Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 46-55

SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP MATRIKS BERSIH PADA $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$

Rohmalita, Na'imah Hijriati, Saman Abdurrahman
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Banjarbaru, Kalsel
Email: rohmalita_imuet@yahoo.co.id

ABSTRAK

Paper ini menjelaskan kondisi suatu matriks bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ dan menjelaskan syarat perlu dan syarat cukup matriks bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Hasil dari penelitian ini yaitu, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$ atau -2. Kemudian $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks unit, atau memenuhi salah satu dari persamaan $ad - bc - d + by = \pm 1$, $ad - bc - a + by = \pm 1$, $(-b)w^2 + (a - d)wx + (c)x^2 + (b)w + (ad - bc - a \pm 1)x = 0$. Serta syarat perlu dan syarat cukup $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih yaitu jika $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah matriks 0-bersih maka $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.

Kata kunci*: ring, ring komutatif, matriks idempoten, matriks unit, matriks bersih.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu himpunan tak kosong dengan operasi biner yang dipelajari pada struktur aljabar adalah ring. Ring dengan sifat komutatif pada operasi kedua disebut ring komutatif, contohnya adalah $\mathbb{Z}$. Matriks persegi dengan entri berupa elemen ring komutatif seperti $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ disebut matriks bersih jika dapat ditulis dalam bentuk $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}$, dengan $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^2$ dan $\boldsymbol{U}$ adalah matriks unit. Tidak setiap matriks unit dan matriks idempoten pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ memenuhi bentuk $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}$, sehingga ditentukan syarat perlu dan syarat cukup matriks bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ sebagai tujuan dari penelitian.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Salah satu himpunan tak kosong dengan operasi biner yang dipelajari pada struktur aljabar adalah ring. Ring yang bersifat komutatif pada operasi kedua disebut ring komutatif.

Definisi 2.1 [2]
Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, yaitu operasi pertama $(+)$ dan operasi kedua $(\cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:
1. *$\langle R, + \rangle$ adalah grup abelian*
   a) *Bersifat assosiatif, $\forall\, a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$*
   b) *Memiliki identitas di R, $\forall\, a \in R\ \exists\, 0_R \in R$ sehingga $0_R + a = a + 0_R = a$*

c) *Memiliki invers di* R, $\forall a \in R\ \exists -a \in R$ *sehingga* $a + (-a) = -a + a = 0_R$

d) *Bersifat komutatif,* $\forall\ a, b \in R$ *berlaku* $a + b = b + a$

2. $\langle R, \cdot \rangle$ *bersifat assosiatif,* $\forall\ a, b, c \in R$ *berlaku* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. *Untuk* $\forall\ a, b, c \in R$*, berlaku:*
   (i) *Distributif kiri,* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dan*
   (ii) *(ii) Distributif kanan,* $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Definisi 2.2 [4]
Suatu ring R adalah ring komutatif, jika pada operasi kedua bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in R$ *berlaku* $ab = ba$.

Jika matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n(R)$ dapat ditulis dalam bentuk $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}$, untuk $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E^2}$ dan $\boldsymbol{U}$ adalah matriks unit maka $\boldsymbol{A}$ disebut matriks bersih, yang dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.3 [3]
Suatu matriks persegi $\boldsymbol{E}$, *dengan* $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}$ *disebut matriks idempoten.*

Definisi 2.4 [3]
Suatu matriks $\boldsymbol{A}$ *disebut sebagai matriks unit jika dan hanya jika* $\boldsymbol{A}$ *memiliki invers.*

Definisi 2.5 [5]
Diberikan e idempoten di R, dimana R adalah ring komutatif. Jika matriks $\boldsymbol{M} \in \mathbb{M}_n(R)$ *dapat ditulis dalam bentuk* $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}$ *maka* $\boldsymbol{M}$ *adalah matriks bersih, untuk beberapa* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^2$ *dan beberapa* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{M}_n(R)$, *dimana* $\boldsymbol{U}$ *adalah matriks unit. Dengan* $det(\boldsymbol{E}) = e$, *maka* $\boldsymbol{M}$ *adalah matriks e-bersih.*

Berdasarkan uraian di atas, matriks bersih pada $\mathbb{M}_{\boldsymbol{2}}(\mathbb{Z})$ ditentukan dari bentuk matriks idempoten $\boldsymbol{E}$ dan matriks unit $\boldsymbol{U}$ pada $\mathbb{M}_{\boldsymbol{2}}(\mathbb{Z})$ yang memiliki entri bilangan bulat sehingga terdapat persamaan diophantin yang harus terpenuhi. Tidak setiap matriks pada $\mathbb{M}_{\boldsymbol{2}}(\mathbb{Z})$ adalah matriks bersih karena tidak setiap matriks unit dan matriks idempoten pada $\mathbb{M}_{\boldsymbol{2}}(\mathbb{Z})$ memenuhi bentuk $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}$, maka ditentukan syarat perlu dan syarat cukup matriks bersih pada $\mathbb{M}_{\boldsymbol{2}}(\mathbb{Z})$ sebagai tujuan penelitian.

Definisi 2.6 [9]

Suatu persamaan dengan penyelesaian berupa bilangan bulat disebut persamaan diophantin.

Teorem 2.7 [1]
Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *dapat dibalik jika* $ad - bc \neq 0$ *dimana inversnya dapat diperoleh dengan rumus berikut*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Lemma 2.8[8]

Diberikan $\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$*ring komutatif dan* $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. *Dengan* $E \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$*merupakan matriks idempoten jika dan hanya jika E merupakan salah satu dari bentuk berikut*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix} \; atau \; \begin{bmatrix} w & \frac{w(1-w)}{x} \\ x & 1-w \end{bmatrix}, x \neq 0$$

3. METODOLOGI

Dengan metode studi literatur yang bersumber dari buku, artikel, dan jurnal, penelitian diawali dari mengumpulkan materi tentang ring, ideal, unimodular, matriks, dan persamaan diophantin, kemudian mempelajarinya. Selanjutnya, menjelaskan kondisi matriks bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, menjelaskan syarat perlu dan syarat cukup matriks bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, memberikan contoh, dan membuat kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan lebih dulu lemma yang menjelaskan sifat matriks unit pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

Lemma 3.1

Suatu matriks $\boldsymbol{U} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ *memiliki invers* $\boldsymbol{U^{-1}} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ *jika dan hanya jika* $det(\boldsymbol{U}) = \pm 1$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui $\boldsymbol{U}$ adalah matriks unit di $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Akan dibuktikan $det(\boldsymbol{U}) = \pm 1$. Berdasarkan [1] yaitu jika suatu matriks $\boldsymbol{U}$ memiliki invers maka $det(\boldsymbol{U}^{-1}) = \frac{1}{det(\boldsymbol{U})}$. Misalkan $\boldsymbol{U^{-1}} = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$, maka $det(\boldsymbol{U}^{-1}) = \begin{vmatrix} m & n \\ o & p \end{vmatrix} = mp - no$. Karena $\boldsymbol{U^{-1}} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ maka $m, n, o, p \in \mathbb{Z}$ sehingga $mp - no \in \mathbb{Z}$, dengan kata lain $det(\boldsymbol{U^{-1}}) \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $det(\boldsymbol{U})\,|1$ sehingga $det(\boldsymbol{U}) = 1$ atau $det(\boldsymbol{U}) = -1$.

($\Longleftarrow$)Diketahui $det(\boldsymbol{U}) = \pm 1$, dengan $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Akan dibuktikan $\boldsymbol{U^{-1}} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Berdasarkan Teorema 2.7[1], $\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{det(\boldsymbol{U})} \begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix}$

(i) Jika $det(\boldsymbol{U}) = 1$, maka $\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix}$

(ii)Jika $det(\boldsymbol{U}) = -1$, maka $\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u & s \\ t & -r \end{bmatrix}$

Berdasarkan dari (i) dan (ii), karena $r, s, t, u, -r, -s, -t, -u \in \mathbb{Z}$ maka $\boldsymbol{U}^{-1} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. ■

Teorema berikut menjelaskan kondisi matriks 1-bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

Teorema 3.2

Diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, $\boldsymbol{A}$ *merupakan matriks 1-bersih jika dan hanya jika* $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$ *atau* $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = -2$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih. Berdasar Definisi matriks bersih[5], maka $det(\boldsymbol{E}) = 1$. Akan dibuktikan $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$ atau $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) =$

-2. Berdasarkan Lemma 2.8[8], matriks idempoten $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$ sehingga $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}$, dengan kata lain $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{U}$. Berdasar Lemma 3.1, $\boldsymbol{U}$ memiliki invers jika $det(\boldsymbol{U}) = \pm 1$, maka berlaku $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \pm 1$.

(i) Jika $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = 1$, maka

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} = 1$$
$$\Leftrightarrow (ad - bc) - (a + d) + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$$

(ii) Dengan cara yang sama, jika $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = -1$ maka diperoleh $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = -2$.

($\Leftarrow$)Akan dibuktikan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih, cukup ditunjukkan $det(\boldsymbol{E}) = 1$, berdasar Lemma 2.1[8] maka matriks idempoten $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$ dengan $det(\boldsymbol{E}) = 1$. Berdasar bukti ke kanan terbukti matriks idempoten $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}$ dengan $det(\boldsymbol{E}) = 1$. ■

Lemma berikut menjelaskan hubungan beberapa bentuk matriks idempoten dengan matriks unit pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

Lemma 3.3

Diberikan $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ dan $\boldsymbol{E}$ adalah matriks idempoten di $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

(i) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ adalah unit.

(ii) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $ad - bc - d + by = \pm 1$.

(iii) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $ad - bc - a + by = \pm 1$.

(iv) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $ad - bc - d + cy = \pm 1$.

(v) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $ad - bc - a + cy = \pm 1$.

Bukti:

Berdasar Definisi matriks bersih[5], maka $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{E}$ dengan kata lain $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{U}$.

(i) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ adalah unit.

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Jadi, diperoleh $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$ maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit jika dan hanya jika $\boldsymbol{A}$ adalah unit.

(ii) Diketahui jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$.

($\Rightarrow$)

Akan dibuktikan jika $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit maka $ad - bc - d + by = \pm 1$.

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 & b \\ c-y & d \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Lemma 3.1, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit di $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ jika berlaku $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\,) = \pm 1$.

(a) Jika $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\,)=1$, maka

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c-y & d \end{vmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow\ ad-bc-d+by=1$$

(b) Dengan cara yang sama, jika $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\,)=-1$ diperoleh $ad-bc-d+by=-1$.

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan jika $ad-bc-d+by=\pm1$ maka $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ adalah unit. Cukup ditunjukkan $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\,)=\pm1$. Berdasar (ii)(a) dan (ii)(b) terbukti $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ adalah unit.

Untuk bukti (iii) ,(iv), dan (v) dapat terbukti dengan cara yang sama dengan (ii). ■

Teorema berikut menjelaskan kondisi persamaan diophantin berorde dua dengan solusi dua variabel pada matriks bersih.

Teorema 3.4

Diberikan $\boldsymbol{A}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ *dan matriks idempoten* $\boldsymbol{E}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ *dengan determinan bernilai nol dan* $\boldsymbol{E}\notin X$. *Sehingga* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ *adalah unit jika dan hanya jika salah satu dari persamaan diophantin berikut mempunyai solusi* (w,x); $w\neq 0\ dan\ w\neq 1\,; x\neq 0\ dan\ x|w(1-w)$.

$$(-b)w^2+(a-d)wx+(c)x^2+(b)w+(ad-bc-a-1)x=0 \qquad ...(3.1)$$

$$(-b)w^2+(a-d)wx+(c)x^2+(b)w+(ad-bc-a+1)x=0 \qquad ...(3.2)$$

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui $\boldsymbol{E}$ adalah matriks idempoten dengan $det(\boldsymbol{E})=0$. Karena $\boldsymbol{E}\notin X$, dimana

$X=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\y&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\y&0\end{bmatrix}\right\}$ maka berdasar Lemma 2.1[8], $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}w & x\\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}w & \frac{w(1-w)}{x}\\ x & 1-w\end{bmatrix}$. Akan dibuktikan, jika $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ adalah unit maka salah satu dari persamaan diophantin (3.1) atau (3.2) mempunyai solusi. Dipilih $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}w & x\\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w\end{bmatrix}$, misalkan $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{U}$, maka $\boldsymbol{U}$ adalah unit di $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Berdasar Lemma 3.1, $\boldsymbol{U}$ adalah unit di $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ jika dan hanya jika berlaku $det(\boldsymbol{U})=\pm1$.

(i) Jika $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$, maka

$$\begin{vmatrix} a-w & b-x \\ c-\frac{w-w^2}{x} & d-(1-w) \end{vmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow ad-a+aw-dw+w-w^2-bc+cx+b\left(\frac{w-w^2}{x}\right)-w+w^2=1$$

$$\Leftrightarrow ad-a+(a-d)w-bc+cx+b\left(\frac{w-w^2}{x}\right)=1$$ kedua ruas dikalikan x

$$\Leftrightarrow (-b)w^2+(a-d)wx+(c)x^2+(b)w+(ad-a-bc-1)x=0$$

(ii) Dengan cara yang sama dengan (i), jika $det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-1$ diperoleh $(-b)w^2+(a-d)wx+(c)x^2+(b)w+(ad-a-bc+1)x=0$.

(iii) Andaikan tidak berlaku $w \neq 0$ atau $w \neq 1$, maka berlaku $w = 0$ dan $w = 1$. Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}$, diperoleh $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & \frac{w(1-w)}{x} \\ x & 1-w \end{bmatrix}$, diperoleh $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}$, dimana $\boldsymbol{E} \in X$ kontradiksi dengan diketahui
maka tidak berlaku $w = 0$ dan $w = 1$, dengan kata lain berlaku $w \neq 0$ atau $w \neq 1$.

(iv) Karena $\begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & \frac{w(1-w)}{x} \\ x & 1-w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, maka $\frac{w(1-w)}{x} \in \mathbb{Z}$ sehingga $\frac{w(1-w)}{x}$ akan terdefinisi jika $x \neq 0$ dan $x|w(1-w)$.

Berdasar (i) dan (ii) diperoleh persamaan diophantin (3.1) dan (3.2), berdasar (iii) dan (iv) persamaan diophantin mempunyai solusi (w, x); $w \neq 0$ dan $w \neq 1$; $x \neq 0$ dan $x|w(1-w)$.

Karena $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}$ memiliki transpos $\boldsymbol{E}^T = \begin{bmatrix} w & \frac{w(1-w)}{x} \\ x & 1-w \end{bmatrix}$, maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}^T$ terbukti
adalah unit dan $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}^T)$ menghasilkan persamaan diophantin yang memiliki solusi yang
sama dengan persamaan diophantin (3.1) dan (3.2).

($\Leftarrow$)

Diketahui $\boldsymbol{E}$ adalah matriks idempoten dengan $det(\boldsymbol{E}) = 0$. Karena $\boldsymbol{E} \notin X$, dimana
$X = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \right\}$, berdasar Lemma 2.1[8], $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & \frac{w(1-w)}{x} \\ x & 1-w \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit cukup ditunjukkan $det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \pm 1$.

Berdasarkan (i) dan (ii) bukti ke kiri $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$ adalah unit. ■

Dari Lemma 3.3 dan Teorema 3.4 diperoleh kondisi dari suatu matriks 0-bersih pada $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ yang dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.5

Suatu matriks $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah matriks 0-bersih jika dan hanya jika memenuhi salah satu kondisi berikut:

(i) *$\boldsymbol{A}$ adalah matriks unit.*

(ii) $ad - bc - d + by = \pm 1$, *untuk suatu* $y \in \mathbb{Z}$.

(iii) $ad - bc - a + by = \pm 1$, *untuk suatu* $y \in \mathbb{Z}$.

(iv) *Persamaan diophantin* $(-b)w^2 + (a-d)wx + (c)x^2 + (b)w + (ad - bc - a - 1)x = 0$ *dengan solusi nontrivial.*

(v) *Persamaan diophantin* $(-b)w^2 + (a-d)wx + (c)x^2 + (b)w + (ad - bc - a + 1)x = 0$ *dengan solusi nontrivial.*

Bukti:

Untuk bukti Teorema 3.5 (i), (ii), dan (iii) secara berturut-turut telah terbukti pada Lemma 3.3
(i), (ii), dan (iii), kemudian bukti Teorema 3.5 (iv) dan (v) telah terbukti pada Teorema 3.3. ■

Berikut ini diberikan Proposisi 3.6 dan 3.7 yang menjelaskan syarat perlu dan syarat cukup matriks 0-bersih berdasarkan Teorema 3.5.

Proposisi 3.6

Diberikan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. *Jika* $\boldsymbol{B}$ *adalah matriks* 0-*bersih maka* $\boldsymbol{B}$ *adalah matriks bersih dan* (a, b) *adalah unimodular.*

Bukti:

Diketahui $\boldsymbol{B}$ adalah matriks 0-bersih. Akan dibuktikan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks bersih dan (a, b) adalah unimodular. Karena $\boldsymbol{B}$ adalah matriks 0-bersih, $\boldsymbol{B}$ pasti matriks bersih. Selanjutnya karena $\boldsymbol{B}$ bukan matriks unit maka $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{E}$ dengan $\boldsymbol{E} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Berdasar Teorema 3.5, $\boldsymbol{E}$ berupa salah satu dari bentuk berikut: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}$.

(i) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$, berdasar Lemma 3.3(ii) dengan $c = d = 0$ diperoleh $by = \pm 1$ sehingga berdasarkan Definisi unimodular[5], (a, b) adalah unimodular.

(ii) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$, berdasar Lemma 3.3(iii) dengan $c = d = 0$ diperoleh
$-a + by = \pm 1$
sehingga berdasarkan Definisi unimodular[5], (a, b) adalah unimodular.

(iii) Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}$, berdasar Teorema 3.4 berlaku persamaan diophantin (3.1) atau (3.2). Karena $c = d = 0$, diperoleh:

1) $(-b)w^2 + (a)wx + (b)w + (-a+1)x = 0$ …(3.3)

$\Leftrightarrow\ (b)(w - w^2) + (aw - a + 1)x = 0$ kedua ruas dibagi dengan x

$\Leftrightarrow (b)\left(\frac{w-w^2}{x}\right) + a(w-1) + 1 = 0$

Misalkan $\left(\frac{w-w^2}{x}\right) = \lambda$ dan $(w-1) = \mu$, sehingga diperoleh

$b\lambda + a\mu + 1 = 0$ dengan kata lain $b\lambda + a\mu = -1$ ... (3.4)

2) $(-b)w^2 + (a)wx + (b)w + (-a-1)x = 0$ …(3.5)

Dengan cara yang sama, dari persamaan (3.5) diperoleh

$b\lambda + a\mu - 1 = 0$ dengan kata lain $b\lambda + a\mu = 1$ ...(3.6)

Dari persamaan (3.4) dan (3.6) diperoleh $b\lambda + a\mu = \pm 1$, sehinggaberdasarkan Definisi unimodular [5], maka (a, b) adalah unimodular. Berdasarkan bukti di atas, jika $\boldsymbol{B}$ matriks 0-bersih maka $\boldsymbol{B}$ adalah matriks bersih dan (a, b) adalah unimodular. ■

Proposisi 3.7

Diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. *Jika* $\boldsymbol{B}$ *adalah matriks bersih dan* (a, b) *adalah unimodular maka* $\boldsymbol{A}$ *adalah matriks* 0-*bersih.*

Bukti:
Berdasar bukti Proposisi 3.6, jika $\boldsymbol{B}$ matriks bersih dan (a, b) adalah unimodular berlaku $b\lambda + a\mu = \pm 1$ untuk $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.
Jika $b = 0$, maka $a\mu = \pm 1$. Karena $\mu \in \mathbb{Z}$, maka a adalah unit. Jika $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh $-a + by = \pm 1$, karena $b = 0$ dan a adalah unit, persamaan $ad - bc - a + by = \pm 1$
terpenuhi, sehingga terbukti $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.
Jika $b \neq 0$, maka terdapat dua kondisi, yaitu:
(i) Jika $\lambda = 0$, maka

(a) $b\lambda + a\mu = 1 \Leftrightarrow a\mu = 1$
Sehingga
$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $b\lambda + a\mu = -1 \Leftrightarrow a\mu = -1$
Sehingga
$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Diperoleh $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ sehingga $w = 0$ dan $x = b$ solusi nontrivial persamaan diophantin (3.3) atau (3.5) maka terbukti $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.
(ii) Jika $\lambda \neq 0$, berdasar bukti Proposisi 3.6 (iii), salah satu dari persamaan diophantin (3.3) atau (3.5) terpenuhi. Misalkan $w = \mu + 1$ dan $x = \left(\frac{w - w^2}{\lambda}\right)$, diperoleh $x = -\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}$.
Selanjutnya subtitusi ke persamaan (3.3) dan (3.5) sehingga diperoleh:
(a) $b[(\mu + 1) - (\mu + 1)^2] + [a(\mu + 1) - a + 1]\left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right)$
$= b(-\mu - \mu^2) + (a\mu + 1)\left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right)$
$= \left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right)[b\lambda + a\mu + 1]$
Karena $b\lambda + a\mu = -1$ dengan kata lain $b\lambda + a\mu + 1 = 0$, diperoleh solusi nontrivial persamaan diophantin yaitu $x = \left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right) \neq 0$.
(b) Dengan cara yang sama, dari persamaan (3.5) diperoleh $\left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right)[b\lambda + a\mu - 1]$.
Karena $b\lambda + a\mu = 1$ dengan kata lain $b\lambda + a\mu - 1 = 0$, diperoleh solusi nontrivial persamaan diophantin yaitu $x = \left(-\frac{\mu(\mu+1)}{\lambda}\right) \neq 0$.
Berdasarkan (a) dan (b) terbukti $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.
Terbukti $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih, jika $\boldsymbol{B}$ matriks bersih dan (a, b) adalah unimodular. ■

Berdasarkan Proposisi 3.5 dan 3.6, diperoleh syarat perlu dan syarat cukup $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih yaitu jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks 0-bersih maka $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.

Contoh 3.8
Diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, akan dibuktikan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.
1) Berdasar Teorema 3.2, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$
atau $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = -2$.
$det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = ad - bc - a - d = 48 - 36 - 8 - 6 = -2$

Teorema 3.2 terpenuhi sehingga $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih.

2) Berdasar Proposisi 3.6 dan 3.7, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks 0-bersih dengan memenuhi salah satu kondisi pada bukti Proposisi 3.6.

$$-a + by = \pm 1 \Leftrightarrow -8 - 3y = \pm 1 \Leftrightarrow -3y = \pm 1 + 8$$

$$y = \frac{-1+8}{-3} = \frac{7}{-3} \notin \mathbb{Z}\,,\; y = \frac{1+8}{-3} = \frac{9}{-3} = -3 \in \mathbb{Z}$$

Karena $y = -3 \in \mathbb{Z}$, salah satu kondisi bukti Proposisi 3.6 terpenuhi dengan matriks idempoten $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut, dengan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

1. Matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 1-bersih jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = 0$ atau $det(\boldsymbol{A}) - tr(\boldsymbol{A}) = -2$, dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih jika dan hanya jika memenuhi salah satu kondisi:
   i) $\boldsymbol{A}$ adalah unit, dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   ii) $ad - bc - d + by = \pm 1$, dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}; y \in \mathbb{Z}$.
   iii) $ad - bc - a + by = \pm 1$, dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}; y \in \mathbb{Z}$.
   iv) Persamaan diophantin berikut, dengan $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} w & x \\ \frac{w(1-w)}{x} & 1-w \end{bmatrix}; x \neq 0; x | w(1-w)$.
   $$(-b)w^2 + (a-d)wx + (c)x^2 + (b)w + (ad - bc - a \pm 1)x = 0$$
3. Syarat perlu dan syarat cukup matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih adalah jika $\boldsymbol{B}$ adalah matriks 0-bersih maka $\boldsymbol{A}$ adalah matriks 0-bersih. Syarat ini dapat terpenuhi jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, atau jika $a = 0$ dan b adalah unit, atau jika $b = 0$ dan a adalah unit.

.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. & C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi, edisi ke-8, jilid 1*. Erlangga, Jakarta.

[2] Dummit, D.S. & R.M. Foote. 2004. *Abstract Algebra, 3th ed.* John Wiley & Sons, Inc, USA.

[3] Eves, H. 1968. *Elementary Matrix Theory*. Allyn and Bacon, Inc, Boston.

[4] Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra, 7th ed.* Adison-Wesley, USA.

[5] Khurana, D. & T.Y. Lam. 2004. Clean Matrices and Unit-regular Matrices. *Journal of Algebra*. **280**: 683-698.

[6] Lang, S. 2005. *Undergraduate Algebra, 3th ed.* Springer. USA.

[7] Nathanson, M.B. 2000. *Elementary Methods in Number Theory*. Springer. USA.

[8] Rajeswari, K.N. & R. Aziz. 2009. A Note on Clean Matrices in $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. *International Journal of Algebra*. **3**: 241-248.
[9] Shocley, J.E. 1967. *Introduction To Number Theory*. Holt, Rinehart And Winston, Inc, USA.
[10] Sibley, T.Q. 2012. Idempoten á la mod. *The College Mathematics Journal*. **43**: 401-404.
[11] Waerden, B.L. van der. 1949. *Modern Algebra, Vol I*. Frederick Ungar, New York.