Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal. 1-10

PERKIRAAN SELANG KEPERCAYAAN UNTUK PARAMETER PROPORSI PADA DISTRIBUSI BINOMIAL

Jainal, Nur Salam, Dewi Sri Susanti
Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lambung Mangkurat
Email: jainalj1a111071@gmail.com

ABSTRAK

Selang kepercayaan adalah sebuah selang antara dua angka yang diperoleh dari perkiraan titik sebuah parameter. Karena besar nilai parameter tidak diketahui, sehingga yang dipakai dalam perkiraan adalah sebuah peluang. Nilai parameter yang diperkirakan adalah proporsi. Tujuan penelitian ini adalah menentukan perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial. Hasil dari penelitian ini adalah perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan menggunakan metode besaran pivot dengan ukuran sampel $m \geq 30$ dan $m < 30$.

Kata Kunci: Selang Kepercayaan $(1-\alpha)$, Distribusi Binomial, Proporsi, Metode Kemungkinan Maksimum, Metode Besaran Pivot

1. PENDAHULUAN

Perkiraan parameter populasi menurut Bain & Engelhardt [1] dilakukan dengan menggunakan statistik sampel dan diwujudkan dengan dua bentuk yaitu perkiraan titik dan perkiraan selang. Perkiraan titik digunakan untuk menetapkan sebuah nilai yang sesuai untuk parameter populasi berdasarkan data sampel yang diamati. Namun perkiraan titik untuk parameter populasi tidak begitu akurat karena hanya memiliki satu nilai untuk memperkirakan nilai parameter populasinya. Oleh sebab itu, dibuatlah perkiraan selang dimana perkiraan selang mempunyai cakupan rentang nilai untuk memperkirakan nilai parameter populasinya. Dalam penentuan perkiraan selang suatu parameter populasi yang tidak diketahui, ada beberapa metode yang dapat digunakan salah satunya adalah metode besaran pivot. Metode besaran pivot digunakan untuk memperkirakan selang dari parameter yang tidak diketahui dengan menggunakan distribusi statistik sampel.

Sahoo [3] menjelaskan bahwa dalam pengamatan data sampel yang dilakukan pada suatu percobaan atau suatu data yang diperoleh akan menghasilkan distribusi tertentu. Variabel acak yang mencirikan banyaknya kejadian berhasil dalam *n* percobaan Bernoulli yang bersifat independen dan dari percobaan yang satu dengan yang lainnya memiliki nilai peluang berhasil yang sama untuk kejadiannya dikenal dengan variabel acak yang berdistribusi Binomial dengan parameter p dan n.

Menurut Walpole [4] perkiraan titik untuk parameter proporsi pada suatu percobaan Binomial diberikan oleh statistik $\hat{p}$. Dengan demikian, statistik $\hat{p}$ akan digunakan sebagai nilai perkiraan titik untuk parameter proporsi tersebut. Namun, jika parameter proporsi yang tidak diketahui itu tidak terlalu dekat pada 0 atau 1, maka dapat dibuat selang kepercayaan untuk parameter proporsinya. Berdasarkan uraian di atas, penulis ingin mengkaji tentang selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen merupakan suatu teknik untuk menentukan jenis distribusi peluang dari fungsi variabel acaknya yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 [3] *Jika X adalah variabel acak, maka nilai ekspektasi dari e^{tX} sebagai berikut:*

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{1}$$

Teorema 2.1.2 [3] *Misalkan X adalah variabel acak dengan fungsi pembangkit momen $M_X(t)$. Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka*

1. $M_{X+a}(t) = e^{at} \cdot M_X(t)$
2. $M_{bX}(t) = M_X(bt)$
3. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

2.2 Distribusi Normal

Definisi 2.2.1 [3] *Variabel acak X dikatakan berdistribusi Normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan parameter μ dan σ^2 dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma^2 > 0$, jika fungsi kepadatan peluangnya berbentuk sebagai berikut:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty < x < \infty \tag{2}$$

Teorema 2.2.2 [3] *Jika variabel acak X berdistribusi Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka fungsi pembangkit momen, rata-rata, dan variansi dari variabel acak X tersebut secara berturut-turut adalah: $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$*

2.3 Distribusi Normal Baku

Definisi 2.3 [3] *Variabel acak X berdistribusi Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ disebut distribusi Normal Baku jika $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ yang dinotasikan dengan $X \sim N(0,1)$ dan fungsi kepadatan peluangnya adalah:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; -\infty < x < \infty \tag{3}$$

2.4 Distribusi t

Teorema 2.4.1 [1] *Jika $Z \sim N(0,1)$ dan $U \sim \chi^2(v)$ dengan Z dan U adalah variabel acak bebas, maka variabel acak T didefinisikan sebagai berikut:*

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{v}}}$ merupakan sebuah nilai variabel acak T yang mempunyai distribusi t dengan $v = m - 1$, dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(t; v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \cdot \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{(v+1)}{2}}} \qquad -\infty < t < \infty \tag{4}$$

Teorema 2.4.2 [4] *Jika $\bar{x}$ dan s^2 adalah rata-rata dan ragam suatu sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_m$ berukuran m yang diambil dari suatu populasi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{m}}$ merupakan sebuah nilai variabel acak T yang berdistribusi t dengan derajat kebebasan $v = m - 1$.*

2.5 Distribusi Binomial

Definisi 2.5 [3] *Variabel acak X disebut variabel acak binomial dengan parameter p dan n, $X \sim BIN(p, n)$ jika fungsi kepadatan peluangnya berbentuk sebagai berikut:*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x}, \;\; x = 0, 1, \ldots, n \quad , \qquad 1 - p = q \tag{5}$$

Dimana $0 \;\leq\; p \;\leq\; 1$ *adalah peluang keberhasilan dari percobaan Binomial.*

2.6 Perkiraan Titik

Definisi 2.6.1 [6] *Perkiraan titik dari sebuah parameter adalah sebuah nilai statistik yang digunakan untuk memperkirakan parameter.*

Definisi 2.6.2 [4] *Statistik* $\hat{\theta}$ *dikatakan sebagai perkiraan tak bias untuk parameter* θ *bila* $E(\hat{\theta}) = \theta$.

2.7 Perkiraan Selang

Definisi 2.7.1 [6] *Selang kepercayaan adalah sebuah selang antara dua angka yang diperoleh dari perkiraan titik sebuah parameter.*

Definisi 2.7.2 [1] *Jika* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *mempunyai fungsi kepadatan peluang bersama* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m;\, \theta); \theta \in \Omega$, *dimana* Ω *merupakan ruang parameter berupa selang terbuka dalam* $\mathbb{R}$. *Dengan* $\hat{\theta}_1 = \ell(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *merupakan batas bawah selang kepercayaan dan* $\hat{\theta}_2 = u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *merupakan batas atas selang kepercayaan, maka selang kepercayaan adalah jika memperoleh suatu keadaan:*

$$\mathrm{P}[\ell(x_1, x_2, \ldots, x_m) \;<\; \theta \;<\; u(x_1, x_2, \ldots, x_m)] = \; 1 - \; \alpha$$

$$\mathrm{P}(\hat{\theta}_1 \;<\; \theta \;<\; \hat{\theta}_2) = \; 1 - \; \alpha \tag{6}$$

dengan α *adalah koefisien taraf nyata (level of significance).*

2.8 Besaran Pivot

Definisi 2.8 [1] *Jika* $\mathrm{Q} \;=\; \phi(X_1, \ldots, X_m;\, \theta)$ *adalah suatu variabel acak yang hanya membentuk fungsi dalam* $X_1, \ldots, X_m$ *dan* θ, *maka* Q *disebut suatu besaran pivot jika distribusinya tidak bergantung (bebas) pada* θ *atau parameter lain yang tidak diketahui.*

2.9 Distribusi Penarikan Sampel untuk Nilai Rata-rata

Teorema 2.9 Limit Pusat [4] *Bila sampel acak berukuran* m *ditarik dari suatu populasi yang besar atau tak hingga dengan nilai rata-rata* μ *dan variansi* σ^2, *maka nilai rata-rata sampel* $\bar{x}$ *akan menyebar menghampiri distribusi Normal dengan nilai rata-rata* $\mu_{\bar{X}} = \; \mu$ *dan simpangan baku* $\sigma_{\bar{X}} \;= \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$. *Dengan demikian,* $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{m}}$ merupakan nilai variabel acak Normal baku Z.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Herrhyanto [2] untuk menentukan perkiraan selang kepercayaan untuk sebuah parameter yang tidak diketahui dari sebuah distribusi digunakan metode besaran pivot. Langkah-langkah Metode Besaran Pivot sebagai berikut:

a) Menentukan perkiraan titik yang bersifat tak bias untuk parameter.
b) Menentukan distribusi dari perkiraan titik yang bersifat tak bias untuk parameter tersebut.
c) Menentukan besaran pivot.
d) Menentukan distribusi dari besaran pivot tersebut.
e) Mensubstitusikan besaran pivot ke dalam bentuk umum perkiraan selang dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$, yaitu:

   $$\mathrm{P}(a < besaran\; pivot < b) = 1 - \alpha$$

   Dengan a dan b adalah nilai luas daerah sebelah kiri dan kanan di bawah kurva distribusinya sebesar $\alpha/2$.
f) Melakukan perubahan bentuk pada bagian (e) sedemikian hingga akan menghasilkan bentuk sebagai berikut:

ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal. 1-10

$$\mathrm{P}(c < parameter < d) = 1 - \alpha$$

Dengan c dan d adalah dua buah bentuk statistik.

Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah tersebut:

Perkiraan Selang Kepercayaan untuk Parameter Proporsi pada Distribusi Binomial dengan Ukuran Sampel $m \geq 30$.

a) Menentukan Perkiraan Titik yang Bersifat Tak Bias untuk Parameter.

Jika $x_1, \dots, x_m$ adalah sampel acak berukuran m dan bersifat independen (saling bebas) yang berasal dari variabel acak distribusi Binomial, maka fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \;,\;\; x = 0,1,\dots,n \tag{7}$$

Fungsi likelihood dari persamaan (7) adalah:

$$L(p,n) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \tag{8}$$

Selanjutnya dari persamaan (8) diambil ln pada kedua ruasnya, sehingga:

$$\ln L(p,n) = \sum_{i=1}^{m} \ln \binom{n}{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \ln p + \left(mn - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) \ln(1-p) \tag{9}$$

Kemudian didiferensialkan persamaan (9) terhadap p dan hasilnya adalah:.

$$\frac{\partial \ln L(p,n)}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{1-p} \left(mn - \sum_{i=1}^{m} x_i\right)$$

Perkiraan titik untuk parameter p yang memaksimumkan fungsi $\ln L(p,n)$ dapat diperoleh pada saat turunan pertamanya bernilai nol, yaitu $\frac{\partial \ln L(p,n)}{\partial p} = 0$

Sehingga diperoleh:

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$$

Jadi, perkiraan titik dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum untuk p adalah $\frac{\bar{x}}{n}$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\frac{\bar{x}}{n}$ merupakan perkiraan titik yang bersifat tak bias untuk p. Jika $\frac{\bar{x}}{n}$ bersifat tak bias, maka akan ditunjukan sebagai berikut:

$$E\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = \left(\frac{1}{mn}\right) \cdot [E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_m)] \tag{10}$$

Karena variabel acak X berdistribusi Binomial dengan $E(X) = np$ sehingga persamaan (10) menjadi:

$$E\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = \left(\frac{1}{mn}\right) \cdot (np + np + \cdots + np) = \left(\frac{1}{mn}\right) \cdot (mnp) = p$$

Karena $E\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = p$, maka $\frac{\bar{x}}{n}$ adalah perkiraan titik yang bersifat tak bias untuk p.

b) Menentukan Distribusi dari Perkiraan Titik yang Bersifat Tak Bias untuk Parameter.

Dalam hal ini akan ditentukan distribusi dari perkiraan titik $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ dengan menggunakan pendekatan kepada distribusi Normal. Diketahui bahwa X berdistribusi Binomial dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\ ; x = 0, 1, \dots, n \text{ dimana } \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \tag{11}$$

Kemudian digunakan pendekatan *Stirling* untuk $n!, x!$, dan $(n-x)!$, yaitu:

1. $n! = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-n}\, n^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}$
2. $x! = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-x}\, x^{x+\left(\frac{1}{2}\right)}$
3. $(n-x)! = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-(n-x)}\, (n-x)^{(n-x)+\left(\frac{1}{2}\right)}$

Selanjutnya ketiga hasil pendekatan di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (11), sehingga menjadi:

$$f(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-n}\, n^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-x}\, x^{x+\left(\frac{1}{2}\right)} (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-(n-x)}\, (n-x)^{(n-x)+\left(\frac{1}{2}\right)}} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{(n-x)+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \left(\frac{np}{x}\right)^{x+\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{(n-x)+\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} N}$$

Dengan:

$$N = \left(\frac{x}{np}\right)^{x+\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n-x}{nq}\right)^{(n-x)+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\ln N = \left(x + \left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{np}\right) + \left(n - x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n-x}{nq}\right)$$

Misalkan:

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

(i) $x = np + z\sqrt{npq}$

(ii) $\dfrac{x}{np} = 1 + z\sqrt{\dfrac{q}{np}}$

(iii) $n - x = n - np - z\sqrt{npq} = nq - z\sqrt{npq}$

(iv) $\dfrac{n-x}{nq} = 1 - z\sqrt{\dfrac{p}{nq}}$

Sehingga:

$$\ln N = \left(np + z\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + z\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + \left(nq - z\sqrt{npq} + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 - z\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$$

Dengan menggunakan deret Maclaurin diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\ N = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}z^2(p+q) - \frac{1}{6}z^3\frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{np}} + \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{4}z^2\left(\frac{q}{np}\right) + \frac{1}{6}z^3\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{nq}} - \frac{1}{2}z\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{4}z^2\left(\frac{p}{nq}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} N = e^{\frac{z^2}{2}}$$

Sehingga:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Karena $z = \dfrac{x - np}{\sqrt{npq}}$ maka:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot npq}} \cdot exp\left[-\frac{1}{2npq}(x - np)^2\right] \tag{12}$$

Persamaan (12) merupakan fungsi kepadatan peluang distribusi Normal dengan $\mu = np$ dan $\sigma^2 = npq$ atau dapat ditulis $X \sim N(np, npq)$

Kemudian menentukan distribusi dari $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ dengan teknik fungsi pembangkit momen, yaitu:

$$M_{\frac{\bar{X}}{n}}(t) = exp\left(pt + \frac{1}{2}\frac{pq}{mn}t^2\right) \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan fungsi pembangkit momen untuk distribusi Normal dengan $\mu = p$ dan $\sigma^2 = \frac{pq}{mn}$ atau dapat ditulis $\frac{\bar{x}}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{mn}\right)$.

c) Menentukan Besaran Pivot untuk Ukuran Sampel $m \geq 30$

Misalkan besaran pivotnya adalah:

$$Y = \frac{\left(\frac{\bar{\bar{x}}}{n} - p\right)}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}}$$

d) Menentukan Distribusi dari Besaran Pivot.

Untuk menentukan distribusi dari besaran pivot digunakan teknik fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

$$M_Y(t) = \left(exp\left(\frac{-t \cdot p}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}}\right)\right) \cdot exp\left(p \cdot \frac{t}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}} + \frac{1}{2} \cdot t^2\right) \tag{14}$$

Karena $\frac{\bar{X}}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{mn}\right)$, maka fungsi pembangkit momen dari $\frac{\bar{X}}{n}$ yang ditransformasi menjadi fungsi pembangkit momen untuk distribusi Normal Baku, $\frac{\bar{X}}{n} \sim N(0,1)$ adalah:

$$M_Y(t) = \left(exp\left(\frac{-t \cdot 0}{\sqrt{1}}\right)\right) \cdot exp\left(0 \cdot \frac{t}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$= exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \tag{15}$$

Persamaan (15) merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ (distribusi Normal Baku), sehingga $Y = \frac{\left(\frac{\bar{X}}{n} - p\right)}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}} \sim N(0,1)$.

ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal. 1-10

e) Mensubstitusikan Besaran Pivot ke Dalam Bentuk Umum Perkiraan Selang dengan Tingkat Kepercayaan $(\mathbf{1-\alpha})$.

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} < Y < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\frac{\overline{X}}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

f) Melakukan Perubahan Bentuk pada Bagian (e).

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{mn}} < p < \frac{\overline{X}}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{mn}}\right) = 1 - \alpha$$

g) Menetapkan Batas Bawah dan Batas Atas Perkiraan Selang Kepercayaan untuk Parameter Proporsi pada Distribusi Binomial dengan Ukuran Sampel $\boldsymbol{m \geq 30}$.

Karena nilai p tidak diketahui, maka perkiraan titik p adalah $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ sehingga perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan ukuran sampel $m \geq 30$ dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ adalah:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\overline{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\overline{X}}{n}\right)}{mn}} < p < \frac{\overline{X}}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\overline{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\overline{X}}{n}\right)}{mn}}\right) = 1 - \alpha \qquad (16)$$

dengan:

$\frac{\overline{X}}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\overline{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\overline{X}}{n}\right)}{mn}}$ adalah batas bawah perkiraan

$\frac{\overline{X}}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\overline{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\overline{X}}{n}\right)}{mn}}$ adalah batas atas perkiraan

Berikutnya adalah Menentukan Perkiraan Selang Kepercayaan untuk Parameter Proporsi pada Distribusi Binomial dengan Ukuran Sampel $\boldsymbol{m < 30}$.

a. Menentukan Besaran Pivot untuk Ukuran Sampel $\boldsymbol{m < 30}$.

Misalkan besaran pivotnya adalah:

$$T = \frac{\frac{\overline{X}}{n} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}}$$

b. Menentukan Distribusi dari Besaran Pivot.

Diketahui bahwa X adalah variabel acak yang berdistribusi Binomial, sehingga dengan pendekatan Stirling pada langkah sebelumnya diperoleh $X \sim N(np, npq)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\bar{X}$ berdistribusi Normal

Dengan teknik fungsi pembangkit momen, maka:

$$M_{\bar{X}}(t) = exp\left(npt + \frac{1}{2}npq\frac{t^2}{m}\right) \tag{17}$$

Persamaan (17) merupakan fungsi pembangkit momen untuk distribusi Normal dengan $\mu = np$ dan $\sigma^2 = \frac{npq}{m}$ atau dapat ditulis $\bar{X} \sim N\left(np, \frac{npq}{m}\right)$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $\frac{\bar{X}}{n}$ berdistribusi Normal.

Diketahui bahwa pada langkah sebelumnya $\frac{\bar{X}}{n} \sim N\left(p, \frac{pq}{mn}\right)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\frac{\bar{X}}{n} - p$ juga berdistribusi Normal.

Dengan menggunakan teknik fungsi pembangkit momen, maka:

$$M_{\frac{\bar{X}}{n}-p}(t) = exp(-pt) \cdot M_{\frac{\bar{X}}{n}}(t) \ = exp\left(\frac{1}{2}\frac{pq}{mn}t^2\right) \tag{18}$$

Persamaan (18) merupakan fungsi pembangkit momen untuk distribusi Normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = \frac{pq}{mn}$ atau dapat ditulis $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{pq}{mn}\right)$.

sehingga, $\frac{\frac{\bar{X}}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}} \sim N(0,1)$

Dalam hal ini $s^2 = \frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}$ dan $\sigma^2 = \frac{pq}{mn}$ maka: $(m-1)\frac{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}{\frac{pq}{mn}} \sim \chi^2(m-1)$

Dengan demikian, $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{m-1}}} = \frac{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}-p\right)}{\sqrt{\frac{pq}{mn}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}{(m-1)\frac{pq}{mn}}}} = \frac{\frac{\bar{X}}{n}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}}$

c. Mensubstitusikan Besaraan Pivot ke Dalam Bentuk Umum Perkiraan Selang dengan Tingkat Kepercayaan $(\mathbf{1-\alpha})$.

$$\mathrm{P}\left(-t_{\alpha/2(m-1)} < T < t_{\alpha/2(m-1)}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left(-t_{\alpha/2(m-1)} < \frac{\frac{\bar{X}}{n} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}} < t_{\alpha/2(m-1)}\right) = 1 - \alpha$$

d. Melakukan Perubahan Bentuk pada Bagian (c).

$$\mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}}{n} - t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}} < p < \frac{\bar{X}}{n} + t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{mn}}\right) = 1 - \alpha$$

e. Menetapkan Batas Bawah dan Batas Atas dari Perkiraan Selang Kepercayaan untuk Parameter Proporsi pada Distribusi Binomial dengan Ukuran Sampel $\boldsymbol{m < 30}$.

Karena $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$, maka perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ untuk ukuran sampel $m < 30$ adalah:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}}{n} - t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}} < p < \frac{\bar{X}}{n} + t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}}\right) = 1-\alpha \qquad (19)$$

dengan:

$$\frac{\bar{X}}{n} - t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}}$$ adalah batas bawah perkiraan

$$\frac{\bar{X}}{n} + t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}}$$ adalah batas atas perkiraan

Dari hasil langkah-langkah metode besaran pivot didapat bahwa perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan ukuran sampel $m \geq 30$ dan $m < 30$ adalah pada persamaan (16) dan (19).

4. KESIMPULAN

Perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan ukuran sampel $m \geq 30$ dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ adalah:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}} < p < \frac{\bar{X}}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}}\right) = 1-\alpha$$

Perkiraan selang kepercayaan untuk parameter proporsi pada distribusi Binomial dengan ukuran sampel $m < 30$ dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ adalah:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}}{n} - t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}} < p < \frac{\bar{X}}{n} + t_{\alpha/2(m-1)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{X}}{n}\right)\left(1-\frac{\bar{X}}{n}\right)}{mn}}\right) = 1-\alpha$$

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bain, L. J. & Max Engelhardt. 1992. *Introduction To Probability and Mathematical Statistic Second Edition*. Duxbury. USA.

[2] Heryanto, Nar. 2013. *Statistika Inferensial Secara Teoritis*. Yrama Widya. Bandung.

[3] Sahoo, P. 2008. *Probability and Mathematical Statistic.* University of Louisuille. USA.

[4] Walpole, R. E. 1995. *Pengantar Statistika. Edisi ke-3*. Gramedia Jakarta.

[5] Walpole, R. E., R. H. Myers, S. L. Myers, dan K. Ye. 2012. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists 9th Edition. Boston.* United States of America. Prentice Hall.

[6] Weiss, Neil A. 2012. *Introductory Statistics 9th Edition*. Arizona State University. USA.