Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.2 (2015) Hal. 15-24

SIMULASI PERGERAKAN TINGKAT BUNGA BERDASARKAN MODEL VASICEK

Shantika Martha, Dadan Kusnandar, Naomi N. Debataraja
Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura
email: shantika.martha@math.untan.ac.id

ABSTRAK

Pergerakan tingkat bunga yang berubah dari waktu ke waktu dapat dipandang sebagai suatu proses stokastik untuk waktu kontinu. Salah satu model pergerakan tingkat bunga untuk waktu yang kontinu adalah model Vasicek. Penelitian ini bertujuan untuk menggambarkan karakteristik pergerakan tingkat bunga berdasarkan model Vasicek. Pada model Vasicek terdapat tiga parameter yaitu $k, \theta,$ dan σ. Berdasarkan hasil simulasi tampak bahwa pergerakan tingkat bunga berdasarkan model Vasicek bersifat mean reversion (cenderung berada di sekitar θ). Semakin besar nilai k maka proses tingkat bunga akan semakin cepat menuju θ. Sedangkan semakin besar nilai σ maka proses akan semakin jauh menyimpang dari θ.

Keywords: proses stokastik, karakteristik, mean reversion

1. PENDAHULUAN

Dalam berinvestasi, masyarakat ataupun perusahaan hendaknya memperhatikan tingkat suku bunga yang sedang berlaku agar memperoleh keuntungan maksimal. Karena pada kenyataannya tingkat bunga selalu berubah-ubah, maka diperlukan gambaran mengenai pergerakan tingkat bunga di masa depan.

Tingkat bunga yang berubah sepanjang waktu merupakan suatu proses stokastik. Oleh karena itu, model stokastik diperlukan untuk menggambarkan pergerakan tingkat bunga sepanjang waktu. Untuk waktu yang diskrit (1, 2, …, T) dapat digunakan model runtun waktu (merupakan proses stokastik untuk waktu diskrit). Sedangkan untuk kegiatan perdagangan di pasar finansial yang dapat berlangsung secara terus-menerus, diperlukan model pergerakan tingkat bunga untuk waktu yang kontinu.

Salah satu model pergerakan tingkat bunga untuk waktu yang kontinu adalah model Vasicek. Model ini diperkenalkan oleh Vasicek pada tahun 1977 dalam penentuan harga dari suatu obligasi. Model tingkat bunga Vasicek merupakan model untuk perubahan tingkat bunga yang bebas resiko, yang berarti bahwa ada kepastian dari bunga yang akan diperoleh.

Penelitian ini membahas karakteristik model tingkat bunga Vasicek dengan cara melakukan simulasi untuk menggambarkan pergerakan tingkat bunga berdasarkan parameter model Vasicek.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Stokastik

Proses stokastik $\{X_t, t \in T\}$ adalah koleksi dari variabel acak X_t yang tersusun menurut waktu t [1]. Salah satu contoh dari proses stokastik yang memiliki peranan sebagai faktor acak pada model-model tingkat bunga *short rate* adalah *Brownian motion* atau proses Wiener.

Definisi [2]
Misalkan W_t menyatakan Brownian motion dengan $t \in [0,T]$. Suatu persamaan diferensial stokastik (PDS) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t, \tag{1}$$

dimana fungsi $\mu(X_t,t)$ merupakan suku deterministik yang disebut sebagai koefisien *drift*, dan fungsi $\sigma(X_t,t)$ disebut sebagai koefisien difusi. Jika $\sigma = 0$, maka PDS pada persamaan (1) menjadi suatu persamaan diferensial biasa (PDB). Persamaan diferensial stokastik (1) dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s,s)ds + \int_0^t \sigma(X_s,s)dW_s,$$

dengan $\int_0^t \mu(X_s,s)ds$ adalah integral Riemann dan $\int_0^t \sigma(X_s,s)dW_s$ adalah integral stokastik.

2.2 Model Vasicek

Perubahan tingkat bunga pada model Vasicek dinyatakan dalam bentuk: [3]

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\, dW(t) \tag{2}$$

dengan $dr(t)$ adalah perubahan tingkat bunga pada interval waktu pendek *dt*, θ adalah rata-rata tingkat bunga dalam jangka panjang (*mean reversion level*), σ^2 adalah variansi perubahan tingkat bunga persatuan waktu (*variance rate*), *k* adalah seberapa cepat proses untuk kembali menuju θ, dan $\{W(t), t \geq 0\}$ adalah *Brownian Motion.*

Pada model Vasicek, tingkat bunga diasumsikan memiliki sifat *mean reversion*. Sifat *mean reversion* pada tingkat bunga adalah kecenderungan dari tingkat bunga untuk kembali menuju rata-rata jangka panjang apabila tingkat bunga berada diatas atau dibawah rata-rata jangka panjang. Rata-rata jangka panjang selanjutnya disebut *mean reversion level*.

Model Vasicek memiliki solusi analitik:

$$r(t) = r(0)e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks}\, dW_s \tag{3}$$

Jika $r(0)$ diketahui, maka $r(t)$ pada persamaan (3) adalah variabel acak yang berdistribusi Normal dengan mean $r(0)e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt})$ dan variansi $\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})$. Jadi, untuk $t \to \infty$, variabel acak $r(t)$ memiliki mean θ dan variansi $\frac{\sigma^2}{2k}$.

Untuk mengestimasi parameter model Vasicek $k, \theta,$ dan σ, dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE). Misalkan tingkat suku bunga inisial $r(0) = r_0, t = 0$ dan $r_\tau = x, t > \tau$, maka pdf tingkat suku bunga $r_t = y$ adalah:

$$f(y,x) = \sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2k(t-\tau)})}}\, exp\left(-\frac{k\left[y - \theta - (x - \theta)e^{-k(t-\tau)}\right]^2}{\sigma^2(1 - e^{-2k(t-\tau)})}\right)$$

Bentuk pdf bersama dari f untuk $i = 1,2,\dots,n$ yaitu:

$$p(k,\theta,\sigma) = \left(\sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2(1-e^{-2k(t-\tau)})}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} exp\left(-\frac{k\left[y-\theta-(x-\theta)e^{-k(t-\tau)}\right]^2}{\sigma^2(1-e^{-2k(t-\tau)})}\right)$$

Fungsi p dimodifikasi ke dalam bentuk ln(p) dan $\Delta t = t-\tau$, sehingga diperoleh:
$\mathrm{P}(k,\theta,\sigma) = lnp$

$$= \left(ln\left(\sqrt{\frac{k}{\pi\sigma^2(1-e^{-2k\Delta t})}}\right)^n\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{k[y-\theta-(x-\theta)e^{-k\Delta t}]^2}{\sigma^2(1-e^{-2k\Delta t})}\right)$$

Untuk memaksimumkan $\mathrm{P}(k,\theta,\sigma)$, akan dicari nilai $k,\theta,\text{dan}\,\sigma$ yang merupakan solusi dari $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial k} = 0$, $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial \theta} = 0$, dan $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$. Karena solusi untuk $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial k} = 0$, $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial \theta} = 0$, dan $\frac{\partial P(k,\theta,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$ sulit diperoleh, maka untuk mengestimasi parameter model Vasicek $k,\theta,\text{dan}\,\sigma,$ digunakanlah pendekatan numerik yaitu dengan Metode Newton-Raphson.

Berikut adalah langkah-langkah dari metode Newton-Raphson dengan $\mathrm{P} = ln\mathrm{L}$:

(i) Menentukan nilai taksiran awal dari parameter $k,\theta,\text{dan}\,\sigma$, yang dinyatakan dengan k_0,θ_0, dan σ_0.

(ii) Menghitung nilai k,θ, dan σ secara iteratif dengan formula:

$$\begin{pmatrix} k_i \\ \theta_i \\ \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix} - \left[\begin{matrix} \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\partial k} & \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\partial k} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial k\partial\theta} & \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial k\partial\sigma} & \frac{\partial^2 P}{\partial\theta\partial\sigma} & \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma^2} \end{matrix}\right]^{-1} \Bigg|_{\begin{pmatrix} k \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix}} \cdot \left[\begin{matrix} \frac{\partial lnL}{\partial k} \\ \frac{\partial lnL}{\partial\theta} \\ \frac{\partial lnL}{\partial\sigma} \end{matrix}\right] \Bigg|_{\begin{pmatrix} k \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix} - \mathbf{H}^{-1}(k_{i-1},\theta_{i-1},\sigma_{i-1})\mathbf{S}(k_{i-1},\theta_{i-1},\sigma_{i-1})$$

$$= \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

(iii) Langkah (ii) diulang hingga $\left\|\begin{pmatrix} k_i \\ \theta_i \\ \sigma_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ \sigma_{i-1} \end{pmatrix}\right\|_\infty$ memenuhi toleransi yang dikehendaki. Proses iterasi akan berhenti bila max $(|k_i - k_{i-1}|, |\theta_i - \theta_{i-1}|, |\sigma_i - \sigma_{i-1}|\,) < TOL$, dengan TOL menyatakan besarnya toleransi yang dikehendaki.

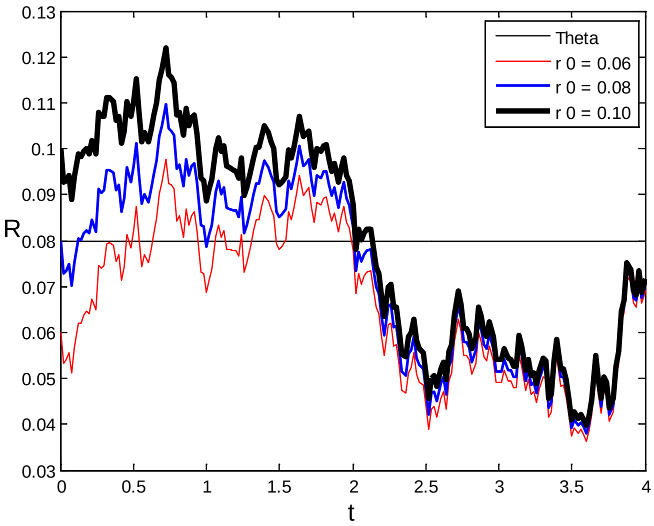
(iv) Setelah melewati langkah (iii), dipilih $\begin{pmatrix} k_i \\ \theta_i \\ \sigma_i \end{pmatrix}$ pada iterasi terakhir sebagai taksiran dari parameter model Vasicek yang dinotasikan dengan $\hat{k},\hat{\theta},\text{dan}\,\hat{\sigma}$.

3. HASIL

Setelah mengestimasi parameter model Vasicek, dibuatlah simulasi pergerakan tingkat bunga dengan menggunakan *software* MATLAB. Simulasi dilakukan untuk memberi gambaran pergerakan tingkat bunga apabila tingkat bunga dimodelkan dengan model Vasicek serta untuk menjelaskan makna dari setiap parameter pada model Vasicek. Adapun langkah-langkah dari simulasi untuk mendapatkan satu *sample path* adalah:

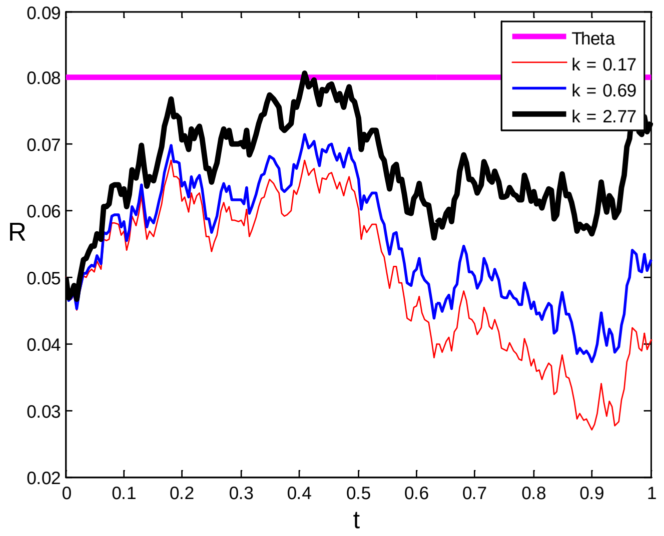
1) Membangkitkan sampel acak berukuran N dari distribusi normal standar. Sampel acaknya adalah $\varepsilon_{1,}\varepsilon_{2,}\ldots\varepsilon_N$ barisan variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik $N(0,1)$.
2) Menentukan nilai $\mathrm{t}_0,\ \mathrm{T},\ \mathrm{r}(\mathrm{t}_0),\ \mathrm{N}, \Delta n = (t_i - t_{i-1}) = \frac{T-t_0}{N}, \theta,\ k,$ dan σ.
3) Substitusi nilai $r(t_{i-1})$ dan ε_i ke bentuk rekursif yang diperoleh dari diskritisasi Euler pada model Vasicek, yaitu:
   $r(t_i) = r(t_{i-1}) + k\big(\theta - r(t_{i-1})\big)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\varepsilon_i\sqrt{t_i - t_{i-1}}$, untuk
   $i = 1, \ldots, N$ dimana nilai parameter $\theta,\ k,$ dan σ telah ditentukan.

Pada penelitian ini dilakukan empat kali simulasi dari model Vasicek. Tiap simulasi akan dilihat pergerakan tingkat bunga masing-masing untuk tiga nilai $r(0), \theta,\ k,$ dan σ yang berbeda dengan $N = 200$. Hasil dari keempat simulasi dapat dilihat pada gambar 1, 2, 3, dan 4 berikut:



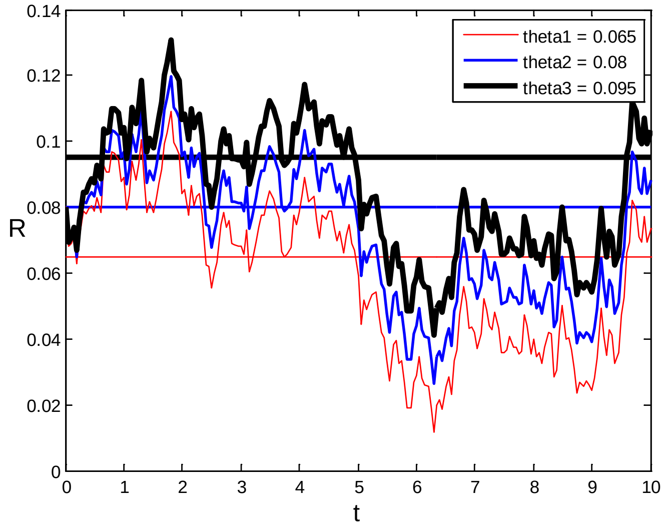
Gambar 1. Simulasi untuk nilai awal yang berbeda

Gambar 1 memperlihatkan bahwa untuk ketiga nilai $r(0)$ yang berbeda, ketiga *path* terlihat identik dan masih berada disekitar θ yang sama.



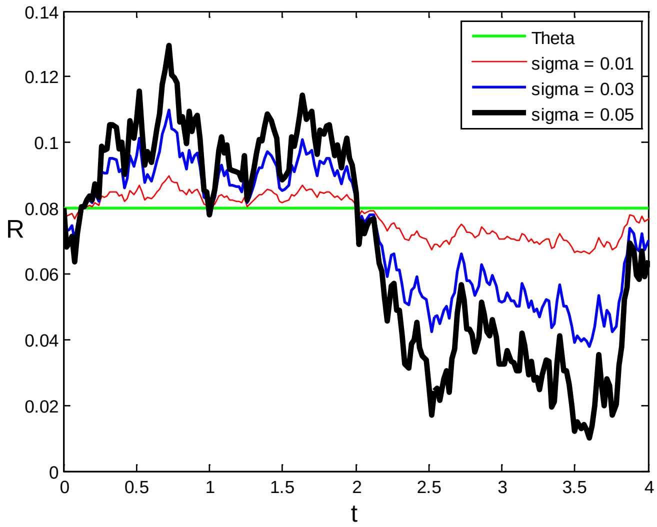
Gambar 2. Simulasi untuk nilai *k* yang berbeda

Gambar 2 memperlihatkan bahwa ketiga proses dimulai dari $r(0) = 0.05$, kemudian terlihat bahwa untuk nilai k yang makin besar, proses akan lebih cepat mendekati θ. Gambar 2 mengilustrasikan k sebagai laju/kecepatan proses tingkat bunga menuju θ.



Gambar 3. Simulasi untuk nilai θ yang berbeda

Gambar 3 memperlihatkan bahwa ketiga proses dimulai dari $r(0) = 0.08$. Dalam jangka panjang, *path* dari setiap proses berada disekitar tiap θ yang berbeda.



Gambar 4. Simulasi untuk nilai σ yang berbeda

Gambar 4 memperlihatkan bahwa untuk nilai σ yang semakin besar, proses lebih jauh menyimpang dari θ. σ dapat diinterpretasikan sebagai gangguan (*noise)* atau *volatilitas* dari pergerakan tingkat bunga yang berubah-ubah secara tidak pasti. Besarnya tingkat bunga berbanding lurus dengan besarnya *volatilitas*. Artinya semakin besar nilai σ, maka *volatilitas* pergerakan tingkat bunga juga semakin besar. *Volatilitas* ini sendiri dipengaruhi oleh unsur *Brownian Motion* yang terdapat pada model Vasicek.

4. KESIMPULAN

Pergerakan tingkat bunga berdasarkan model Vasicek dipengaruhi oleh tiga parameter yaitu $k, \theta,$ dan σ. Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa pergerakan tingkat bunga berdasarkan model Vasicek cenderung berada di sekitar θ. Hal ini menunjukkan bahwa pergerakan tingkat bunga berdasarkan model Vasicek bersifat *mean reversion*. Semakin besar nilai k maka proses tingkat bunga akan semakin cepat menuju θ. Sedangkan semakin besar nilai σ maka proses akan semakin jauh menyimpang dari θ.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ross, S.M. 1996. Stochastic processes. (2nd ed.). John Wiley and Sons. New York

[2] Klebaner, F.C.1998. Introduction to Stochastic Calculus With Applications. Imperial College Press. London.

[3] Shreve, S.E. 2004. Stochastic Calculus for Finance II Continous – Time Models. Springer. New York