Jurnal Matematika Murni dan Terapan "$\varepsilon psilon$"
Vol. 07, No.01, (2013), Hal. 21 – 32

IDEAL PRIMA FUZZY NEAR-RING

Saman Abdurrahman[1], Naimah Hijriati[2] dan Thresye [3]

[1,2,3]*Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambaung Mangkurat*
Jl. A. Yani Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
E-mail: samunlam@gmail.com

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dibahas ideal prima near-ring, ideal prima fuzzy near-ring yang meliputi hubungan antara ideal prima near-ring dan ideal prima fuzzy near-ring.

Kata Kunci :Near-ring, ideal prima, ideal prima fuzzy.

Abstract. We discuss the prime ideal of near-ring, fuzzy prime ideal of near-ring which includes the relationship between prime ideal of near-ring and fuzzy prime ideal of near-ring.

Keywords :Near-ring, prime ideal, fuzzy prime ideal.

1. Pendahuluan

Near-ring yang dikontruksi oleh Pilz (1983), Clay (1992) dan Kandasamy (2002), merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa aksioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada near-ring. Operasi pertama (aditif) pada near-ring sebarang tidak harus komutatif, dan terhadap operasi pertama (aditif) dan kedua (multiplikatif), cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan. Seiring dengan perkembangan zaman, penelitian pada near-ring tidak hanya berkisar pada strukturnya tetapi mulai memadukan dengan teori lain, diantaranya dengan himpunan fuzzy yang diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965. Abou-Zaid (1991) melakukan fuzzyfikasi pada struktur near-ring, sehingga melahirkan definisi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, ideal prima fuzzy near-ring yang meliputi ideal prima fuzzy dan mendefinisikan ideal yang dibangun oleh satu elemen di near-ring secara detail, di mana definisi ini sangat berperan penting pada kajian ideal prima fuzzy near-ring. Penelitian yang dilakukan oleh Abou-Zaid, melahirkan banyak ide bagi peneliti lainnya, sehingga banyak peneliti yang mengembangkan ide dari Abou-Zaid, diantaranya: Kim S dan Kim H (1996), Jun dan Ozturk (1998) melakukan penelitian lanjutan pada ideal prima fuzzy near-ring, yang meliputi homomorfisma pada near-ring fuzzy; Young dan Hee (2002), dan Satyanarayana dan Kuncham (2005) melakukan penelitian pada ideal prima fuzzy near-ring dan memodifikasi definisi ideal yang dibangun oleh satu elemen di near-ring yang didefinisikan oleh Abou-Zaid; Moderson dkk (2003, 2005) melakukan fuzzyfikasi pada struktur semigrup dan grup, dan Kandasamy (2003) melakukan fuzzyfikasi pada struktur semigrup, grup, ring dan near-ring. Berdasarkan fenomena di atas, maka pada penelitian ini akan melanjutkan penelitian tentang ideal prima fuzzy near-ring khususnya hubungan antara ideal prima near-ring dan ideal prima fuzzy near-ring, sehingga kajian near-ring, semigrup fuzzy dan near-ring fuzzy di atas, akan di jadikan acuan utama dalam mengkaji hubungan antara keduanya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan ideal fuzzy near-ring.

Definisi 2.1. *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ disebut near ring, jika memenuhi:*

1. *$(R, +)$ adalah grup (tidak harus grup komutatif),*
2. *$(R, \cdot)$ adalah semigrup,*
3. *untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri*
   (a) *distributif kanan : $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$*
   (b) *distributif kiri : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$*

Selanjutnya yang dimaksud near-ring adalah near-ring kiri, kecuali ada keterangan lebih lanjut, $x \cdot y$ adalah xy. Pada near-ring, grupnya tidak harus komutatif terhadap operasi $+$, maka dalam mendefinisikan ideal di near-ring subgrupnya harus normal.

Definisi 2.2. *Diberikan $(R, +, \cdot)$ adalah near-ring. Subgrup normal I dari R disebut ideal dari R, jika*

1. *$RI \subseteq I$*
2. *$(r + i)s - rs \in I$ untuk setiap $r, s \in R$ dan $i \in I$*

Subgrup normal I dari R memenuhi kondisi (1) disebut ideal kiri di R, sedangkan subgrup normal I dari R memenuhi kondisi (2) disebut ideal kanan dari R.

Definisi 2.3. *Diberikan near-ring R. Ideal P dari R disebut prima, jika untuk setiap ideal I dan J dari R, $IJ \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ dan $J \subseteq P$.*

Selanjutnya, diberikan definisi dan sifat ideal darii near-ring, yang dibangkitkan oleh suatu elemen di R

Definisi 2.4. *Diberikan near-ring R dan $a \in R$. Ideal yang dibangkitkan oleh a (dinotasikan dengan $\langle a \rangle$) didefinisikan sebagai irisan dari semua ideal dari R yang memuat a.*

Lemma 2.5. *Diberikan near-ring R. Jika $\mathcal{N}_a := \{J|J \text{ ideal dari } R \text{ dan } a \in R\}$ dan $\langle a \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ dengan*
$A_{k+1} = A_k^\star \bigcup A_k^+ \bigcup A_k^0 \bigcup A_k^{++}, A_0 = \{a\},$ *dan*
$A_k^\star = \{r + x - r | r \in R, x \in A_k\},$
$A_k^+ = \{(r_1 + x)r_2 - r_1 r_2 | r_1, r_2 \in R, x \in A_k\},$
$A_k^0 = \{x - y | x, y \in A_k\},$
$A_k^{++} = \{rx | r \in R, x \in A_k\}.$

Berikut diberikan sifat yang ekuivalen dari ideal prima dari near-ring R.

Lemma 2.6. *Diberikan P adalah ideal dari near-ring R. Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen,*
1. *P adalah ideal prima.*
2. *untuk setiap ideal I dan J dari R, jika $\langle IJ \rangle$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.*
3. *untuk setiap $a, b \in R$, jika $a \notin P$ dan $b \notin P$ maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq P$.*
4. *untuk setiap ideal I dan J dari R, jika $I \supsetneq P$ dan $J \supsetneq P$ maka $IJ \nsubseteq P$.*
5. *untuk setiap ideal I dan J dari R, jika $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$ maka $IJ \nsubseteq P$.*

Definisi 2.7. *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan μ disebut subset fuzzy dari X jika $\mu : X \to [0, 1]$. Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy dari X dinotasikan dengan $\mathbb{F}(X)$ dan Image dari μ dinotasikan dengan $Im(\mu) := \{\mu(x)|x \in X\}$.*

Definisi 2.8. *Diberikan sebarang $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$, maka*
1. *$\mu = \nu$ jika dan hanya jika $\mu(x) = \nu(x)$ untuk setiap $x \in X$,*
2. *$\mu \subseteq \nu$ jika dan hanya jika $\mu(x) \leq \nu(x)$ untuk setiap $x \in X$,*
3. *$(\mu \bigcap \nu)(x) := min\{\mu(x), \nu(x)\}$ untuk setiap $x \in X$.*

Definisi 2.9. *Diberikan sebarang* $\mu \in \mathbb{F}(X)$, *dan* $t \in [0,1]$. *Level subset (t-cut) dari* μ *dinotasikan dengan* μ_t, *yang didefinisikan dengan* $\mu_t := \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$.

Lemma 2.10. *Diberikan sebarang* $\mu, \nu \in \mathbb{F}(X)$, *maka*
1. $\mu \subseteq \nu$ *maka* $\mu_a \subseteq \nu_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$,
2. $a \leq b$ *maka* $\mu_b \subseteq \mu_a$ *untuk setiap* $a, b \in [0,1]$,
3. $\mu = \nu$ *jika dan hanya jika* $\mu_a = \nu_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$.

Definisi 2.11. *Diberikan near-ring* R *dan* $\mu \in \mathbb{F}(R)$. *Subset fuzzy* μ *disebut subnear-ring fuzzy dari* R *jika jika untuk setiap* $x, y \in R$ *berlaku:*
1. $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
2. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$.
Selanjutnya, μ *disebut ideal fuzzy dari* R *jika* μ *adalah subnear-ring fuzzy dari dan untuk setiap* $x, y, z \in R$ *berlaku:*
3. $\mu(x) = \mu(y + x - y)$,
4. $\mu(xy) \geq \mu(y)$,
5. $\mu((x + z)y - xy) \geq \mu(z)$.

Suatu μ disebut ideal kiri fuzzy dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (4), sedangkan μ disebut ideal kanan fuzzy dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (5). Setelah definisi subnear-ring fuzzy dan ideal fuzzy near-ring, berikut diberikan sifat dari subnear-ring fuzzy dan ideal fuzzy near-ring.

Lemma 2.12. *Diberikan near-ring R. Jika* μ *adalah subnear-ring fuzzy dari R, maka* $\mu(0_R) \geq \mu(x)$ *dan* $\mu(-x) = \mu(x)$ *untuk setiap* $x \in R$.

Teorema 2.13. *Diberikan near-ring R. Jika I adalah ideal dari R, maka untuk setiap* $t \in (0,1]$, *ada* μ *ideal fuzzy dari R sedemikian hingga* $\mu_t = I$.

3. Hasil dan Pembahasan (IDEAL PRIMA FUZZY NEAR-RING)

Teorema 3.1. *Diberikan near-ring* R *dan* $a \in R$. *Jika* μ *adalah ideal fuzzy dari R, maka* $\mu(x) \geq \mu(a)$ *untuk setiap* $x \in \langle a \rangle$

Bukti. Misalkan μ ideal fuzzy dari R, $a \in R$, dan $\langle a \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ dimana
$A_{k+1} = A_k^{\star} \bigcup A_k^{+} \bigcup A_k^{0} \bigcup A_k^{++}, A_0 = \{a\},$ *dan*
$A_k^{\star} = \{r + x - r | r \in R, x \in A_k\},$
$A_k^{+} = \{(r_1 + x)r_2 - r_1 r_2 | r_1, r_2 \in R, x \in A_k\},$
$A_k^{0} = \{x - y | x, y \in A_k\},$
$A_k^{++} = \{rx | r \in R, x \in A_k\}.$
Akan dibuktikan $\mu(x) \geq \mu(a)$ untuk setiap $x \in \langle a \rangle$.
Untuk membuktikan permasalan di atas, cukup dibuktikan bahwa $\mu(z) \geq \mu(a)$ untuk setiap $z \in A_m (m \geq 1)$. Untuk itu, digunakan induksi pada m.
1). Untuk m = 0, maka $A_0 = \{a\}$ sehingga $\mu(x) \geq \mu(a)$ untuk setiap $x \in A_0$
2). Asumsikan bahwa $\mu(x) \geq \mu(a)$ untuk setiap $x \in A_k$
Akan ditunjukkan bahwa $\mu(x) \geq \mu(a)$ untuk setiap $x \in A_{k+1}$.
Diambil sebarang $b \in A_{k+1} = A_k^{\star} \bigcup A_k^{+} \bigcup A_k^{0} \bigcup A_k^{++}$, maka $b \in A_k^{\star}$ atau $b \in A_k^{+}$ atau $b \in A_k^{0}$ atau $b \in A_k^{++}$.
a). $b \in A_k^{\star}$ maka $b = r + x - r$ untuk suatu $r \in R$ dan $x \in A_k$, yang mengakibatkan $\mu(b) = \mu(r + x - r)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, maka $\mu(b) = \mu(x)$ sehingga berdasarkan asumsi $\mu(b) = \mu(x) \geq \mu(a)$.
b). $b \in A_k^{+}$, maka $b = (r_1 + x)r_2 - r_1 r_2$ untuk suatu $r_1, r_2 \in R$ dan $x \in A_k$, yang mengakibatkan $\mu(b) = \mu((r_1 + x)r_2 - r_1 r_2)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, maka $\mu(b) \geq \mu(x)$ sehingga berdasarkan asumsi $\mu(b) \geq \mu(x) \geq \mu(a)$.
c). $b \in A_k^{0}$, maka $b = x_1 - x_2$ untuk suatu $x_1, x_2 \in A_k$. Akibatnya $\mu(b) = \mu(x_1 - x_2)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, maka $\mu(b) \geq \min\ \{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$ sehingga berdasarkan asumsi $\mu(b) \geq \min\ \{\mu(x_1), \mu(x_2)\} \geq \mu(a)$.
d). $b \in A_k^{++}$, maka $b = rx$ untuk suatu $r \in R$ dan $x \in A_k$. Akibatnya $\mu(b) = \mu(rx)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, maka $\mu(b) \geq \mu(x)$ sehingga berdasarkan asumsi $\mu(b) \geq \mu(x) \geq \mu(a)$.
Jadi $\mu(b) \geq \mu(a)$ untuk setiap $b \in A_{k+1}$. Dari semua kasus, terbukti bahwa $\mu(b) \geq \mu(a)$ untuk setiap $b \in A_{k+1}$. Oleh karena itu dengan prinsip induksi matematika, disimpulkan bahwa $\mu(z) \geq \mu(a)$ untuk setiap $z \in A_m$ dan untuk semua bilangan bulat positif m.
Jadi,$\mu(x) \geq \mu(a)$ untuk setiap $x \in \langle a \rangle$. □

Berikut diberikan sifat yang merupakan akibat dari Teorema 3.1.

Akibat 3.2. *Diberikan μ adalah ideal fuzzy dari near-ring R. Jika I adalah ideal dari R dengan $I = \langle a \rangle = \langle b \rangle$, maka $\mu(a) = \mu(b)$.*

Bukti. Misalkan $\langle a \rangle = \langle b \rangle$. Akan dibuktikan $\mu(a) = \mu(b)$. Mengingat $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, maka $a \in \langle b \rangle$ dan $b \in \langle a \rangle$ sehingga $\mu(a) \geq \mu(b)$ dan $\mu(b) \geq \mu(a)$ yang mengakibatkan $\mu(a) = \mu(b)$. □

Selanjutnya diberikan sifat ideal fuzzy μ di R, yang berhubungan dengan R_{μ}.

Teorema 3.3. *Diberikan A subset tidak kosong dari near-ring R dan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan dengan,*

$$\mu(x) := \begin{cases} a, & x \in A \\ b, & x \in R - A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$ dan $a, b \in [0, 1]$ dengan $a > b$. Subset fuzzy μ disebut ideal fuzzy dari R jika dan hanya jika A ideal dari R sedemikian hingga $R_\mu = A$.

Bukti. $\Rightarrow$ Misalkan A subset tidak kosong dari R dan μ ideal fuzzy dari near-ring R. Akan dibuktikan A ideal dari R sedemikian hingga $R_\mu = A$.
Mengingat μ ideal fuzzy dari near-ring R, maka untuk setiap $r, s \in R$ dan $x, y \in A$ berlaku:

1. $\mu(x - y) \geq \min\ \{\mu(x), \mu(y)\} = a$. Di lain pihak, jika $x - y \in R$ maka $x - y \in A$ atau $x - y \notin A$, sehingga $\mu(x - y) \leq a$. Akibatnya $\mu(x - y) = a$, yaitu $x - y \in A$, dengan kata lain (A, +) adalah subgrup dari (R, +).
2. $\mu(r + x - r) = \mu(x) = a$. Maka $r + x - r \in A$ yang mengakibatkan (A, +) adalah subgrup normal dari (R, +).
3. $\mu(rx) \geq \mu(x) = a$. Di lain pihak, jika $rx \in R$ maka $rx \in A$ atau $rx \notin A$, sehingga $\mu(rx) \leq a$. Akibatnya $\mu(rx) = a$, yaitu $rx \in A$, dengan kata lain $RA \subseteq A$.
4. $\mu[(r+x)s - rs] \geq \mu(x) = a$. Di lain pihak, jika $(r+x)s - rs \in R$ maka $(r+x)s - rs \in A$ atau $(r+x)s - rs \notin A$, sehingga $\mu[(r+x)s - rs] \leq a$. Akibatnya $\mu[(r+x)s - rs] = a$, yaitu $(r + x)s - rs \in A$.

Jadi, A adalah ideal dari R.
Selanjutnya, akan dibuktikan $R_\mu = A$.
Mengingat A adalah ideal dari R, maka $\{0_R\} \subseteq A$ sehingga $\mu(0_R) = a$. Akibatnya,

$$R_\mu = \{x \in R | \mu(x) = \mu(0_R)\} = \{x \in R | \mu(x) = a\} = \{x \in R | x \in A\}.$$

$\Leftarrow$ Bukti sejalan dengan Teorema 2.13. □

Berikut diberikan definisi produk dua subset fuzzy dari near-ring R.

Definisi 3.4. *Diberikan near-ring R dan $\mu, \nu \in \mathbb{F}(R)$. Produk μ dan ν dinotasikan dengan $\mu \circ \nu$, yang didefinisikan dengan:*

$$(\mu \circ \nu)(x) := \begin{cases} sup(min\{\mu(y), \nu(z)\}), & x{=}yz \\ 0, & x \neq yz. \end{cases}$$

Setelah diberikan sifat ideal fuzzy dan definisi produk dua subset fuzzy di near-ring R, berikut diberikan definisi ideal prima fuzzy di R.

Definisi 3.5. *Diberikan near-ring R. Ideal fuzzy μ disebut prima fuzzy dari R, jika*

1. *μ tidak konstan,*
2. *untuk sebarang dua ideal fuzzy σ dan δ dari R, $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$ maka $\sigma \subseteq \mu$ dan $\delta \subseteq \mu$.*

Berikutnya diberikan sifat ideal prima fuzzy μ dari near-ring R, yang berhubungan dengan elemen netral 0_R dari (R, +).

Lemma 3.6. *Jika μ adalah ideal prima fuzzy di near-ring R, maka $\mu(0_R) = 1$.*

Bukti. Misalkan μ adalah ideal prima fuzzy di near-ring R. Akan dibuktikan $\mu(0_R) = 1$. Andaikan $\mu(0_R) < 1$. Mengingat μ tidak konstan, maka $\mu(a) < \mu(0_R)$ untuk suatu $a \in R$. Misalkan $\theta, \sigma \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan, untuk setiap $x \in R$.

$$\theta(x) := \mu(0_R) \text{ dan } \sigma(x) := \begin{cases} 1, & \mu(x) = \mu(0_R) \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Berdasarkan definisi θ dan σ, maka θ adalah fungsi konstan dan σ adalah fungsi karakter-

istik dari R_μ, sehingga menurut Teorema 3.3 θ dan σ adalah ideal fuzzy dari R.
Sehingga berdasarkan analisa di atas, disimpulkan

$$\mu(0_R) < 1\sigma(0_R) \text{ dan } \mu(a) < \mu(0_R) = \theta(a).$$

Jadi $\theta \nsubseteq \mu$ dan $\theta \subseteq \mu$.
Misalkan $b \in R$ dengan $(\theta \circ \sigma)(b) = \sup_{b=xy} \min \{\theta(x), \sigma(y)\}$ untuk suatu $x, y \in R$.
Akan dibuktikan min $\{\theta(x), \sigma(y)\} \leq \mu(b)$ dimana b = xy.
Selanjutnya dipertimbangkan dua kasus, yaitu $\sigma(y) = 0$ dan $\sigma(y) = 1$
Kasus 1
Misalkan $\sigma(y) = 0$, maka min $\{\theta(x), \sigma(y)\} = \min \{\mu(0_R), 0\} \leq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \leq \{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(xy) = \mu(b)$.
Kasus 2
Misalkan $\sigma(y) = 1$, maka menurut definisi $\sigma, \mu(y) = \mu(0_R)$ sehingga min $\{\theta(x), \sigma(y)\} = \min \{\mu(0_R), 1\} = \mu(y) = \mu(0_R) \leq \mu(xy) = \mu(b)$.
Berdasarkan kasus 1 dan 2, maka $(\theta \circ \sigma)(b) = \sup_{b=xy} \min \{\theta(x), \sigma(y)\} \leq \mu(b)$ untuk setiap $b \in R$ sedemikian hingga $\theta \circ \sigma \subseteq \mu$. Mengingat μ adalah ideal prima fuzzy di R, maka $\theta \subseteq \mu$ atau $\sigma \subseteq \mu$. Kontradiksi dengan $\theta \nsubseteq \mu$ dan $\sigma \nsubseteq \mu$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(0_R) \geq 1$. Mengingat $\mu(0_R) \in [0,1]$, maka $\mu(0_R) = 1$. □

Selanjutnya, μ disebut normal jika dan hanya jika $\mu(0_R) = 1$. Berikutnya diberikan sifat dari ideal prima fuzzy dari near-ring R, yang berhubungan dengan ideal normal fuzzy dari R yang merupakan akibat dari Teorema 3.6.

Akibat 3.7. *Setiap ideal prima fuzzy di near-ring adalah normal.*

Berikutnya diberikan sifat ideal prima fuzzy μ dari near-ring R, yang berhubungan dengan R_μ.

Teorema 3.8. *Diberikan near-ring R. Jika μ adalah ideal prima fuzzy dari R, maka R_μ ideal prima dari R .*

Bukti. Misalkan μ adalah ideal prima dari R, maka menurut [2], R_μ adalah ideal dari R. Akan dibuktikan R_μ adalah ideal prima dari R.
Misalkan A dan B adalah ideal dari R dengan $AB \subseteq R_\mu$ dan $\sigma, \delta \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan dengan,

$$\sigma(a) := \begin{cases} \mu(0_R), & a \in A \\ 0, & a \in R - A \end{cases} \quad \text{dan} \quad \delta(b) := \begin{cases} \mu(0_R), & b \in B \\ 0, & a \in R - B \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$, maka menurut Teorema 3.3, σ dan δ adalah ideal fuzzy dari R.
Klaim $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$.

1. Jika $(\sigma \circ \delta)(x) = 0$, maka $(\sigma \circ \delta)(x) = 0 \leq \mu(x)$ untuk setiap $x \in R$, sehingga $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$
2. Jika $(\sigma \circ \delta)(x) = \sup_{x=yz} \min\{\sigma(y), \delta(z)\}$. Berdasarkan kondisi di atas, maka min $\{\sigma(y), \delta(z)\} > 0$ dan x = yz, sehingga $\sigma(y) > 0$ dan $\delta(z) > 0$, akibatnya menurut definisi σ dan $\delta, \sigma(y), = \mu(0_R)$ dan $\delta(z) = \mu(0_R)$, sehingga $\sigma(y) = \mu(0_R) = \delta(z)$, dengan kata lain $y \in A$ dan $z \in B$.
   Jika x = yz, maka $x \in AB \subseteq R_\mu$ sehingga $\mu(x) = \mu(0_R)$. Mengingat μ adalah ideal prima dari R, maka menurut Lemma 3.6, $\mu(0_R) = 1$, akibatnya
   $$(\sigma \circ \delta)(x) \leq 1 = \mu(0_R) = \mu(x).$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $(\sigma \circ \delta)(x) \leq \mu(x)$ untuk setiap $x \in R$, dengan kata lain $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$. Mengingat μ adalah ideal prima fuzzy dari R, maka $\sigma \subseteq \mu$ atau $\delta \subseteq \mu$.
Andaikan $A \nsubseteq R_\mu$ dan $B \nsubseteq R_\mu$.

1. Jika $A \nsubseteq R_\mu$ maka ada $a \in A$ sedemikian hingga $a \notin R_\mu$. Akibatnya $\mu(a) \neq \mu(0_R)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, menurut Lemma 2.12, $\mu(0_R) \geq \mu(a)$, yang mengakibatkan $\mu(0_R) > \mu(a)$. Jadi menurut definisi σ, maka $\sigma(a) = \mu(0_R) > \mu(a)$, yang berarti $\sigma \nsubseteq \mu$.
2. jika $B \nsubseteq R_\mu$, maka ada $b \in B$ sedemikian hingga $b \notin R_\mu$. Akibatnya $\mu(b) \neq \mu(0_R)$. Mengingat μ ideal fuzzy dari R, menurut Lemma 2.12, $\mu(0_R) \geq \mu(b)$, yang mengakibatkan $\mu(0_R) > \mu(b)$. Jadi menurut definisi σ, maka $\sigma(b) = \mu(0_R) > \mu(b)$, yang berarti $\delta \nsubseteq \mu$.

Berdasarkan analisa di atas, jika $A \nsubseteq R_\mu$ dan $B \nsubseteq R_\mu$, maka $\sigma \nsubseteq \mu$, dan $\delta \nsubseteq \mu$. Kondisi ini, kontradiksi dengan $\sigma \subseteq \mu$, dan $\delta \subseteq \mu$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $A \subseteq R_\mu$ dan $B \subseteq R_\mu$, dengan kata lain R_μ adalah ideal prima dari R. $\square$

Selanjutnya diberikan sifat dari ideal prima fuzzy dari near-ring R, yang berhubungan dengan $Im\mu$.

Teorema 3.9. *Diberikan near-ring R. Jika μ adalah ideal prima fuzzy dari R, maka $|Im\mu| = 2$, dalam arti $Im(\mu) = \{s, 1\}$ dengan $s \in [0, 1)$.*

Bukti. Misalkan μ ideal prima fuzzy dari R, maka menurut Lemma 3.6, $\mu(0_R) = 1$. Akan dibuktikan $|Im(\mu)| = 2$, dalam arti $Im(\mu) = \{1, s\}$ dengan $s \in [0, 1)$.
Misalkan $a, b \in R$ dengan $\mu(a) < 1$ dan $\mu(b) < 1$.
Untuk membuktikan $|Im(\mu)| = 2$, cukup dibuktikan $\mu(a) = \mu(b)$.
Kasus I
Misalkan $\theta, \sigma \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan,

$$\theta(x) := \mu(a), \text{ dan } \sigma(x) := \begin{cases} 1, & x \in \langle a \rangle \\ 0, & x \in R - \langle a \rangle \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$, maka menurut Teorema 3.6, θ dan σ adalah ideal fuzzy dari R. Mengingat $a \in \langle a \rangle$, maka $\sigma(a) = 1$ yang mengakibatkan $\sigma(a) = 1 > \mu(a)$, dengan kata lain $\sigma \nsubseteq \mu$.
Misalkan $z \in R$ dengan $(\theta \circ \sigma)(z) = sup_{z=xy} \min \{\theta(x), \sigma(y)\}$ untuk suatu $x, y \in R$.

1. Jika $y \notin \langle a \rangle$, maka $\sigma(y) = 0$ sehingga
   $\min \{\theta(x), \sigma(y)\} = \min \{\mu(a), 0\} = 0$
   $\leq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$
   $\leq \mu(xy)$
   $=\mu(z)$.
2. Jika $y \in \langle a \rangle$, maka $\sigma(y) = 1$ sehingga
   $\min \{\theta(x), \sigma(y)\} = \min \{\mu(a), 1\} = \mu(a)$
   $\leq \mu(y)$
   $\leq \mu(xy)$
   $=\mu(z)$.

Berdasarkan analisa di atas, maka $(\theta \circ \sigma)(z) = sup_{z=xy} \min \{\theta(x), \sigma(y)\}$ untuk setiap $z \in R$. yang mengakibatkan $\theta \circ \sigma \subseteq \mu$. Mengingat μ adalah ideal prima fuzzy dari R, maka $\theta \subseteq \mu$ atau $\sigma \subseteq \mu$, tetapi dari kondisi di atas diketahui $\sigma \nsubseteq \mu$, akibatnya $\theta \subseteq \mu$ sehingga menurut definisi $\theta, \theta(b) = \mu(a) \leq \mu(b)$.
Kasus 2
Misalkan $\delta, \rho \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan,

$$\delta(x) := \mu(b), \text{ dan } \rho(x) := \begin{cases} 1, & x \in \langle b \rangle \\ 0, & x \in R - \langle b \rangle \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$, maka menurut Teorema 3.6, δ dan ρ adalah ideal fuzzy dari R.
Mengingat $b \in \langle b \rangle$, maka $\rho(b) = 1$ yang mengakibatkan $\rho(b) = 1 > \mu(b)$, dengan kata lain $\rho \nsubseteq \mu$.
Misalkan $w \in R$ dengan $(\delta \circ \rho)(w) = sup_{w=xy} \min \{\delta(x), \rho(y)\}$ untuk suatu $x, y \in R$.

1. Jika $y \notin \langle b \rangle$, maka $\rho(y) = 0$ sehingga
   $\min \{\delta(x), \rho(y)\} = \min \{\mu(b), 0\} = 0$
   $\leq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$
   $\leq \mu(xy)$
   $= \mu(w)$.

2. Jika $y \in \langle b \rangle$, maka $\rho(y) = 1$ sehingga
   $\min \{\delta(x), \rho(y)\} = \min \{\mu(b), 1\} = \mu(b)$
   $\leq \mu(y)$
   $\leq \mu(xy)$
   $= \mu(w)$.

Berdasarkan analisa di atas, maka $(\delta \circ \rho)(z) = sup_{z=xy} \min \{\delta(x), \rho(y)\}$ untuk setiap $w \in R$. yang mengakibatkan
delta $\circ\, \rho \subseteq \mu$. Mengingat μ adalah ideal prima fuzzy dari R, maka $\delta \subseteq \mu$ atau $\rho \subseteq \mu$, tetapi dari kondisi di atas diketahui $\rho \nsubseteq \mu$, akibatnya $\delta \subseteq \mu$ sehingga menurut definisi $\delta, \delta(a) = \mu(b) \leq \mu(a)$.
Berdasarkan analisa pada kasus 1 dan 2, maka $\mu(a) = \mu(b)$. □

Berikut diberikan sifat ideal prima dari near-ring R, yang berhubungan dengan ideal prima fuzzy dari R.

Teorema 3.10. *Diberikan I ideal dari near-ring R dan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan,*

$$\mu(x) := \begin{cases} 1, & x \in I \\ s, & x \in R - I \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$ dan $s \in [0, 1)$. Jika I adalah ideal prima dari R, maka μ ideal prima fuzzy dari R.

Bukti. Misalkan I adalah ideal prima dari R dan $\mu \in \mathbb{F}(R)$. Akan dibuktikan μ ideal prima fuzzy dari R.
Menurut Teorema 3.3 dan definisi μ, maka μ adalah ideal tidak konstan di R. Misalkan σ dan δ adalah ideal fuzzy dari R sedemikian hingga $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$.
Andaikan $\sigma \nsubseteq \mu$ dan $\delta \nsubseteq \mu$, maka $\sigma(x) > \mu(x)$ dan $\delta(y) > \mu(y)$ untuk suatu $x, y \in R$.
Mengingat $\sigma(x), \delta(y), \mu(x), \mu(y) \in [0, 1]$, maka $\mu(x) \neq 1$ dan $\mu(y) \neq 1$, sehingga nilai dari $\mu(x) = \mu(y) = s$. Akibatnya $x, y \in R - I$ yang berarti $x, y \notin I$, sehingga $\langle x \rangle \langle y \rangle \nsubseteq I$.
Misalkan $a = cd \in R - I$ dengan $c \in \langle x \rangle$ dan $d \in \langle y \rangle$.
Mengingat $\sigma \circ \delta \subseteq \mu$ dan $a \in R - I$, maka $(\sigma \circ \delta)(a) \leq \mu(a) = s$.

Dilain pihak,
$(\sigma \circ \delta)(a) = sup_{a=cd}$ min $\{\sigma(c), \delta(d)\}$
$\geq$ min $\{\sigma(c), \delta(d)\}$
$\geq$ min $\{\sigma(x), \delta(y)\}$
$>$ min $\{\mu(x), \mu(y)\}$
= s. Kontradiksi dengan $(\sigma \circ \delta)(a) \leq s$.
Jadi, $\sigma \subseteq \mu$ atau $\delta \subseteq \mu$, dengan kata lain μ adalah ideal prima fuzzy dari R. □

Berikut diberikan sifat ideal prima di near-ring, yang merupakan akibat dari Teorema 3.10.

Akibat 3.11. *Diberikan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ sedemikian hingga μ mempunyai dua nilai keanggotaan dan $\mu(0_R)$ = 1. Jika R_μ adalah ideal prima dari R, maka μ ideal prima fuzzy dari R.*

Akibat 3.12. *Diberikan I ideal dari near-ring R. Subset fuzzy χ_I adalah ideal prima fuzzy dari R jika dan hanya jika I ideal prima dari R.*

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian maka dapat diambil kesimpulan bahwa setiap ideal prima near-ring adalah ideal prima fuzzy near-ring dan juga sebaliknya.

Daftar Pustaka

[1] Abdurrahman S. 2010. Ideal maksimal dan ideal prima near-ring. *Jurnal Epsilon 4*, no. 2, hal 21-29.

[2] Abdurrahman S. 2011. Ideals fuzzy near-ring. *Penelitian yang didanai oleh DIPA-PNBP Universitas Lambung Mangkurat Tahun Anggaran Semester Genap 2010/2011.*

[3] Abdurrahman S, Thresye, & Hijriati N 2011. Ideal maksimal fuzzy near-ring. *Seminar dan Rapat Tahunan Bidang Ilmu Mipa (SEMIRATA BKS-PTN B)*, Banjarmasin 9 - 10 Mei 2011.

[4] Abou Zaid. 1991. On fuzzy subnear-rings and ideals. *Fuzzy Sets and Systems 44*, pp.139-146.

[5] Clay J.R. 1992. *Nearrings, geneses and applications*, Oxford, New York.

[6] Kandasamy. W.B.V. 2002. *Smarandache near-rings*, American Research Press Rehoboth.

[7] Jun. Y.B, Sapanci. M. and Ozturk. M.A, 1998. Fuzzy ideal in gamma near-ring. *Tr. J. of Math 22*, pp. 449-459.

[8] Kandasamy. W.B.V, 2003. *Smarandache fuzzy algebra*, American Research Press Rehoboth.

[9] Kim. S.D. and Kim. H.S, 1996, On fuzzy ideals of near-rings. *Bull. Korean Math. Soc 33(4)*, pp. 593-601.

[10] Mordeson, J.N, Malik D.S and Kuroki. N, 2003. *Fuzzy semigroup*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[11] Mordeson, J.N, Bhutani. K.R. and Rosenfeld. A, 2005. *Fuzzy group theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[12] Pilz. G, 1983, *Near-ring, the theory and applications 2nd ed*, North-Holland Mathematict Studies, North-Holland, Amsterdam.