Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 1-5

HOMOMORFISMA DARI LEVEL *SUBNEAR-RING FUZZY*

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 36 Banjarbaru
E-mail: saman@unlam.ac.id

ABSTRAK

Dalam makalah ini diperkenalkan konsep *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy.* Hasil dari penelitian ini adalah image dan pre-image homomorfisma *near-ring* dari *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy* adalah *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy.*

Kata kunci: *near-ring, subnear-ring, level subnear-ring*

1. PENDAHULUAN

Penelitian yang berkaitan dengan aljabar abstrak yang dikaitkan dengan teori *fuzzy* telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya Abou-Zaid [1] memperkenalkan konsep subnear-*ring fuzzy* dan ideal *fuzzy near-ring*. Menurut Clay [3], dan Satyanarayana *at al* [6], *near-ring* merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa asioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada *near-ring*. Operasi pertama pada *near-ring* sebarang tidak harus *abelian*, dan terhadap operasi pertama dan kedua, cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Ide penelitian Abou-Zaid [1], banyak melahirkan penelitian-penelitian baru, diantaranya: Abdurrahman *at al* [2] memperkenalkan konsep ideal *fuzzy near-ring*. Pada penelitian ini, akan disajikan hasil kajian teori mengenai *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy* yang dibangun oleh homomorfisma *near-ring*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan.

Definisi 2.1. [3, 6] *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner + dan . disebut near ring kiri, jika memenuhi:*

(1). $(R, +)$ *adalah grup* (*tidak harus grup abelian*),

(2). $(R, .)$ *adalah semigrup,*

(3). *berlaku sifat distributif kiri, yaitu untuk setiap* $x,y,z \in \mathrm{R}$ *berlaku:*

$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$

Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, dan $x{\cdot}y$ dapat juga ditulis xy. Pada *near-ring*, grupnya tidak harus abelian terhadap operasi +, maka dalam mendefinisikan ideal, subgrupnya harus merupakan subgrup normal.

Definisi 2.2. [3] *Diberikan near-ring R. Subgrup H di R disebut subnear-ring di R, jika memenuhi $HH \subseteq H$.*

Definisi 2.3. [5] *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan* α *disebut subset fuzzy dari X jika* $\alpha : X \to [0, 1]$. *Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy dari X dinotasikan dengan* $\mathbb{F}(X)$.

Definisi 2.4. [5] *Diberikan* α *adalah subset fuzzy dari himpunan tidak kosong X dan* $t \in [0, 1]$. *Himpunan* $\alpha_t = \{x \in X | \alpha(x) \geq t\}$ *disebut level subset dari* α.

Definisi 2.5. [5] *Diberikan* φ *adalah fungsi dari X ke Y,* $\alpha \in \mathbb{F}(X)$ *dan* $\beta \in \mathbb{F}(Y)$. *Didefinisikan subset fuzzy* $\varphi_\alpha \in \mathbb{F}(Y)$ *dan* $\varphi^{-1}{}_\beta \in \mathbb{F}(Y)$ *berturut-turut sebagai berikut:*

$$\varphi_\alpha(y) = \begin{cases} \sup\{\alpha(x) | x \in X, \varphi(x) = y\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

untuk setiap $y \in Y$, *dan* $\varphi^{-1}{}_\beta(x) = \beta[\varphi(x)]$ *untuk setiap* $x \in R$. *Selanjutnya* φ_α *disebut* ***image*** *dari* α *di bawah* φ, *dan* φ^{-1} *disebut* ***pre-image*** *dari* β *di bawah* φ.

Selanjutnya, jika $\varphi^{-1}{}_\beta(x) \neq \emptyset$ maka notasi φ_α (y) dapat dituliskan sebagai berikut: $\varphi_\alpha(y) = \sup\{\alpha(x) \mid x \in X, \varphi(x) = y\}$.

Definisi 2.6. [4] *Subset fuzzy* α *di near-ring R disebut subnear-ring fuzzy, jika* $\alpha(x - y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, *dan* $\alpha(xy) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ *untuk setiap x,y∈R.*

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Metodelogi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan mengenai *near-ring*, *subnear-ring*, *near-ring fuzzy*, dan *subnear-ring fuzzy.*

Pada tahap awal dipelajari tentang konsep dasar dari *near-ring fuzzy*, dan *subnear-ring fuzzy.* Konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu pada saat mengkonstruksi sifat *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy*.

Selanjutnya, dibuktikan beberapa lemma/teorema yang terkait dan ditentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat-sifat *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy*, dan sifat-sifat tersebut akan dibuktikan kebenarannya pada pembahasan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membuktikan sifat-sifat dari *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy*, berikut diberikan sifat pre-image dan image homomorfisma *near-ring* dalam *subnear-ring fuzzy.*

Teorema 4.1. *Diberikan near-ring N_1 dan N_2, dan $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$ adalah suatu homomorfisma near-ring. Jika β adalah subnear-ring fuzzy di N_2, maka $\varphi^{-1}{}_\beta$ adalah subnear-ring fuzzy di N_1.*

Bukti:

Diambil sebarang x, y$\in N_1$, maka

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}{}_\beta(x-y) &= \beta[\varphi(x-y)]\\ &= \beta[\varphi(x)-\varphi(y)]\\ &\geq \min\{\beta[\varphi(x)], \beta[\varphi(y)]\}\\ &= \min\{\varphi^{-1}{}_\beta(x), \varphi^{-1}{}_\beta(y)\},\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}{}_\beta(xy) &= \alpha[\varphi(xy)]\\ &= \alpha[\varphi(x)\,\varphi(y)]\\ &\geq \min\{\alpha[\varphi(x)], \alpha[\varphi(y)]\}\\ &= \min\{\varphi^{-1}{}_\beta(x), \varphi^{-1}{}_\beta(y)\}.\end{aligned}$$

Jadi, $\varphi^{-1}{}_\beta$ adalah *subnear-ring fuzzy* di N_1. ■

Teorema 4.2. *Diberikan near-ring N_1 dan N_2, dan $\theta : N_1 \rightarrow N_2$ adalah suatu homomorfisma near-ring. Jika α adalah subnear-ring fuzzy di N_1, maka θ_α adalah subnear-ring fuzzy di N_2.*

Bukti:

Diberikan sebarang $x^\star, y^\star, i^\star \in \theta(N_1) \subseteq N_2$ dengan $x_0 \in \theta^{-1}(x^\star)$, $y_0 \in \theta^{-1}(y^\star)$, dan $i_0 \in \theta^{-1}(i^\star)$ sedemikian hingga

$$\alpha(x_0) = \sup_{n\in\theta^{-1}(x^\star)} \alpha(n),\ \alpha(y_0) = \sup_{n\in\theta^{-1}(y^\star)} \alpha(n), \text{ dan } \alpha(i_0) = \sup_{n\in\theta^{-1}(i^\star)} \alpha(n)$$

Mengingat θ_α adalah *image* dari α di bawah θ, maka

$$\begin{aligned}\theta_\alpha(x^\star - y^\star) &= \sup_{z\in\theta^{-1}(x^\star - y^\star)} \alpha(z)\\ &\geq \mu(x_0 - y_0)\\ &\geq \min\{\alpha(x_0), \alpha(y_0)\}\\ &= \min\{\sup_{n\in\theta^{-1}(x^\star)} \alpha(n), \sup_{n\in\theta^{-1}(y^\star)} \alpha(n)\}\\ &= \min\{\theta_\alpha(x^\star), \theta_\alpha(y^\star)\}, \text{ dan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_\alpha(x^\star y^\star) &= \sup_{z\in\theta^{-1}(x^\star y^\star)} \alpha(z)\\ &\geq \mu(x_0 y_0)\end{aligned}$$

$$\geq \min\{\alpha(x_0), \alpha(y_0)\}$$
$$= \min\{\sup_{n\in\theta^{-1}(x^\star)} \alpha(n), \sup_{n\in\theta^{-1}(y^\star)} \alpha(n)\}$$
$$= \min\{\theta_\alpha(x^\star), \theta_\alpha(y^\star)\}$$

Jadi, θ_α adalah *subnear-ring fuzzy* di N_2. ■

Berikut diberikan sifat image dan pre-image homomorfisma dari *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy*.

Lemma 4.3. *Image homomorfisma near-ring dari level subnear-ring adalah level subnear-ring.*

Bukti:

Misalkan N_1 dan N_2 adalah *near-ring*, dan $\varphi : N_1 \to N_2$ adalah suatu homomorfisma *near-ring*, dengan α_t adalah *level subnear-ring* dari N_1, maka menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.6): α adalah *subnear-ring fuzzy* dari N_1.

Akan ditujukkan $\varphi(\alpha_t)$ adalah *level subnear-ring* di N_2.

Diambil sebarang x, $y\in\varphi(\alpha_t) \subseteq N_2$, maka ada z, $w\in\alpha_t$ sedemikian hingga $\varphi(z) = x$ dan $\varphi(w) = y$.

Karena α_t adalah *level subnear-ring* dari N_1, maka $z - w$, $zw\in\alpha_t$. Akibatnya:

$$x - y = \varphi(z) - \varphi(w) = \varphi(z - w)\in\varphi(\alpha_t), \text{ dan } zw = \varphi(x)\ \varphi(y) = \varphi(xy)\in\varphi(\alpha_t).$$

Dengan kata lain $\varphi(\alpha_t)$ adalah *subnear-ring* di N_2, sehingga menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.7) terdapat *subnear-ring fuzzy* β di N_2 sedemikian sehingga *level subnear-ring* $\beta_s = \varphi^{-1}(\alpha_t)$, untuk suatu $s\in[0, 1]$. ■

Lemma 4.4. *Pre-image homomorfisma near-ring dari level subnear-ring adalah level subnear-ring.*

Bukti:

Misalkan N_1 dan N_2 adalah *near-ring*, dan $\varphi : N_1 \to N_2$ adalah suatu homomorfisma *near-ring*, dengan β_t adalah *level subnear-ring* dari N_2, maka menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.6): β adalah *subnear-ring fuzzy* dari N_2.

Akan ditujukkan $\varphi^{-1}(\beta_t)$ adalah *level subnear-ring* di N_1.

Diambil sebarang x, $y\in\varphi^{-1}(\beta_t) \subseteq N_1$, maka $\varphi(x) = x_1$ dan $\varphi(y) = y_1$ untuk suatu x_1, $y_1\in\beta_t$, sehingga:

$$x_1 - y_1 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)\in\beta_t, \text{ dan } x_1\, y_1 = \varphi(x)\ \varphi(y) = \varphi(xy)\in\beta_t.$$

Akibatnya $x - y$, $xy\in\varphi^{-1}(\beta_t)$, dengan kata lain $\varphi^{-1}(\beta_t)$ adalah *subnear-ring* di N_1, sehingga menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.7) terdapat *subnear-ring fuzzy* α di N_1 sedemikian sehingga *level subnear-ring* $\alpha_s = \varphi^{-1}(\beta_t)$, untuk suatu $s\in[0, 1]$. ■

5. KESIMPULAN

Hasil penting atau sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah, image dan pre-image homomorfisma *near-ring* dari *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy* adalah *level subnear-ring* dalam *subnear-ring fuzzy.*

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abou-Zaid. S. 1991. "*On fuzzy subnear-rings and ideals"*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 44, pp. 139-146.

[2]. Abdurrahman. S, Thresye, dan Hijriati. N. 2012. "*Ideals fuzzy near-ring"*, Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon, Vol. 6, No. 2, hal 13 – 19.

[3]. Clay. J.R, 1992, *Nearrings, geneses and applications*, Oxford, New York.

[4]. Kandasamy. W. B. V. 2003. "*Smarandache fuzzy algebra*", American Research Press Rehoboth.

[5]. Mordeson. J.N, Bhutani. K. R, and Rosenfeld. A. 2005. "*Fuzzy group theory*", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[6]. Satyanarayana. Bh, and Prasad. K. S. 2013. "*Near-ring, Fuzzy Ideals, and Graph Theory*", Taylor and Francis Group, LLC.