Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.1 (2015) Hal. 40-46

IDEAL *FUZZY* RING

Nailah, Saman Abdurrahman, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika
Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Banjarbaru 70714, Kalsel
Email: nailah_math09@yahoo.com

ABSTRAK

Pada saat ini penelitian pada ideal ring tidak hanya ada pada strukturnya tetapi dapat dipadukan dengan konsep himpunan *fuzzy* yaitu pada ideal *fuzzy* ring. Penelitian ini membuktikan sifat-sifat yang menyatakan hubungan antara ideal ring dan ideal *fuzzy* ring. Penelitian dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber, baik buku maupun jurnal yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Berdasarkan penelitian yang dilakukan diperoleh sifat-sifat dari ideal *fuzzy* ring adalah jika μ ideal *fuzzy* di ring R dan $\mu(x) < \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $\mu(x-y) = \mu(x) = \mu(y-x)$. Sifat-sifat yang menyatakan hubungan antara ideal ring dan ideal fuzzy ring adalah suatu subset *fuzzy* merupakan ideal *fuzzy* di R jika dan hanya jika level subset μ_t merupakan ideal di R, jika I adalah ideal di R maka terdapat μ yang merupakan ideal fuzzy ring di R sedemikian sehingga $\mu_t = I$ serta sifat kesamaan dua level subset dari suatu subset fuzzy di ring adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$, dan jika μ ideal *fuzzy* di ring R maka level ideal dari μ adalah $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n} = R$.

Kata kunci: ring, ideal, *fuzzy*, level ideal

1. PENDAHULUAN

Aljabar adalah salah satu cabang dari ilmu matematika. Salah satu teori yang dipelajari dalam aljabar adalah teori ring. Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner, dimana dengan operasi pertama membentuk grup komutatif sedangkan dengan operasi kedua berlaku sifat assosiatif dan terhadap operasi pertama dan kedua berlaku sifat distributif kiri dan kanan. Diberikan *R* ring dan *I* subset tak kosong dari *R*, dengan *I* subgrup terhadap operasi pertama dan pada operasi kedua untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku ra , $ar \in I$ disebut dengan ideal.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 1.1 [1]

Suatu ring R adalah suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu terhadap operasi pertama (+) dan operasi kedua (•) memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(1) *Operasi pertama (R, +) adalah grup komutatif*
(2) *Operasi kedua (R, •) berlaku sifat assosiatif*
(3) *Terhadap operasi pertama dan kedua, memenuhi sifat distributif yaitu untuk setiap a, b, c $\in$ R berlaku:*
    (i) *Distributif kiri:* $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$
    (ii) *Distributif kanan:* $(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$

Ring yang bersifat komutatif terhadap operasi kedua adalah ring komutatif, yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.2 [2]
Ring R disebut ring komutatif, jika untuk setiap a, b $\in$ R berlaku ab = ba.

Himpunan bagian tak kosong dari suatu ring disebut subring jika himpunan bagian tersebut merupakan ring terhadap operasi yang sama dengan *R*, yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.3 [2]
Misalkan R adalah suatu ring dan S subset tak kosong dari R. S disebut subring dari R, jika merupakan ring terhadap operasi biner yang sama dengan R.

Suatu subring yang memenuhi sifat tertentu akan membentuk suatu ideal yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.4 [4]
Diberikan ring R, I subset tak kosong dari R. I disebut ideal dari R jika memenuhi:
(1) *untuk setiap a, b $\in$ I, berlaku $a - b \in I$*
(2) *untuk setiap r $\in$ R, untuk setiap a $\in$ I berlaku:*
    (i) $ra \in I$ ... *ideal kiri*
    (ii) $ar \in I$ ... *ideal kanan*

Seiring dengan perkembangan ilmu aljabar, saat ini penelitian pada ideal ring tidak hanya ada pada strukturnya tetapi dapat dipadukan dengan konsep himpunan *fuzzy*. Himpunan *fuzzy* diperkenalkan oleh Lothfi A. Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai suatu fungsi himpunan *X* tak kosong ke dalam selang tertutup [0,1]. Sejak saat itu banyak peneliti yang melakukan penelitian dengan cara memadukan konsep aljabar dan himpunan *fuzzy*. Salah satunya yaitu W. B. Vasanta Kamdasamy pada tahun 2003 memperkenalkan *fuzzyfikasi* pada struktur ideal ring, sehingga muncul definisi-definisi di dalam ring *fuzzy* yaitu subring *fuzzy* dan ideal *fuzzy* pada ring.

Definisi 1.5 [3]
Diberikan $\mu \in F(R)$ dari ring R. Subset fuzzy μ disebut subring fuzzy dari R jika untuk setiap x, y $\in$ R berlaku:
(1) $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$
(2) $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$

Suatu subset *fuzzy* $\mu \in F(R)$ dari ring *R* disebut ideal *fuzzy* dari *R* jika memenuhi definisi berikut:

Definisi 1.6 [3]
Diberikan $\mu \in F(R)$ dari ring R disebut ideal fuzzy dari ring R jika untuk setiap x, y $\in$ R berlaku:
(1) $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$
(2) $\mu(xy) \geq max\{\mu(x), \mu(y)\}$

Definisi 1.7 [3]
Diberikan $\mu \in F(X)$ dan $t \in [0, 1]$, dengan himpunan $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ disebut dengan level subset-t pada suatu subset fuzzy μ.

Selanjutnya, dalam ideal *fuzzy* dikenal level ideal yang merupakan ideal dari suatu ring. Level ideal merupakan bagian khusus dari level subset dimana tidak semua level subset merupakan level ideal. Suatu level subset (μ_t) dikatakan level ideal jika terdapat $0_R \in \mu_t$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.8 [3]
Diberikan ideal fuzzy μ dari ring R. Ideal μ_t disebut level ideal jika $\mu(0_R) \geq t$ dengan untuk setiap $t \in [0,1]$.

Berdasarkan konsep ideal ring serta ideal fuzzy ring, maka penulis ingin mengetahui bagaimana hubungan antara ideal ring dan ideal *fuzzy* ring.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literature dari berbagai sumber, baik buku mau pun jurnal yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Prosedur penelitian dimulai dengan Mengumpulkan bahan-bahan mengenai ring, ideal, subring *fuzzy*, dan ideal *fuzzy* ring, mempelajari ring dan ideal beserta sifat-sifatnya, mempelajari himpunan *fuzzy* pada ring, mempelajari definisi ideal *fuzzy* ring, membuktikan sifat-sifat ideal *fuzzy* ring yang berhubungan dengan ideal ring, menarik kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Ideal dan Ideal *Fuzzy* Ring

Berikut ini akan dibuktikan sifat-sifat yang menyatakan hubungan ideal dan ideal *fuzzy* ring.

Teorema 3.1.1
Diberikan ring R dan $\mu \in F(R)$ adalah ideal fuzzy di ring R. Jika $\mu(x) < \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in R$, maka berlaku:

(1) $\mu(x - y) = \mu(x)$
(2) $\mu(x) = \mu(y - x)$
(3) $\mu(x - y) = \mu(y - x)$

Bukti:

(1) Diketahui R ring dan $\mu \in F(R)$ adalah ideal fuzzy di ring R. Jika $\mu(x) < \mu(y)$, akan dibuktikan $\mu(x - y) = \mu(x)$.
Diambil sebarang $x, y \in R$, maka:
   (i) Berdasarkan Definisi 1.6(1) maka $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$. Karena diketahui $\mu(x) < \mu(y)$ sedemikian sehingga, $\mu(x - y) \geq \mu(x)$.
   (ii) Diketahui $\mu(x) = \mu(x + 0_R)$, dengan $0_R = y - y$ sedemikian sehingga $\mu(x + 0_R) = \mu(x + (y + (-y))$. Karena diketahui R ring maka R merupakan grup komutatif terhadap operasi pertama, sedemikian sehingga $\mu(x) = \mu(y + (x - y)$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 1.6(1) $\mu(x) \geq \min\{\mu(y), \mu(x - y)\}$. Karena diketahui $\mu(x) < \mu(y)$, maka $\mu(x) \geq \mu(x - y)$ atau $\mu(x - y) \leq \mu(x)$.

   Berdasarkan (i) dan (ii), maka $\mu(x - y) = \mu(x)$ untuk setiap $x, y \in R$.

(2) Diketahui R ring $\mu \in F(R)$ adalah ideal fuzzy di ring R. Jika $\mu(x) < \mu(y)$, akan dibuktikan $\mu(x) = \mu(y - x)$.

Diambil sebarang $x, y \in R$, maka:

(i) Diketahui $\mu(x) = \mu(-x)$. Karena diketahui R ring maka R merupakan grup komutatif sedemikian sehingga diperoleh $\mu(x) = \mu((y-x) + (-y))$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 1.6(1) maka $\mu(x) \geq \min\{\mu(y-x), \mu(-y)\}$ dan karena diketahui maka $\mu(x) = \min\{\mu(y-x), \mu(y)\}$. Karena diketahui $\mu(x) < \mu(y)$, maka $\mu(x) \geq \mu(y-x)$.

(ii)Berdasarkan Definisi 1.6(1) maka $\mu(y-x) \geq min\{\mu(y), \mu(x)\}$. Karena diketahui $\mu(x) < \mu(y)$ sedemikian sehingga, $\mu(y-x) \geq \mu(x)$.

Berdasarkan (i) dan (ii), maka $\mu(y-x) = \mu(x)$ untuk setiap $x, y \in R$.

(3) Diketahui R ring $\mu \in F(R)$ adalah ideal fuzzy di ring R. Jika $\mu(x) < \mu(y)$, akan dibuktikan $\mu(x-y) = \mu(y-x)$.
Berdasarkan Teorema 3.1.1(1) $\mu(x-y) = \mu(x)$ dan Teorema 3.1.1(2) $\mu(y-x) = \mu(x)$ maka $\mu(x-y) = \mu(y-x)$. ■

Selanjutnya diberikan hubungan ideal yang didefinisikan oleh suatu level subset dari ring R dan ideal *fuzzy*, yang ditunjukkan oleh teorema berikut:

Teorema 3.1.2

Diberikan ring R dan $\mu \in F(R)$. Level subset μ_t adalah ideal di R untuk setiap $t \in [0,1]$ jika dan hanya jika μ adalah ideal fuzzy di R.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui R ring dan $\mu \in F(R)$ dan μ_t adalah ideal di R untuk setiap $t \in [0,1]$. Akan dibuktikan μ adalah ideal fuzzy di R yaitu jika memenuhi Definisi 1.6.

(i) Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian sehingga,
$\mu(x_0 - y_0) < \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$.
Misalkan $t_0 = 1/2[\mu(x_0 - y_0) + \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}]$, maka
$\min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\} > t_0 > \mu(x_0 - y_0)$ sedemikian sehingga
$\mu(x_0) > t_0$ atau $\mu(y_0) > t_0$ dan $\mu(x_0 - y_0) < t_0$.
Berdasarkan Definisi 1.7, maka $x_0, y_0 \in \mu_{t0}$ dan $x_0 - y_0 \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t0} bukan ideal di R. Kontradiksi dengan μ_t ideal di R untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya
$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in R$.

(ii) Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian sehingga,
$\mu(x_0 y_0) < \max\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$
Misalkan $t_0 = 1/2[\mu(x_0 y_0) + \max\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}]$, maka
$\max\{\mu(x_0), \mu(y_0)\} > t_0 > \mu(x_0 y_0)$ sedemikian sehingga
$\mu(x_0) > t_0$ atau $\mu(y_0) > t_0$ dan $\mu(x_0 y_0) < t_0$
Berdasarkan Definisi 1.7, maka $x_0\ atau\ y_0 \in \mu_{t0}$ dan $x_0 y_0 \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t0} bukan ideal di R. Kontradiksi dengan μ_t ideal di R untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya
$\mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in R$.

Jadi, dari (i) dan (ii) μ adalah ideal fuzzy di ring R.

($\Longleftarrow$)Diketahui R ring dan $\mu \in F(R)$. μ adalah ideal fuzzy di R. Akan dibuktikan μ_t adalah ideal di R untuk setiap $t \in [0,1]$.

Diambil sebarang $t \in [0,1]$ maka menurut Definisi 1.7 $\mu_t = \{x \in R | \mu(x) \geq t\}$ dan berdasarkan $\mu(0_R) \geq \mu(x)$. Akibatnya $\mu(0_R) \geq \mu(x) \geq t$ sehingga $0_R \in \mu_t$, dengan kata lain $\mu_t \subseteq R$ dan $\mu_t \neq \emptyset$.
μ adalah ideal fuzzy di R, maka berdasarkan Definisi 1.7 untuk setiap $x, y \in \mu_t$ $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$ sedemikian sehingga berlaku:
(i) $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ yang mengakibatkan $x - y \in \mu_t$
(ii) $\mu(xy) \geq max\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ yang mengakibatkan $xy \in \mu_t$
Jadi, dari (i) dan (ii) maka μ_t adalah ideal di ring R. ■

Teorema 3.1.3
Diberikan ring R. Jika I adalah ideal di R, maka untuk setiap $t \in (0,1]$ terdapat μ yang merupakan ideal fuzzy ring di R sedemikian sehingga $\mu_t = I$.
Bukti: Diketahui R ring dan I adalah ideal di R. Akan dibuktikan untuk setiap $t \in (0,1]$ terdapat μ yang merupakan ideal *fuzzy* ring di R sedemikian sehingga $\mu_t = I$. Misalkan $\mu \in F(R)$ yang didefinisikan dengan,

$$\mu(x) = \begin{cases} t & , \quad x \in I \\ 0 & , \quad x \in R - I \end{cases}$$

untuk setiap $t \in (0,1]$.
(i) Diambil sebarang $x, y \in R$.
 (a) Jika $x, y \in I$, maka $\mu(x) = t$ dan $\mu(y) = t$. Karena I ideal maka $x - y \in I$ dan $xy \in I$ Sedemikian sehingga,

$$\mu(x - y) = t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$
$$\mu(xy) = t = \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

 (b) Jika $x, y \in R - I$, maka $\mu(x) = 0$ dan $\mu(y) = 0$. Sedemikian sehingga $\mu(x - y) \geq 0 \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
 $\mu(xy) \geq 0 \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$
 (c) Jika $x \in I$ dan $y \in R - I$ atau $x \in R - I$ dan $y \in I$, maka $\mu(x) = t$ dan $\mu(y) = 0$ atau $\mu(x) = 0$ dan $\mu(y) = t$. Karena I ideal maka $x - y \in I$ atau $x - y \notin I$ dan $xy \in I$. Sedemikian sehingga, tanpa mengurangi perumuman maka:

$$\mu(x - y) \geq 0 \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$
$$\mu(xy) = t = \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

(ii) Akan dibuktikan $\mu_t = I$.
 Ambil sebarang $x \in I$ maka $\mu(x) = t$. Karena $\mu(x) = t$, maka berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $x \in \mu_t$ sedemikian sehingga $I \subseteq \mu_t$.
 Selanjutnya ambil sebarang $y \in \mu_t$ maka berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $\mu(y) \geq t$. Karena $\mu(y) \geq t$ dan $Im(\mu) = \{0, t\}$ maka $\mu(y) = t$. Sehingga akibatnya $y \in I$ dan $\mu_t \subseteq I$.
 Karena $I \subseteq \mu_t$ dan $\mu_t \subseteq I$ maka $\mu_t = I$.
Dari (i) dan (ii) maka terbukti untuk setiap $t \in (0,1]$ terdapat μ yang merupakan ideal *fuzzy* ring di R sedemikian sehingga $\mu_t = I$. ■

Setiap ring R paling sedikit mempunyai ideal yaitu $\{0\}$ dan R. Berdasarkan Teorema 4.13, maka R adalah ideal di ring R sedemikian sehingga $\mu_t = R$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Berikut ini diberikan sifat kesamaan dari dua level subset dari suatu subset *fuzzy* di ring R:

Teorema 4.1.4
Diberikan ideal fuzzy μ di ring R. Dua level subset μ_{t_1} dan μ_{t_2} dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Diketahui μ ideal *fuzzy* di ring R dan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$dengan $t_1 < t_2$. Akan dibuktikan tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.
Andaikan ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$ maka $\mu(x) \geq t_1$ dan $\mu(x) < t_2$ sedemikian sehingga $x \in \mu_{t_1}$ dan $x \notin \mu_{t_2}$.
Berdasarkan Definisi 1.7 maka $\mu_{t_1} \neq \mu_{t_2}$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui yaitu $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$, sehingga pengandaian salah. Seharusnya tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.
($\Longleftarrow$) Diketahui μ ideal *fuzzy* di ring R dan tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$. Akan dibuktikan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$dengan $t_1 < t_2$.
Diambil sebarang $x \in \mu_{t_2}$ maka berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $\mu(x) \geq t_2$. Karena $t_1 < t_2$ maka $\mu(x) \geq t_2 > t_1$ sedemikian sehingga $\mu(x) > t_1$. Akibatnya berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $x \in \mu_{t_1}$ sehingga diperoleh $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$
Selanjutnya diambil sebarang $x \in \mu_{t_1}$ maka berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $\mu(x) \geq t_1$. Karena diketahui tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$ maka $\mu(x) > t_2$. Akibatnya berdasarkan Definisi 1.7 berlaku $x \in \mu_{t_2}$ sehingga diperoleh $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$
Karena $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$dan $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$ maka $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$dengan $t_1 < t_2$.

Setelah sifat kesamaan dua level subset dari suatu subset *fuzzy* di ring *R*, berikut diberikan sifat dari koleksi ideal di ring *R* dengan koleksi semua level subset μ di *R*.
Teorema 4.1.5
Diberikan μ ideal fuzzy di ring R. Jika $Im(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dengan $t_0 > t_1 > \cdots > t_n$, maka level ideal dari μ membentuk rantai yaitu $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n} = R$.
Bukti:
Diketahui μ ideal *fuzzy* di ring *R* dan $Im(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dengan $t_0 > t_1 > \cdots > t_n$. Akan dibuktikan level ideal μmembentuk rantai yaitu $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n} = R$.
Diketahui $t_0 > t_1 > \cdots > t_n$ maka $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n}$. Selanjutnya, karena diketahui μ adalah level ideal maka $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n}$ adalah ideal di *R*. Karena μ_{t_n} adalah ideal terbesar dari *R* maka $\mu_{t_n} = R$. ∎

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:
1. Jika μ ideal *fuzzy* di ring R dan $\mu(x) < \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$.

2. Suatu subset *fuzzy* merupakan ideal *fuzzy* di *R* jika dan hanya jika level subset μ_t merupakan ideal di *R*.
3. Jika *I* adalah ideal di *R* maka terdapat μ yang merupakan ideal fuzzy ring di *R* sedemikian sehingga $\mu_t = I$.
4. Sifat kesamaan dua level subset μ_{t_1} dan μ_{t_2} dari suatu subset fuzzy di ring adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in R$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.
5. Jika μ ideal *fuzzy* di ring *R* maka level ideal dari μ membentuk rantai $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \cdots \subseteq \mu_{t_n} = R$ dengan $t_0 > t_1 > \cdots > t_n$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra, 7thEdition.* Addisin-Wesley, USA.

[2] Jaisingh, L.R. & Jr., F. Ayres. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra.* Second Edition. Schaum's Outline Series, McGRAW-HILL.

[3] Kandasamy, W. B Vasantha. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra.*Department of Mathematics Indian Institute of Technology Madras Chennia. India.

[4] Paley, H. & P.M. Weichsel. 1966. *A First Course in Abstract Algebra, 3rdEdition.*University of Illinois, New York.