METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE UNTUK SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER KOEFISIEN FUNGSI

Yuni Yulida
Program Studi Matematika FMIPA Unlam
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: y_yulida@yahoo.com

ABSTRAK

Pada tulisan ini, disajikan metode dekomposisi Adomian Laplace dan metode tersebut diterapkan untuk menentukan solusi pendekatan untuk persamaan diferensial biasa nonlinier dengan koefisien fungsi. Metode ini menggabungkan teori transformasi Laplace dan bagian nonlinier dari persamaan diferensial tersebut diuraikan dengan polinomial Adomian.
.

Kata kunci: *metode dekomposisi Adomian Laplace, persamaan diferensial biasa nonlinier koefisien fungsi*

1. PENDAHULUAN

Banyak phenomena alam yang dapat dimodelkan dalam bentuk Persamaan diferensial (PD) nonlinier, seperti model populasi satu spesies, model permintaan di bidang ekonomi, model gerak ayunan di bidang fisika dan lain-lain. Untuk dapat menjelaskan phenomena alam pada model yang berbentuk PD nonlinier tersebut diperlukan solusi model tersebut sehingga dapat diinterpretasikan dalam kehidupan nyata. Menentukan solusi PD Nonlinier secara eksak bukan hal yang mudah. Untuk itu diperlukan suatu metode pendekatan sehingga dapat diaplikasikan untuk menentukan solusi PD tersebut.

Salah satu metode pendekatan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier adalah metode dekomposisi Adomian. Pada metode ini, persamaan diferensial ditulis dalam bentuk persamaan operator. Operator yang digunakan merupakan operator diferensial.

Selanjutnya, operator diferensial pada metode dekomposisi Adomian diganti dengan operator transformasi Laplace $\mathcal{L}$ dan invers dari operator $\mathcal{L}$ adalah invers transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}$. Selanjutnya, metode ini disebut Metode Dekomposisi Adomian Laplace, karena menggabungkan teori transformasi Laplace dan bagian nonlinier dari PD diuraikan dengan polinomial Adomian. Pada tulisan ini, metode dekomposisi Adomian Laplace digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial nonlinier koefisien fungsi.

2. TINJAUN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Selanjutnya diberikan definisi persamaan diferensial biasa

Definisi 2.1.2 [9]

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebasnya disebut persamaan diferensial biasa.

Berikut diberikan definisi persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier

Definisi 2.1.4 [9]
Persamaan diferensial biasa linier orde n dengan y variabel bebas dan x variabel tak bebas adalah persamaan berbentuk

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = G(x) \qquad (2.1)$$

dengan a_n tidak sama dengan nol.

Persamaan diferensial biasa dikatakan linier, dilihat dari variable tak bebas *y*, yaitu

1. Variabel tak bebas *y* dan turunannya berderajat satu
2. Tidak terdapat perkalian variabel tak bebas *y* dan (atau) juga turunannya
3. Tidak terdapat fungsi-fungsi transenden dari *y* dan (atau) turunannya.

Definisi 2.1.6 [9]
Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linier.

2.2 Operator

Sebarang operator *L* disebut operator linier jika untuk semua fungsi *f* dan *g* memenuhi persyaratan di bawah ini :
a. *L* (*kf*) = *k L*(*f*), untuk setiap konstanta *k*
b. *L* (*f* + *g*) = *L*(*f*) + *L*(*g*),
c. *L* (*f* - *g*) = *L*(*f*) - *L*(*g*),

Operator invers L^{-1} merupakan operator linier, jika untuk semua fungsi *f* dan *g* memenuhi persyaratan di bawah ini :
a. $L^{-1}(kf) = k\,L^{-1}(f)$, untuk setiap konstanta *k*
b. $L^{-1}(f + g) = L^{-1}(f) + L^{-1}(g)$,
c. $L^{-1}(f - g) = L^{-1}(f) - L^{-1}(g)$. [8]

Operator diferensial umumnya ditulis *D*. Misalkan *y* merupakan fungsi yang diferensiabel sebanyak *n* kali dari variabel bebas *x*. Operator diferensial untuk turunan $\frac{dy}{dx}$ dinotasikan dengan *Dy*. Lebih lanjut, secara umum untuk turunan ke-*n* dari fungsi *y* terhadap *x* dinotasikan $D^n y$, yaitu

$$D^n y = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Berikut contoh notasi operator *D* digunakan pada Persamaan diferensial linier orde *n* koefisien konstan.

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y\,, \qquad (2.5)$$

dapat ditulis menjadi

$$a_n D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$
$$\Leftrightarrow (a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y\,.$$

Misalkan $L = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ merupakan operator diferensial baru, maka persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi *Ly* atau *L(y).* [9]

2.3 Metode Dekomposisi Adomian

Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier atau nonlinier adalah Metode Dekomposisi Adomian. Metode ini dikemukakan oleh seorang Ahli Ilmu Matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922-1996). Pada metode ini, persamaan diferensial yang diberikan ditulis dalam bentuk persamaan operator.

Diberikan persamaan diferensial yang dinotasikan dalam persamaan operator

$$Lu + Ru + Nu = G, \tag{2.6}$$

dengan *N* adalah operator nonlinier dan *L* adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi dari *R* yang diasumsikan dapat dibalik (invertible), *R* adalah operator diferensial linier dari orde yang kurang dari *L* dan *G* suku nonhomogen.

Persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi

$$Lu = G - Ru - Nu \tag{2.7}$$

Selanjutnya jika persamaan (2.7) menggunakan operator L^{-1} diperoleh

$$u = h + L^{-1}G - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \tag{2.8}$$

dengan h adalah solusi persamaan homogen Lu=0 dengan nilai awal atau nilai batas yang diketahui. Kemudian Adomian mendefinisikan solusi u sebagai jumlahan deret tak hingga yaitu $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$ (2.9)

Masalah lebih lanjut adalah pada dekomposisi suku nonlinier *Nu.* Adomian mendefinisikan sebagai berikut

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.10}$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\lambda^k\right)\right]_{\lambda=0},$$

Selanjutnya komponen A_n disebut polinomial Adomian, didefinisikan sebagai

$$A_0 = N(u_0)$$
$$A_1 = u_1 N'(u_0)$$
$$A_2 = u_2 N'(u_0) + \frac{u_1^2}{2} N''(u_0)$$
$$A_3 = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(u_0)$$
$$\vdots$$

Selanjutnya menggunakan Persamaan (2.8) dan (2.9) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = h + L^{-1}G - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu\ . \tag{2.11}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (2.9) dan (2.10) ke Persamaan (2.11) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = h + L^{-1}G - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Lebih lanjut, Persamaan (2.11) dapat diuraikan yaitu

$$u_0 = h + L^{-1}G$$

dan

$$u_n = -L^{-1}(Ru_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}),\ \ n = 1,2,3, \ldots.$$ [4]

2.4 Transformasi Laplace

Berikut diberikan definisi dari transformasi Laplace.

Definisi 2.4.1 [9]
Diberikan $f(t)$ fungsi dari t untuk $t > 0$. Transformasi Laplace $f(t)$ dituliskan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan didefinisikan sebagai berikut :
$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
untuk semua s sehingga integral ada.
Sebagai catatan, nilai s ini menyebabkan fungsi $F(s)$ konvergen.

Berikut ini diberikan sifat-sifat dasar transformasi Laplace yang dapat digunakan untuk mempermudah dalam proses menentukan transformasi suatu fungsi.

1. Sifat Linieritas (*Linearity property*)

Teorema 2.4.2 [2]
Jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, dan c_1 dan c_2 sebarang konstanta maka $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Bukti. Diketahui $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt$ dan
$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt.$
Untuk sebarang konstanta c_1 dan c_2,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t) + e^{-st} c_2 f_2(t)dt \\
&= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt \\
&= c_1 \mathcal{L}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(s)\} \\
&= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$■
Sifat linier ini sekaligus membuktikan bahwa transformasi Laplace $\mathcal{L}$ juga merupakan operator linier.

2. Sifat Derivatif

Teorema 2.4.3 [9]
Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka
a. Turunan pertama

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\,F(s) - f(0)$$

b. Turunan kedua

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt = s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} - f(0) \\
&= s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f'(0) - sf(0).
\end{aligned}$$

c. Secara umum untuk turunan ke-n dapat ditulis

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1} f(0).$$

Pada pembahasan sebelumnya, permasalahannya adalah diberikan suatu fungsi *f* yang didefinisikan untuk $t > 0$, kemudian ditentukan transformasi Laplce dari fungsi tersebut yang dinyatakan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Sekarang permasalahannya adalah diberikan fungsi F kemudian tentukan invers transformasi, yang dinyatakan dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Berikut diberikan definisi invers transformasi Laplace.

Definisi 2.4.4 [9]

Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$ dan ditulis: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Fungsi invers transformasi Laplace tunggal. Berikut diberikan pada teorema berikut

Teorema 2.4.5 [9]

Jika f dan g fungsi kontinu untuk $t \geq 0$ dan mempunyai transformasi Laplace F maka $f(t) = g(t)$ untuk setiap $t \geq 0$.

Sifat Linieritas (*Linearity property*) juga berlaku pada invers transformasi Laplace. Suatu transformasi Laplace misalkan $F(s)$ dinyatakan

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s).$$

Andaikan $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$, $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$, $\ldots$, $f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$, maka fungsi $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$ mempunyai transformasi Laplace yaitu $F(s)$. Dengan menggunakan sifat ketunggalan diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}.$$

Jadi invers transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ juga merupakan operator linier. [2]

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan di dalam penelitian ini adalah studi literatur. Materi yang digunakan terdiri dari buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas tentang persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier, teori transformasi Laplace dan terapannya, metode dekomposisi Adomian, metode dekomposisi Adomian Laplace.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi (2.7), yaitu $Lu = G - Ru - Nu$ dengan *N* adalah operator nonlinier dan *L* adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi dari *R*, *R* adalah operator diferensial linier dari orde yang kurang dari *L* , dan *G* suku nonhomogen.

Selanjutnya persamaan (2.7) dikenakan operator transformasi Laplace $\mathcal{L}$ diperoleh

$$\mathcal{L}\{Lu\} = \mathcal{L}\{G\} - \mathcal{L}\{Ru\} - \mathcal{L}\{Nu\}.$$

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{k(s)}(h(s) + \mathcal{L}\{G\} - \mathcal{L}\{Ru\} - \mathcal{L}\{Nu\}) \qquad (4.1)$$

dengan *k*(s) dan *h(s)* adalah fungsi dalam *s* akibat penguraian transformasi Laplace dari $\mathcal{L}\{Lu\}$ dengan nilai awal yang diberikan. Kemudian mengikuti pola pada pendefinisian Adomian maka solusi sebagai jumlahan deret tak hingga, akibatnya diperoleh

$$\mathcal{L}\{u\} = \mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n\} \tag{4.2}$$

Masalah lebih lanjut adalah pada dekomposisi suku nonlinier *Nu*. Adomian mendefinisikan persamaan (2.10) $N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, dengan $A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k)\right]_{\lambda=0}$, komponen A_n disebut polinomial Adomian.
Selanjutnya menggunakan Persamaan (4.1) dan (4.2) diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n\} = \frac{1}{k(s)}(h(s) + \mathcal{L}\{G\} - \mathcal{L}\{Ru\} - \mathcal{L}\{Nu\}) . \tag{4.3}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (2.10) ke Persamaan (4.3) diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n\} = \frac{h(s) + \mathcal{L}\{G\}}{k(s)} - \frac{\mathcal{L}\{Ru\}}{k(s)} - \frac{\mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\}}{k(s)}$$

Lebih lanjut, Persamaan (4.1) dapat diuraikan yaitu

$$\mathcal{L}\{u_0\} = h(s) + \mathcal{L}\{G\}$$
$$\mathcal{L}\{u_{n+1}\} = -\mathcal{L}(Ru_n) - \mathcal{L}(A_n), n = 0,1,2,3,\dots$$

Selanjutnya dikenakan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{u_0\} = u_0 = \mathcal{L}^{-1}\{h(s) + \mathcal{L}\{G\}\}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{u_{n+1}\} = u_{n+1} = \mathcal{L}^{-1}\{-\mathcal{L}(Ru_n) - \mathcal{L}(A_n)\}, n = 0,1,2,3,\dots$$

4.2 Solusi

Diberikan persamaan diferensial nonlinier orde *n* dengan koefisien fungsi sebarang berbentuk

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1(t)\frac{dy}{dt} + b_0(t)y + f(y) = 0 \tag{4.4}$$

dengan nilai awal

$$y(0) = \alpha_0 , y'(0) = \alpha_1 , \dots, y^{(n)}(0) = \alpha_n , \tag{4.5}$$

dan $b_i(t)$ fungsi dalam variabel *t* , dengan $i = 0 , 1, 2, \dots, n-1$
α_i, konstanta riil, dengan $i = 0 , 1, 2, \dots, n$
$f(y)$ fungsi nonlinier

Berikut langkah-langkah untuk menentukan solusi persamaan (4.4) dengan nilai awal (4.2) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

Langkah 1 Persamaan (4.4) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - \cdots - b_1(t)\frac{dy}{dt} - b_0\, y - f(y) \tag{4.6}$$

Langkah 2 operator transformasi Laplace digunakan pada Persamaan (4.6)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = -\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{b_0(t)y\} - \mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.7}$$

Kemudian dengan sifat turunan ke-*n* dari ruas kiri persamaan (4.7) diperoleh

$$s^n\,\mathcal{L}\{y(t)\} - y^{(n-1)}(0) - sy^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}y(0)$$
$$= -\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{b_0(t)y\} - \mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.8}$$

Nilai awal (4.5) disubstitusi ke (4.8) diperoleh

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{\alpha_{n-1} + s\alpha_{n-2} - \cdots - s^{n-1}\alpha_0}{s^n} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy}{dt}\right\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{b_0(t)y\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{f(y)\}. \quad (4.9)$$

Metode Dekomposisi Adomian mendefinisikan solusi dalam bentuk deret tak hingga, yaitu $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$ dengan y_i dihitung secara rekursif. Selanjutnya, dekomposisi bentuk nonlinier dari $f(y)$ adalah $f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$, dengan A_i adalah polinomial Adomian dari y_i, perhitungan polinomial Adomian dengan formula berikut $A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} f\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k\right)\right]_{\lambda=0}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Selanjutnya, jika diasumsikan solusi dalam bentuk deret tak hingga, maka persamaan (4.9) menjadi

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} = \frac{\alpha_{n-1} + s\alpha_{n-2} - \cdots - s^{n-1}\alpha_0}{s^n} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right)}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{d\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right)}{dt}\right\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_0(t)\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\}. \quad (4.10)$$

Lebih lanjut, Persamaan (4.10) dapat diuraikan menjadi:

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha_{n-1} + s\alpha_{n-2} - \cdots - s^{n-1}\alpha_0}{s^n} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y_i}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy_i}{dt}\right\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{b_0(t)y_i\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_i\} \quad (4.12)$$

dengan $i = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Langkah 3</u> Berdasarkan langkah 2, telah diperoleh
$\mathcal{L}\{y_0\}$ dan $\mathcal{L}\{y_{i+1}\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$
Selanjutnya untuk memperoleh y_0 dan y_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots$ digunakan invers transformasi Laplace pada persamaan (4.11) dan (4.12), yaitu

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha_{n-1} + s\alpha_{n-2} - \cdots - s^{n-1}\alpha_0}{s^n}\right\}$$

$$y_{i+1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y_i}{dt^{n-1}}\right\} - \cdots - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy_i}{dt}\right\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{b_0(t)y_i\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_i\}\right\}$$

dengan $i = 0, 1, 2, \ldots$

Contoh:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1-t)\frac{dy}{dt} - y = 2y^3 \quad (4.13)$$

nilai awal $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ (4.14)

<u>Langkah 1</u> Persamaan (4.13) diubah dalam bentuk

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(1-t)\frac{dy}{dt} + y + 2y^3 \quad (4.15)$$

Langkah 2

Dengan menggunakan operator transformasi Laplace, Persamaan (4.15) menjadi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = -\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{2y^3\} \qquad (4.16)$$

Dengan sifat turunan ke-2 , persamaan (4.16) menjadi

$$s^2\,\mathcal{L}\{y)\} - y'(0) - sy(0) = -\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{2y^3\}\,. \qquad (4.17)$$

Nilai awal (4.11) disubstitusi ke (4.17) diperoleh

$$s^2\,\mathcal{L}\{y)\} - 1 - s = -\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{2y^3\}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathcal{L}\{y)\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy}{dt}\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y\} + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{y^3\} \qquad (4.18)$$

Selanjutnya, jika diasumsikan solusi dalam bentuk deret tak hingga, maka persamaan (4.18) menjadi

$$\mathcal{L}\{\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} y_i\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{d(\sum_{i=0}^{\infty} y_i)}{dt}\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\} + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\} \quad (4.19)$$

Dekomposisi bentuk nonlinier dari $f(y) = y^3$ adalah $f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$, dengan A_i adalah polinomial Adomian dari y_i, perhitungan polinomial Adomian dengan formula berikut $A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} f(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k)\right]_{\lambda=0}$, $i = 0, 1, 2, ...$ Polinomial Adomian suku nonlinier y^3 diperoleh berbentuk

$$A_0 = y_0^3 \qquad (4.20)$$

$$A_1 = 3y_0^2 y_1 \qquad (4.21)$$

$$A_2 = 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2 \qquad (4.22)$$

$$A_3 = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3 \qquad (4.23)$$

$$\vdots$$

Lebih lanjut, Persamaan (4.19) dapat diuraikan menjadi:

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_i}{dt}\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_i\} + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{A_i\},\ i = 0, 1, 2, ...$$

dengan $A_0, A_1, A_2, A_3, ...$ pada persamaan (4.20)-(4.23).

Langkah 3 Berdasarkan langkah 2, telah diperoleh

$\mathcal{L}\{y_0\}$ dan $\mathcal{L}\{y_{i+1}\}$, $i = 0, 1, 2, ...$

Selanjutnya untuk memperoleh y_0 dan y_{i+1} , $i = 0, 1, 2, ...$ digunakan invers transformasi Laplace, yaitu

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right\} = 1 + t,$$

$$y_{i+1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_i}{dt}\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_i\} + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{A_i\}\right\},\ \text{untuk } i = 0, 1, 2, ...$$

Untuk $i = 0$

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_0}{dt}\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\{A_0\}\right\} = t^2 + \frac{4t^3}{3} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{10}$$

<u>Untuk $i = 1$</u>

$$y_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_1}{dt}\right\}+\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\}+\frac{2}{s^2}\ \mathcal{L}\{A_1\}\right\}$$
$$= -\frac{t^3}{3}+\frac{5t^4}{12}+\frac{7t^5}{6}++\frac{9t^6}{10}+\frac{38t^7}{105}+\frac{3t^8}{40}+\frac{t^9}{120}.$$

<u>Untuk $i = 2$</u>

$$y_3 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_2}{dt}\right\}+\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_2\}+\frac{2}{s^2}\ \mathcal{L}\{A_2\}\right\}$$
$$= \frac{t^4}{12}-\frac{t^5}{4}+\frac{t^6}{40}+\frac{4t^7}{5}+\frac{25t^8}{24}+\frac{361t^9}{540}+\frac{3233t^{10}}{12600}+\frac{29t^{11}}{462}+\frac{11t^{12}}{1200}+\frac{11t^{13}}{15600}$$

<u>Untuk $i = 3$</u>, dengan bantuan program Maple 11 diperoleh

$$y_4 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{(1-t)\frac{dy_3}{dt}\right\}+\frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{y_3\}+\frac{2}{s^2}\ \mathcal{L}\{A_3\}\right\}$$
$$= -\frac{t^5}{60}+\frac{13t^6}{180}-\frac{41t^7}{280}-\frac{1213t^8}{6720}+\frac{7t^9}{18}+\frac{9991t^{10}}{10800}+\frac{14603t^{11}}{16632}+\frac{832991t^{12}}{1663200}$$
$$+\frac{2066429t^{13}}{1081088}+\frac{20101t^{14}}{400400}+\frac{8101t^{15}}{900900}+\frac{211t^{16}}{208000}$$
$$+\frac{211t^{17}}{3536000}.$$

Solusi dalam bentuk deret tak hingga diperoleh

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots$$
$$= 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \frac{359}{360}t^6 + \cdots$$
$$\approx \frac{1}{1-t},\ \text{dengan syarat } t \neq 1.$$

5. KESIMPULAN

Metode dekomposisi Adomian Laplace digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa nonlinier koefisien fungsi berbentuk (4.4) dan (4.5), solusi yang diperoleh yaitu

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i$$

dengan

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha_{n-1}+s\alpha_{n-2}-\cdots-s^{n-1}\alpha_0}{s^n}\right\},$$
$$y_{i+1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y_i}{dt^{n-1}}\right\}-\cdots-\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\left\{b_1(t)\frac{dy_i}{dt}\right\}-\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{b_0(t)y_i\}-\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_i\}\right\}$$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Barrow, D., dkk. 1998. *Solving Differential Equations with Maple V.* Brooks/Cole Publishing Company ITP. USA.

[2] Boyce E.W. & Diprima C.R., 1997, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Edisi ke-6, *John Wiley & Sons.* New York.

[3] Islam, S dkk., 2010, Numerical Solution of Logistic Differential Equations by Using the Laplace Decomposition Method, *World of Applied Sciences Journal* 8(9) : 1100-1105.IDOSI Publications.

[4] Jaradat, O.K., 2008. Adomian Decomposition Method for solving Abelian Differential Equations, *Journal of Applied Sciences* 8(10) : 1962-1966. Asian Network for Scientific Information.

[5] Kiymaz, O., 2009, An Algorithm for Solving Initial Value Problems Using Laplace Adomian Decomposition Method, *Journal of Applied Mathematics Sciences,* Vol 3, No.30, 1453-1459.

[6] Khan, Majid dkk., 2010. Application of Laplace Decomposition Method to Solve Nonlinear Couple Partial Differential Equations, *World of Applied Sciences Journal 9 (Special Issue of Applied Math):* 13-19, IDOSI Publications.

[7] Khuri, A.S, 2001, A Laplace Decomposition Algorithm Applied To A Class Of Nonlinear Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics 1:4 pp 141-155*, Hindawi Publishing Corporationn.

[8] Purcell, E.J. & Vanberg, D., 1987. *Kalkulus dan geometri Analitis Jilid 1 dan Jilid 2*. Edisi kelima. Erlangga. Jakarta.

[9] Ross, L.S., 1984, *Differential Equations Third Edition, John Wiley & Sons.* New York.