) = d(y,x), d(y,z) = d(z,y),$ dan $d(z,x) = d(x,z)$;

(G4)
$$\begin{aligned} \rho(x,y,z) &= \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} \\ &\leq \text{maks}\{d(x,y) + d(z,z), d(y,a) + d(a,z), d(z,a) + d(a,x)\} \\ &\leq \text{maks}\{d(x,y), d(y,a), d(a,x)\} + \text{maks}\{d(a,z), d(z,z), d(z,a)\} \\ &= \rho(x,y,a) + \rho(a,z,z), \end{aligned}$$
untuk setiap $a \in R$.

Jadi, (X,ρ) merupakan ruang metrik-*D*. Analog dapat ditunjukkan bahwa (X,ρ) dengan $\rho(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$, untuk setiap $x,y,z \in X$ merupakan ruang metrik-*D*. Selanjutnya, ruang metrik-*D* (X,ρ) disebut **ruang metrik-*D* standar**.

Lemma 2.3.1. *Diberikan* (X,ρ) *ruang* metrik-*D*. *Untuk setiap* $x,y \in X$ *berlaku* $\rho(x,x,y) = \rho(x,y,y)$.

Konsep bola terbuka di dalam ruang metrik diperluas di dalam ruang metrik-*D* sebagai berikut.

Definisi 2.3.2. *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ). *Untuk setiap bilangan* $r > 0$ *didefinisikan:* $B_{\rho}(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y,y) < r\}$. *Selanjutnya,* $B_{\rho}(x,r)$ *disebut* ***bola (pejal) terbuka di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ) ***dengan pusat*** *x* ***dan jari-jari*** *r, disingkat,* ***bola terbuka-D****.*

Pengertian himpunan terbuka, himpunan tertutup, dan himpunan terbatas di dalam ruang metrik-*D* diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.3. *Diberikan* (X,ρ) *ruang metrik-D dan* $A \subset X$.

(i) *Himpunan A dikatakan* ***terbuka di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ)*, disingkat,* ***terbuka-D****, jika untuk setiap* $x \in A$*, terdapat bilangan* $r > 0$ *sehingga* $B_{\rho}(x,r) \subset A$.

(ii) *Himpunan A dikatakan* ***tertutup di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ)*, disingkat,* ***tertutup-D****, jika* A^{c} *terbuka-D.*

(iii) *Himpunan* A *dikatakan* ***terbatas di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ), *disingkat,* ***terbatas-D****, jika terdapat bilangan* $r>0$ *sehingga* $\rho(x,y,y)<r$, *untuk setiap* $x,y\in A$.

Diperhatikan ruang metrik (X,d) dan barisan $\{x_n\}\subset X$. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen, katakan konvergen ke $x\in X$, yaitu $d\left(x_n,x\right)\to 0$ untuk $n\to\infty$, maka di dalam ruang metrik-*D* standar (X,ρ) diperoleh $\rho(x_n,x_n,x)\to 0$, untuk $n\to\infty$. Demikian pula bahwa, jika $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy, yaitu $d(y_m,y_n)\to 0$ untuk $m,n\to\infty$, maka di dalam ruang metrik-*D* standar (X,ρ), diperoleh $\rho(y_n,y_n,y_m)\to 0$, untuk $m,n\to\infty$.

Berdasarkan uraian di atas, dibangun konsep kekonvergenan dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik-*D* dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.4. *Diberikan* (X,ρ) *ruang metrik-D dan barisan* $\{x_n\}\subset X$.

(i) *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* ***konvergen di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ) ***ke*** $x\in X$, *disingkat,* ***konvergen-D****, jika* $\rho(x_n,x_n,x)=\rho(x,x,x_n)\to 0$, *untuk* $n\to\infty$.
Jika demikian halnya, dikatakan bahwa ***barisan*** $\{x_n\}$ ***mempunyai limit*** x *untuk* $n\to\infty$ *dan dituliskan dengan* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, *sedangkan* x *disebut* ***limit*** *barisan* $\{x_n\}$. *Barisan yang tak konvergen-D dikatakan* ***divergen-D****.*

(ii) *Barisan* $\{x_n\}$ *disebut* ***barisan Cauchy di dalam ruang metrik-D*** (X,ρ), *disingkat,* ***barisan Cauchy-D****, jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat* $n_0\in\mathbb{N}$ *sehingga* $\rho(x_n,x_n,x_m)<\varepsilon$, *untuk setiap* $m,n\geq n_0$.

Pada Definisi 2.3.4 (i), $\rho(x_n,x_n,x)=\rho(x,x,x_n)\to 0$ untuk $n\to\infty$, berarti bahwa, untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n\geq n_0$ berlaku $\rho(x,x,x_n)<\varepsilon$. Hal ini ekuivalen dengan pernyataan, untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m,n\geq n_0$ berlaku $\rho(x,x_n,x_m)<\varepsilon$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan penelitian dari buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas konsep ruang metrik dan konsep ruang metrik-*D*, dan selanjutnya melakukan kajian terhadap konsep-konsep tersebut untuk mengkonstruksi pemetaan kontinu, pemetaan kontinu seragam, dan teorema titik tetap Banach pada ruang metrik-*D*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan ruang metrik (X,d), ruang metrik-*D* standar (X,ρ), dan $x \in X$ sebarang. Untuk setiap bilangan $r > 0$ dapat ditunjukkan bahwa $B_\rho(x,r) \subset B(x,r)$. Hal ini merupakan generalisasi Teorema 2.1.1 yang secara lengkap diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 4.1 *Diberikan* (X,ρ) *ruang metrik-D. Setiap bola terbuka-D di dalam* (X,ρ) *merupakan himpunan terbuka-D.*

Selanjutnya diberikan generalisasi Teorema 2.1.2, yaitu sifat dari operasi himpunan-himpunan terbuka-*D* di dalam ruang metrik-*D* berikut ini.

Teorema 4.2 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ). *Jika* τ *menyatakan koleksi semua himpunan terbuka-D di dalam X, maka:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$,

(iii) untuk sebarang $\sigma \subset \tau$ *berlaku* $\cup_{A\in\sigma} A \in \tau$.

Dari Definisi 2.3.3 diketahui bahwa komplemen himpunan terbuka-*D* merupakan himpunan tertutup-*D*, demikian pula sebaliknya. Berdasarkan hal tersebut diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 4.3 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ). *Jika* ξ *menyatakan koleksi semua himpunan tertutup-D di dalam X, maka:*

(i) $\emptyset, X \in \xi$,

(ii) $A, B \in \xi \Rightarrow A \cup B \in \xi$,

(iii) untuk sebarang $\varsigma \subset \xi$ *berlaku* $\cap_{C\in\varsigma} C \in \xi$.

Selanjutnya hubungan antara konsep-konsep di dalam ruang metrik dengan konsep-konsep tersebut di dalam ruang metrik-*D* standar diberikan sebagai berikut.

Lemma 4.4 *Diberikan ruang metrik* (X,d) *sebarang dan ruang metrik-D standar* (X,ρ).

(i) Untuk setiap $A \subset X$ *berlaku: A terbuka* $\Leftrightarrow$ *A terbuka-D*

(ii) Barisan $\{x_n\} \subset X$ *konvergen jika dan hanya jika* $\{x_n\}$ *konvergen-D.*

(iii) Barisan $\{x_n\} \subset X$ *merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika* $\{x_n\}$ *barisan Cauchy-D di dalam ruang metrik-D standar* (X,ρ).

Sifat dari barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik-*D* diberikan sebagai berikut.

Teorema 4.5 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ) *dan barisan Cauchy-D* $\{x_n\}\subset X$ *. Jika terdapat barisan bagian dari* $\{x_n\}$ *yang konvergen-D, maka* $\{x_n\}$ *konvergen-D ke titik limit yang sama.*

Teorema 4.6 *Diberikan* (X,ρ) *ruang metrik-D, dan barisan* $\{x_n\}\subset X$ *. Jika barisan* $\{x_n\}$ *konvergen-D, maka* $\{x_n\}$ *merupakan barisan Cauchy-D.*

Konvers dari Teorema 4.6 belum tentu benar. Diberikan himpunan $X=(0,1]$ dan d metrik biasa pada $\Re$. Jelas bahwa $((0,1],d)$ merupakan ruang metrik dan $((0,1],\rho)$ merupakan ruang metrik-*D* dengan ρ metrik-*D* biasa pada $\Re$. Diambil barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset(0,1]$; $n=1,2,3,\ldots$. Jelas pula bahwa barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ divergen di dalam ruang metrik $((0,1],d)$. Menurut kontraposisi Lemma 4.5 (ii), $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ divergen-*D* di dalam ruang metrik-*D* $((0,1],\rho)$. Di pihak lain, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ barisan Cauchy dan menurut Lemma 4.4 (iii), $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ barisan Cauchy-*D*. Jadi, di dalam ruang metrik-*D*, barisan Cauchy-*D* belum tentu konvergen-*D*. Jika setiap barisan Cauchy-*D* merupakan barisan konvergen-*D*, maka ruang metrik-*D* (X,ρ) dikatakan **lengkap-*D***. Ruang metrik-*D* biasa $(\Re,\rho)$ merupakan ruang metrik-*D* lengkap-*D*.

4.1 Pemetaan Kontinu-*D* dan Pemetaan Kontinu-*D* Seragam

Diberikan ruang metrik (X,d) dan ruang metrik-*D* standar (X,ρ). Untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$, jika $d(x,a)<\varepsilon$, maka

$$\rho(x,x,a)=\text{maks}\{d(x,x),d(x,a),d(a,x)\}<\varepsilon,$$

untuk setiap $x,a\in X$. Berdasarkan hal ini, dapat dikonstruksi definisi pemetaan kontinu pada ruang metrik-*D* yang merupakan generalisasi dari konsep pemetaan kontinu pada ruang metrik.

Definisi 4.1.1 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ_1) *dan* (Y,ρ_2). *Pemetan* $T:X\to Y$ *dikatakan **kontinu** (continuous) **di** (at)* $a\in X$ *, disingkat, **kontinu-D**, jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan* $\delta>0$ *sehingga untuk setiap* $x\in X$ *dengan sifat* $\rho_1(x,x,a)<\delta$ *berlaku* $\rho_2(T(x),T(x),T(a))<\varepsilon$ *.*
*Selanjutnya, pemetaan T dikatakan **kontinu-D pada** (on)* $A\subset X$ *, jika T kontinu-D di setiap* $a\in A$ *.*

Definisi 4.1.1 ekuivalen dengan: pemetaan $T:X\to Y$ dikatakan kontinu-*D* di a , jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga, jika $x\in B_{\rho_1}(a,\delta)$ berakibat $T(x)\in B_{\rho_2}(T(a),\varepsilon)$. Jelas bahwa bilangan δ tersebut ditentukan oleh titik a dan ε. Jika terdapat bilangan $\delta>0$ yang hanya ditentukan oleh bilangan $\varepsilon>0$ saja, maka dapat dikonstruksi pengertian kontinu seragam pada ruang metrik-*D* berikut ini.

Definisi 4.1.2 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ_1) *dan* (Y,ρ_2). *Pemetan* $T: X \to Y$ *dikatakan* ***kontinu-D seragam*** *(uniform D-continuous), jika untuk setiap* $\varepsilon \in (0,1)$ *terdapat* $\delta \in (0,1)$ *sehingga untuk setiap* $x, y \in X$ *dengan sifat* $\rho_1(x,x,y) < \delta$ *berakibat* $\rho_2\left(T(x),T(x),T(y)\right) < \varepsilon$.

Dapat ditunjukkan bahwa pemetaan kontinu-*D* seragam pada X merupakan pemetaan kontinu-*D*, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Selanjutnya dikonstruksi generalisasi Teorema 2.2.3 dan 2.2.4, yaitu teorema yang menyatakan hubungan pemetaan kontinu-*D* dengan barisan konvergen-*D* dan hubungan pemetaan kontinu-*D* seragam dengan barisan Cauchy-*D* pada ruang metrik-*D* berikut ini.

Teorema 4.1.3 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ_1) *dan* (Y,ρ_2). *Pemetan* $T: X \to Y$ *kontinu-D di* $a \in X$ *jika dan hanya jika setiap barisan* $\{x_n\} \subset X$ *yang konvergen-D ke a berakibat barisan* $\{T(x_n)\}$ *konvergen-D ke* $T(a)$.

Bukti: $(\Rightarrow)$ Diketahui T kontinu-*D* di $a \in X$. Artinya, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan sifat $\rho_1(x,x,a) < \delta$ berlaku $\rho_2\left(T(x),T(x),T(a)\right) < \varepsilon$. Oleh karena itu, jika diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subset X$ yang konvergen-*D* ke *a*, maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $\rho_1(x_n,x_n,a) < \delta$. Menurut hipotesis, diperoleh $\rho_2\left(T(x_n),T(x_n),T(a)\right) < \varepsilon$. Jadi, $\{T(x_n)\}$ konvergen-*D* ke $T(a)$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui bahwa setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ yang konvergen-*D* ke *a* berakibat barisan $\{T(x_n)\}$ konvergen-*D* ke $T(a)$. Akan ditunjukkan bahwa T kontinu-*D* di $a \in X$. Andaikan T tidak kontinu-*D* di a. Berarti terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli n terdapat $x_n \in X$ dengan sifat $\rho_1\left(x_n,x_n,a\right) < 1/n$, tetapi $\rho_2\left(T(x_n),T(x_n),T(a)\right) \geq \varepsilon_0$. Dengan demikian, diperoleh barisan $\{x_n\} \subset X$ yang konvergen-*D* ke a, tetapi barisan $\{T(x_n)\} \subset Y$ tidak konvergen-*D* ke $T(a)$. Kontradiksi. Jadi, T kontinu-*D* di a. ■

Teorema 4.1.4 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ_1) *dan* (Y,ρ_2). *Jika* $T: X \to Y$ *kontinu-D seragam pada X dan* $\{x_n\} \subset X$ *barisan Cauchy-D, maka* $\{T(x_n)\}$ *barisan Cauchy-D.*

Bukti: Diketahui *T* kontinu-*D* seragam pada *X*. Artinya, untuk setiap $\varepsilon \in (0,1)$ terdapat $\delta \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan sifat $\rho_1(x,x,y) < \delta$ berakibat $\rho_2\left(T(x),T(x),T(y)\right) < \varepsilon$. Diambil sebarang barisan Cauchy-*D* $\{x_n\} \subset X$, maka untuk bilangan positif δ tersebut di atas ada bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berakibat $\rho(x_n,x_n,x_m) < \delta$.

Menurut yang diketahui, maka diperoleh $\rho_2\left(T(x_n),T(x_n),T(x_m)\right)<\varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon\in(0,1)$. Jadi, $\{T(x_n)\}$ barisan Cauchy-*D*. ■

4.2 Teorema Titik Tetap Banach pada ruang metrik-*D*

Di dalam ruang metrik, salah satu contoh pemetaan kontinu adalah pemetaan kontraksi. Diberikan ruang metrik (X,d) dan pemetaan $T:X\to X$. Jika T pemetaan kontraksi, maka untuk setiap $x,y,z\in X$ terdapat bilangan-bilangan $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in(0,1)$ sehingga berlaku:

$$d(T(x),T(y))\le\alpha_1 d(x,y),$$
$$d(T(y),T(z))\le\alpha_2 d(y,z), \text{ dan}$$
$$d(T(z),T(x))\le\alpha_3 d(z,x).$$

Selanjutnya, diperhatikan ruang metrik-*D* standar (X,ρ). Jika dipilih $a=\text{maks}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, maka diperoleh $\alpha\in(0,1)$ dan berlaku:

$$\begin{aligned}\rho\left(T(x),T(y),T(z)\right) &= d\left(T(x),T(y)\right)+d\left(T(y),T(z)\right)+d\left(T(z),T(x)\right)\\ &\le \alpha d(x,y)+\alpha d(y,z)+\alpha d(z,x)\\ &\le \alpha\left(d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)\right)=\alpha\left(\rho(x,y,z)\right).\end{aligned}$$

Berdasarkan hal ini dikonstruksi pengertian pemetaan kontraksi di dalam ruang metrik-*D* sebagai berikut.

Definisi 4.2.1 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ) *dan pemetaan* $A:X\to X$. *Pemetan A disebut* ***pemetaan kontraksi-D****, jika terdapat bilangan* $k\in(0,1)$ *sehingga berlaku* $\rho(A(x),A(y),A(z))\le k\,\rho(x,y,z)$, *untuk setiap* $x,y,z\in X$.

Pemetaan kontraksi-*D* merupakan pemetaan kontinu. Sifat ini diberikan di dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.2.2 *Diberikan ruang metrik-D* (X,ρ) *dan pemetaan* $A:X\to X$. *Jika A pemetaan kontraksi-D maka A kontinu-D.*

Bukti: Diambil sebarang barisan konvergen-*D* $\{x_n\}\subset X$, katakan konvergen-*D* ke $x\in X$. Artinya, untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap bilangan asli $n\ge n_0$ berlaku $\rho(x_n,x,x)<\varepsilon$. Menurut yang diketahui, *A* pemetaan kontraksi-*D*, maka terdapat bilangan $k\in(0,1)$ sehingga

$$\rho(A(x_n),A(x),A(x))\le k\,\rho(x_n,x,x)<k\varepsilon,$$

untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ dan bilangan asli $n\ge n_0$. Ini berarti bahwa $A(x_n)$ konvergen ke $A(x)$. Jadi, pemetaan kontraksi-*D* *A* kontinu. ■

Dapat ditunjukkan pula bahwa pemetaan kontraksi-*D* pada ruang metrik-*D* merupakan pemetaan kontinu-*D* seragam.

Selanjutnya, akan dikonstruksi generalisasi Teorema Titik Tetap Banach pada ruang metrik-*D*. Untuk efisiensi, di dalam penulisan selanjutnya digunakan notasi-notasi: $Ax=A(x)$, $A^2x=A(A(x))$, ..., $A^{n+1}(x)=A(A^n(x))$.

Teorema 4.2.3 (*Perluasan Teorema Banach*) *Diberikan* (X,ρ) *ruang metrik-D lengkap-D. Pemetaan kontraksi-D* $A: X \to X$ *mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti: Diberikan $x_0 \in X$ dan dimisalkan:

$$x_1 = Ax_0,\;\; x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\;\; x_3 = Ax_2 = A^3x_0,\; \ldots,\; x_n = A(x_{n-1}) = A^n(x_0);$$

dengan $n \in N$.

Klaim bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy-*D*.

Bukti klaim. Diberikan bilangan-bilangan asli $n \le m$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_n,x_m) &= \rho(A^nx_0,A^nx_0,A^mx_0) \le k^n\rho(x_0,x_0,x_{m-n});\; k\in(0,1)\\ &\le k^n[\rho(x_0,x_0,x_1)+\rho(x_1,x_1,x_2)+...+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n-1},x_{m-n})];\; k\in(0,1)\\ &\le k^n\rho(x_0,x_0,x_1)[1+k+...+k^{m-n-1}];\; k\in(0,1)\\ &\le k^n\rho(x_0,x_0,x_1)\frac{1}{1-k};\; k\in(0,1).\end{aligned}$$

Karena $k\in(0,1)$, maka untuk $n\to\infty$ diperoleh $k^n\rho(x_0,x_0,x_1)\frac{1}{1-k}\to 0$. Jadi, $\rho(x_n,x_n,x_m)<\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon>0$. Dengan kata lain, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy-*D*.

Selanjutnya, karena (X,ρ) lengkap-*D* maka barisan $\{x_n\}$ konvergen-*D*, katakan konvergen-*D* ke $x\in X$. Lebih lanjut, karena *A* kontinu-*D* maka

$$Ax = A(\lim_{n\to\infty}x_n) = \lim_{n\to\infty}Ax_n = \lim_{n\to\infty}x_{n+1} = x.$$

Diperoleh bahwa *x* titik tetap dari *A*. Berikutnya, ditunjukkan bahwa *x* tunggal. Misalkan ada $x,y\in X$ sehingga $Ax=x$ dan $Ay=y$. Diperoleh

$$\rho(Ax,Ax,Ay)\le k\rho(x,x,y) = k\rho(Ax,Ax,Ay).$$

Karena $k\in(0,1)$, maka $\rho(Ax,Ax,Ay)=0$. Akibatnya,

$$\rho(x,x,y)=\rho(Ax,Ax,Ay)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Jadi, pemetaan kontraksi *A* mempunyai titik tetap tunggal. ■

Akibat dari Teorema 4.2.3 diberikan berikut ini.

Akibat 4.2.4 *Diberikan ruang metrik-D lengkap-D* (X,ρ) *dan pemetaan* A *yang terdefinisi pada X. Jika salah satu dari* A^n $(n=1,2,3,...)$ *merupakan pemetaan kontraksi, maka A mempunyai titik tetap tunggal.*

Bukti: Diambil A^m $(m\in\{1,2,3,...\})$ pemetaan kontraksi. Menurut Teorema 4.2.3, terdapat titik tetap tunggal dari A^m, katakan $A^m(x)=x$. Akibatnya,

$$A(x) = A(A^m(x)) = A^m(A(x)).$$

Ini berarti bahwa $A(x)$ juga merupakan titik tetap dari A^m. Karena titik tetap dari A^m tunggal, maka $A(x)=x$. Ini berarti bahwa *x* merupakan titik tetap tunggal dari *A*. Jadi, *A* mempunyai titik tetap tunggal. ■

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bruckner, A. M, Bruckner, J. B, & Thomson, B. S., 1997, *Real Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.

[2]. Kreyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York.

[3]. Limaye, B. V., 1981, *Functional Analysis*, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[4]. Royden, H. L., 1989, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York.

[5]. Sedghi S., Shobe, N., & Zhou, H., 2007, "A common fixed point theorem in D^*-metric spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2007, Article ID 27906, 13 pages.