Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
Vol.7 No.2 (2013) Hal. 12-19

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER MELALUI DIAGONALISASI MATRIKS

Edy Sarwo Agus Wibowo, Yuni Yulida, Thresye

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani. Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
Email : edydyno@gmail.com

ABSTRAK

Pada tulisan ini membahas penerapan diagonalisasi matriks untuk menentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial linier homogen orde satu. Selanjutnya jika matrik pada sistem tersebut tidak bisa didiagonalisasi maka solusi ditentukan melalui matriks fundamental.

Kata kunci : *sistem persaman diferensial, diagonalisasi matriks, matriks fundamental*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terkait dikategorikan sebagai sistem persamaan diferensial. Salah satu cara untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial linier adalah melalui diagonalisasi matrik dan matriks fundamental. Suatu matriks $\boldsymbol{A}$ dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks $\boldsymbol{P}$ yang dapat dibalik sehingga $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ matrik diagonal, matriks $\boldsymbol{P}$ dikatakan mendiagonalisasi $\boldsymbol{A}$. Karena sistem persamaan diferensial linier dapat ditulis ke dalam bentuk matriks, sehingga penyelesaian dari sistem persamaan diferensial linier dapat dihasilkan melalui diagonalisasi matriks. Akan tetapi bila vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ tidak dapat dibentuk kedalam matriks $\boldsymbol{P}$ maka matriks $\boldsymbol{A}$ tidak dapat didiagonalisasi sehingga penyelesaian dari sistem tersebut dapat ditentukan melalui matriks fundamental. [1].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Diagonalisasi dan Keserupaan Matriks

Salah satu penerapan dari nilai eigen dan vektor eigen adalah menentukan matriks diagonal.Untuk membahas diagonalisasi matriks diawali dengan definisi berikut.

Definisi 2.1.1 [1]
Suatu matriks kuadrat $\boldsymbol{A}$ *dapat didiagonalisasi (diagonalizable) jika terdapat matriks* $\boldsymbol{P}$ *yang dapat dibalik sehingga* $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ *diagonal, matriks* $\boldsymbol{P}$ *dikatakan mendiagonalisasi* $\boldsymbol{A}$.
Definisi 2.1.2 [1]
Diberikan $\boldsymbol{A}$ *dan* $\boldsymbol{D}$*adalah matriks-matriks kuadrat, matriks* $\boldsymbol{D}$*dikatakan serupa dengan matriks* $\boldsymbol{A}$ *(*$\boldsymbol{D}$*is similar to* $\boldsymbol{A}$*) jika terdapat sebuah matriks* $\boldsymbol{P}$ *yang dapat dibalik sedemikian sehingga* $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

2.2 Perubahan Basis

Matriks koordinat $\boldsymbol{v}$ terhadap basis $\boldsymbol{B}([\boldsymbol{v}]_B)$ dari suatu vektor $\boldsymbol{v}$ terkait dengan matriks koordinat $\boldsymbol{v}$ terhadap basis $\boldsymbol{B}'([\boldsymbol{v}]_{B'})$, dari vektor $\boldsymbol{v}$ yang sama dapat dinyatakan sebagai $[\boldsymbol{v}]_B = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{v}]_{B'}$ (1)

Teorema 2.2.1 [2]
Jika $\boldsymbol{P}$ *adalah matriks transisi dari sebuah basis* $\boldsymbol{B}'$ *ke basis* $\boldsymbol{B}$ *untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga V, maka :*
(a) $\boldsymbol{P}$ *dapat dibalik.*
(b) $\boldsymbol{P}^{-1}$ *adalah matriks transisi dari* $\boldsymbol{B}$ *ke*$\boldsymbol{B}'$.

2.3 Matriks operator linier

Bila terdapat $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linier dari *V* ke *W*. Jika dipilih basis $\boldsymbol{B}$ untuk ruang vektor *V* dan basis $\boldsymbol{B}'$ untuk ruang vektor *W* maka dalam kasus yang sfesifik dimana $V = W$ sehingga $T: V \rightarrow V$ adalah sebuah operator linier. Suatu hal yang umum untuk menganggap bahwa $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ ketika membentuk sebuah matriks untuk *T*, dalam kasus ini matriks yang dihasilkan disebut matriks untuk *T* yang berkenaan dengan basis $\boldsymbol{B}$ dan umumnya dinotasikan dengan $[T]_B$. Jika$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ maka $[T]_B = [[T(\boldsymbol{u}_1)]_B|[T(\boldsymbol{u}_2)]_B|\cdots|[T(\boldsymbol{u}_n)]_B]$ dan

$$[T]_B[\boldsymbol{x}]_B = [T(\boldsymbol{x})]_B \quad (2)$$

[2].

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terkait maka dikategorikan sebagai sistem persamaan diferensial. Klasifikasi penting sistem persamaan diferensial terbagi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linier dan nonlinier [3]. Berikut bentuk normal sistem persamaan diferensial linier homogen orde-1 dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (3)$$

dengan $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ bernilai konstan dan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ merupakan variabel terikat. Persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk : $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$
[6].

Definisi 2.4.1[5]
Misalkan $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$, untuk $t \in R$

$$\boldsymbol{e^{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

untuk $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$, $\boldsymbol{e^{At}}$ adalah matriks$n \times n$ yang dapat dihitung dengan nilai eigen dan vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$.
Teorema 2.4.2[5]
Jika $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$ untuk $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$, maka masalah nilai awal $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}$$

memiliki penyelesaian tunggal yaitu $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e^{At}x_0}$

2.5 Bentuk Matrik $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ Berdasarkan Nilai Eigen Pada Sistem Persamaan Diferensial Linier

Nilai eigen atau akar karakteristik pada sistem persamaan diferensial linier ($\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$) dapat ditentukan dengan cara mencari determinan dari *($\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$)* dari sistem tersebut. Jika *det ($\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$) = 0* maka akan didapat akar karakteristik dari persamaan karakteristik. Dari akar karakteristik akan diperoleh bentuk $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ yang dapat dibedakan menjadi tiga yaitu :

1. Akar riil dan berbeda ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \neq \lambda_n$)
   Teorema 2.5.1 [5]
   Jika nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dari matriks $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ adalah riil dan berbeda maka setiap vektor eigen yang sesuai $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ terkait basis untuk R^n, matriks $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n]$ dapat dibalik dan $\boldsymbol{P^{-1}AP} = diag[\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n]$
2. Akar komplek $\left(\lambda_{1,2} = a_1 \pm ib_1,\ \lambda_{3,4} = a_2 \pm ib_2, \cdots,\ \lambda_{(n-1),(n)} = a_{\frac{n}{2}} \pm ib_{\frac{n}{2}}\right)$ dengan ($n = 2, 3, 4, \cdots$)
   Teorema 2.5.2 [5]
   Jika Matriks $\boldsymbol{A}_{2n\times 2n}$ memiliki nilai eigen komplek berbeda $\lambda_j = a_j + ib_j$ dan $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ vektor eigen komplek yang sesuai $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j$ dan $\overline{\boldsymbol{w}}_j = \boldsymbol{u}_j - i\boldsymbol{v}_j$ dengan $j = 1, 2, \cdots, n$ maka $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah basis untuk R^{2n}, matriks $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n\boldsymbol{u}_n]$ dapat dibalik dan

   $$\boldsymbol{P^{-1}AP} = diag\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$$

   matriks $2n \times 2n$ dengan 2×2 blok sepanjang diagonal
3. Akar riil dan kembar ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n$)
   Untuk kasus nilai eigen yang riil dan kembar ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n$) , jika memiliki vektor eigen yang bersesusaian ($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$) sebanyak $n(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n)$ maka matriks $\boldsymbol{A}$ pada sistem persamaan linier $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$ dapat didiagonaisasi karena vektor eigen ($\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n$) cukup untuk membangun matriks $\boldsymbol{P}$. Dimana $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n]$dapat dibalik dan

   $$\boldsymbol{P^{-1}AP} = diag[\lambda_j] \cdots (4)$$

   dengan ($j = 1, 2, \cdots, n$) [5].

2.6 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linier

Definisi 2.6.1[6]

Di berikan sistem persamaan diferensial linier homogen $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
dengan $\boldsymbol{x}$ *vektor* $n \times 1$

1. himpunan n penyelesaian yang bebas linier dari sistem persamaan diferensial linier disebut himpunan fundamental dari sistem persamaan diferensial linier.

2.matriks kolom yang terdiri dari himpunan fundamental dari penyelesaian sistem persamaan diferensial linier disebut matriks fundamental dari sistem persamaan diferensial linier, yaitu jika fungsi vektor $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ *yang di definisikan oleh*

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

maka matriks

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

disebut matriks fundamental dari sistem persamaan diferensial linier.

Definisi 2.6.2[6]

Diberikan sistem persamaan diferensial linier homogen $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *dengan* $\boldsymbol{x}$ *vektor* $n \times 1$. *Penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial linier adalah* $c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^{(n)}$
dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *adalah n konstanta sebarang dan* $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ *adalah himpunan fundamental dari solusi sistem persamaan diferensial linier.*

3. METODE PENELITIAN

Bahan atau materi penelitian yang digunakan bersumber dari literatur, baik dari buku teks, dan referensi pendukung yang ada kaitannya dengan penelitian ini. Pada penelitian ini menjelaskan pembentukan sistem persamaan diferensial menggunakan matriks operator linier. Kemudian menjelaskan langkah-langkah menentukan solusi sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen terhadap matriks yang dapat didiagonalisasi dan terhadap matriks yang tidak dapat didiagonalsasi melalui matriks fundamental.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Sistem Persamaan Diferensial Baru Dengan Menggunakan Matriks Operator Linier

Diberikan $T: V \to V$ adalah operator linier, sebelumnya telah diketahui sistem persaman diferensial awal adalah $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Misalkan terdapat basis-basis $\boldsymbol{B}$ dan $\boldsymbol{B}'$untuk ruang vektor V dimana $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ merupakan basis lama dengan $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ merupakan basis standar dan $\boldsymbol{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ merupakan basis baru dimana $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ merupakan vektor eigen dari matriks

$\boldsymbol{A}$. Akan dibentuk sistem persaman diferensial baru dengan menggunakan matriks operator linier. Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks untuk T yang berkenaan dengan basis $\boldsymbol{B}$ maka menurut matriks operator linier Persamaan (2) terdapat $[T(\boldsymbol{x})]_B = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_B$. Akan dicari sebuah matriks untuk T yang berkenaan dengan basis $\boldsymbol{B}'$, Menurut perubahan basis Persamaan (1) terdapat $[\boldsymbol{x}]_B = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]_{B'}$ dan dengan menggunaan **Teorema 2.2.1** akan didapat $[T(\boldsymbol{x})]_{B'} = \boldsymbol{P}^{-1}[T(\boldsymbol{x})]_B$ dan misalkan $\boldsymbol{D}$ adalah matriks untuk T yang berkenaan dengan basis $\boldsymbol{B}'$.Berdasarkan keterangan tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$[T(\boldsymbol{x})]_{B'} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]_{B'} = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{x}]_{B'} \tag{5}$$

dengan $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. Misalkan $[\boldsymbol{x}]_{B'}$ dinotasikan sebagai $(\boldsymbol{y})$ dan $[T(\boldsymbol{x})]_{B'}$ dinotasikan sebagai $(\dot{\boldsymbol{y}})$ sehingga Persamaan (5) dapat ditulis $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$. Dengan demikian didapat sistem persamaan yang baru berupa

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

Teorema 4.1.1[4]

Misalkan W(t) adalah penyelesaian untuk sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{D}$ dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang serupa dengan $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ maka $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{W}(t)$ adalah penyelesaian dari $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

4.2 Langkah-Langkah Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen Terhadap Mariks Yang Dapat Didiagonalisasi

Persamaan $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dapat diselesaikan melalui diagonalisasi matriks sebagai berikut :

1. Sistem persamaan diferensial linier homogen dibentuk kedalam bentuk bentuk $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
2. Menentukan nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ maka akan digunakan $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ dan Untuk menentukan vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ maka substitusikan λ_i ke $(\lambda_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$ dengan $(i = 1,2,\cdots,n)$
3. Menentukan matriks $\boldsymbol{P}$ yang kolomnya terdiri dari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$, yaitu $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$. Kemudian akan dicari invers dari matriks $\boldsymbol{P}$ berupa $\boldsymbol{P}^{-1}$dengan demikian dapat ditentukan matriks $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ pada diagonal utamanya.
4. Membentuk sistem persamaan diferensial yang baru. Diketahui sistem persamaan diferensial linier berupa $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dan dimisalkan sistem ini merupakan sistem awal, dengan menggunakan matriks operator linier maka berdasarkan Persamaan (6) akan dibentuk sistem baru berupa $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$ dengan $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.
5. Menentukan penyelesian dari sistem persamaan diferensial awal. Berikut akan disajikan penyelesaian untuk sistem persamaan diferensial yang baru dengan beberapa kemungkinan akar karakteristik yang akan terjadi.

   a. Akar riil dan berbeda

   Jika terdapat nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ berupa $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \neq \lambda_n$ maka berdasarkan **Teorema 2.5.1** Persamaan (6) dapat ditulis menjadi

   $$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{y} = diag[\lambda_1, \lambda_2\ \cdots, \lambda_n]\,\boldsymbol{y} \tag{7}$$

   sehingga penyelesaian dari Persamaan (7)

   $$\boldsymbol{y}(t) = diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{y}_0 \tag{8}$$

Dengan demikian Persamaan (8) merupakan penyelesian dari Persamaan (7) dan $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$.

Untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial awal $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ maka dengan menggunakan **Teorema 4.1.1** didapat

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) \cdots (9)$$

substitusi persamaan (8) ke Persamaan (9)

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\, diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{y}(0) \cdots (10)$$

menurut perubahan basis terdapat $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ sehingga persamaan (10) menjadi $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\, diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

b. Akar komplek

Jika terdapat nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ berupa

$$\lambda_{1,2} = a_1 \pm ib_1, \quad \lambda_{3,4} = a_2 \pm ib_2, \cdots, \quad \lambda_{(n-1),(n)} = a_{\frac{n}{2}} \pm ib_{\frac{n}{2}}$$

maka berdasarkan Teorema 1.5.2 Persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{y} = diag\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}\boldsymbol{y} \cdots (11)$$

sehingga penyelesaian dari Persamaan (11)

$$\boldsymbol{y}(t) = diag\, \boldsymbol{e}^{a_j t}\begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix}\boldsymbol{y}_0 \cdots (12)$$

Dengan demikian Persamaan (12) merupakan penyelesian dari Persamaan (11) dan $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$.

Untuk menentukan penyelesaian dari sistem persmaan diferensial awal $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ maka dengan menggunakan **Teorema 4.1.1** didapat

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) \cdots (13)$$

substitusi Persamaan (12) ke Persamaan (13)

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\, diag\, \boldsymbol{e}^{a_j t}\begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix}\boldsymbol{y}(0) \cdots (14)$$

menurut perubahan basis terdapat $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ sehingga persamaan (14) menjadi $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\, diag\, \boldsymbol{e}^{a_j t}\begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

c. Akar riil dan kembar

Jika terdapat nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ berupa$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n$ yang memiliki vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dan sebanyak *n* $(\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2 \neq \cdots \neq \boldsymbol{v}_n)$ maka berdasarkan Persamaan (4) maka Persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag(\lambda_j)\boldsymbol{y} \qquad (15)$$

dengan $(j = 1,2,\cdots,n)$.sehingga penyelesaian dari Persamaan (15)

$$\boldsymbol{y}(t) = diag\left(e^{\lambda_j t}\right)\boldsymbol{y}_0 \qquad (16)$$

Dengan demikian Persamaan (18) merupakan penyelesian dari Persamaan (17) dan $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$.

Untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial awal $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ maka dengan menggunakan **Teorema 4.1.1** didapat

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}(t) \qquad (17)$$

substitusi persamaan (16) ke Persamaan (17)

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\, diag\left(e^{\lambda_j t}\right)\boldsymbol{y}(0) \qquad (18)$$

menurut perubahan basis terdapat $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{P^{-1}x}(0)$ sehingga persamaan (18) menjadi $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\ diag\left(e^{\lambda_j t}\right)\boldsymbol{P^{-1}x}(0)$

4.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Untuk Matriks Yang Tidak Dapat Didiagonalisasi

Sistem persamaan diferensial dikatakan tidak dapat didiagonalisasi jika terdapat sejumlah vektor eigen yang bersesuain dengan nilai eigen yang tidak dapat dibentuk ke dalam matriks $\boldsymbol{P}$, akibatnya sistem persamaan diferensial baru ($\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Dy}$) dengan $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ tidak dapat dibentuk. Sistem persamaan diferensial linier yang matriksnya tidak dapat didiagonalisasi, untuk matriks eksponensial ($e^{\boldsymbol{A}t}$) dapat di bentuk dengan menggunakan matriks fundamental.

Langkah-Langkah Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen terhadap Mariks Yang Tidak Dapat Didiagonalisasi adalah

1. Sistem persamaan diferensial linier homogen dibentuk ke dalam bentuk matriks yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$
2. Menentukan nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yaitu $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ dan Untuk menentukan vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ maka substitusikan λ_i ke $(\lambda_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$ dengan $(i = 1,2,\cdots,n)$
3. Menentukan penyelesain bagian sistem persamaan diferensial linier yang disimbolkan $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}$.
4. Menentukan penyelesian dari sistem persamaan diferensial linier, berdasarkan Definisi 2.6.2 penyelesian umum dari sistem persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$ adalah sebagai berikut
$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^{(n)} \tag{19}$$
dengan $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}$ solusi bebas linier. Berdasarkan Definisi 2.6.1 Persamaan (19) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut
$$\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{x}^{(1)}(t) \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}^{(n)}(t)]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$
dengan $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}(0)$

5. KESIMPULAN

Penyelesaian dari sistem persamaan diferensial linier $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$ dapat diperoleh melalui diagonalisasi matriks adalah sebagai berikut

1. Jika terdapat akar karakteristik riil dan berbeda maka penyelesaian adalah $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\ diag\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{P^{-1}x}(0)$
2. Jika terdapat akar karakteristik riil dan kembar maka penyelesaian adalah $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\ diag\left(e^{\lambda_j t}\right)\boldsymbol{P^{-1}x}(0)$
3. Jika terdapat akar karakteristik kompleks maka penyelesaian adalah $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}\ diag\ \boldsymbol{e}^{a_j t}\begin{bmatrix}\cos b_j t & -\sin b_j t\\ \sin b_j t & \cos b_j t\end{bmatrix}\boldsymbol{P^{-1}x}(0)$

kemudian untuk penyelesaian sistem persamaan diferensial linier yang matriknya tidak dapat didiagonalisasi dapat melalui alternatif lain yaitu menggunakan matrik fundamental $\boldsymbol{M}(t)$diperoleh penyelesaian $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(0)^{-1}\boldsymbol{x}(0)$**.**

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima.* Erlangga. Jakarta

[2] Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan.* Erlangga. Jakarta

[3] Farlow, S. J. 1994. *Differential Equations and Their Applications.* Dover Publications. United States of America.

[4] Paul, Watman. 2004. *A Second Course in Elementary Differential Equation.* Dover PUBN Incorporated.

[5] Perko, Lawrence. 1991. *Differential Equation and Dynamical System.* Springer-Verlag. Berlin.

[6] Ross, S. L. 1984. *Differential Equation-Third Edition.* Jhon Wiley & Sons, Inc. New York.