IDEAL DIFERENSIAL DAN HOMOMORFISMA DIFERENSIAL

Na'imah Hijriati, Saman Abdurrahman, Thresye

Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani Km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email : imah_math@yahoo.co.id

ABSTRAK

Ideal diferensial adalah ideal dari ring diferensial yang memenuhi jika untuk setiap $a \in I$ *, dan setiap* $\delta \in \Delta$, $\delta(a) \in I$, *sedangkan homomorfisma diferensial merupakan homomorfisma ring yang komutatif terhadap setiap derivasinya. Pada tulisan ini disajikan sifat-sifat dari ideal diferensial dan homomorfisma diferensial.*

Kata Kunci *: ring diferensial, ideal diferensial, dan homomorfisma diferensial.*

ABSTRACT

Differential ideal is ideal of differential ring that if every $a \in I$, *and every* $\delta \in \Delta$, *than* $\delta(a) \in I$, *and differential homomorfism is ring homomorfism that every derivation is commute. In this paper, we explain about characteristic of differential ideal and differential homomorfism.*

Keyword *: differential ring, ideal differential, and differential homomorfism.*

1. PENDAHULUAN

Suatu himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan "+" dan operasi pergandaan "**.**", disebut ring jika R dibawah operasi penjumlahan merupakan grup komutatif dan di bawah operasi pergandaan berlaku sifat assosiatif, serta memenuhi sifat distributif operasi pergandaan terhadap operasi penjumlahan. R disebut ring komutatif jika R dibawah operasi pergandaan komutatif.

Jika ring komutatif R yang dengan elemen satuan dan $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ merupakan himpunan derivasi berhingga yang komutatif atas R, yaitu himpunan pemetaan dari R ke R yang memenuhi $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$ dan $\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$ untuk setiap $f, g \in R$ maka R yang dilengkapi dengan Δ membentuk strukur baru yang disebut ring diferensial (Morrison, 2002).

Diketahui didalam suatu ring terdapat pembahasan mengenai ideal dan homomorfisma ring. Ideal adalah himpunan bagian yang merupakan grup terhadap operasi penjumlahan, dan tertutup terhadap operasi pergandaan atas ring tersebut, sedangkan dan homomorfisma ring adalah suatu pemetaan yang mengawetkan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan. Kerena ring diferensial merupakan suatu ring, maka didalam ring diferensial terdapat juga ideal dan homomorfisma ring yang memiliki sifat tertentu yang disebut ideal diferensial dan homomorfisma ring diferensial.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. RING

Berikut ini diberikan definisi ring dan definisi ring komutatif sebagai berikut :

Definisi 2.1.1 (Adkins, 1992)

Misalkan R adalah himpunan dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan "+" *dan operasi pergandaan* "**.**". *R disebut ring jika* :

i. *R dibawah operasi penjumlahan adalah grup komutatif*
ii. *R dibawah operasi pergandaan berlaku sifat assosiatif*
iii. *untuk setiap* $a, b, c \in R$ *berlaku sifat*
distributif kiri : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dan*
distributif kanan : $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
Selanjutnya $a \cdot b$ ditulis dengan ab.

Definisi 2.1.2 (Dummit&Foote, 1999)

Misalkan R adalah ring. R dikatakan ring komutatif jika R dibawah operasi pergandaan bersifat komutatif dan R dikatakan mempunyi elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ *sedemikian sehingga berlaku* $1.a = a.1 = a$ *untuk setiap* $a \in R$.

2.2. IDEAL

Berikut ini definisi dari ideal beserta sifatnya :

Definisi 2.2.1 (Fraleigh, 2000)

Diberikan himpunan bagian tak kosong I dari ring R. I disebut ideal dari R jika :

i. untuk setiap $a,b \in I$ *berlaku* $a - b \in I$

ii. untuk setiap $a \in I$, *dan untuk setiap* $r \in R$ *berlaku* $ra, ar \in I$

Teorema 2.2.2 (Dummit&Foote, 2002)

Jika I dan J ideal-ideal dari ring R, maka berlaku $I \cap J$ *dan* $I + J$ *ideal-ideal dari R.*

2.3 RING FAKTOR

Diberikan ideal I dari ring R. Dibentuk himpunan $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan pada R/I berturut-turut sebagai berikut :

$$(r + I) + (s + I) = (r + s) + I \text{ dan } (r + I)(s + I) = (rs) + I \qquad (2.1)$$

untuk setiap $(r + I), (s + I) \in R/I$ dengan $r, s \in R$.

Karena $r, s \in R$ dan diketahui R adalah ring, maka berdasarkan definisi operasi penjumlahan dan operasi pergandaan di atas dan berdasarkan definisi himpunan R/I, terbukti bahwa R/I tertutup terhadap operasi penjumlahan dan operasi pergandaan yang didefinisikan pada persamaan (2.1). Himpunan R/I merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan operasi pergandaan yang didefinisikan pada (2.1) dan dinyatakan di dalam teorema berikut ini :

Teorema 2.3.1 (Adkins, 1992)

R/I *merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan operasi pergandaan yang didefinisikan* (2.1).

2.4. HOMOMORFISMA RING

Berikut ini adalah definisi dari homomorfisma ring

Definisi 2.4.1 (Fraleigh, 2000)

Diberikan ring $(R, +, .)$ *dan* $(S, +', *)$ *dan pemetaan* $\phi : R \to S$. Pemetaan ϕ *disebut homomorfisma ring jika* :

i. $f(a + b) = f(a) +' f(b)$

ii. $f(a . b) = f(a) * f(b)$.

Definisi 2.4.2 (Fraleigh, 2000)

Misalkan R dan S adalah ring, dan fungsi $f : R \to S$ *merupakan homomorfisma ring.*

i. *f disebut monomorfisma jika f fungsi injektif*
ii. *f disebut epimorfisma jika f fungsi surjektif*
iii. *f disebut isomorfisma jika f fungsi bijektif*
iv. *f disebut endomorfisma jika* $R = S$
v. *f disebut automorfisma jika f fungsi bijektif dan* $R = S$

Berikut ini definisi dari kernel dan image dari homomorfisma ring :

Definisi 2.4.3 (Adkins, 1992)

Misalkan $f : R \to S$ *homomorfisma ring. Didefinisikan kernel dan image dari f sebagai berikut*:

1. Kernel (f) = Ker(f) = $\{r \in R \mid f(r) = 0$, 0 unsur nol di $S\}$
2. Image (f) = Im(f) = $f(R)$ = $\{ s \in S \mid s = f(r)$, *untuk* $r \in R\}$

Teorema 2.4.6 (Fraleigh, 2000)

Suatu homomorfisma f dari ring R ke ring S disebut monomorfisma jika dan hanya jika Ker $(f) = 0_R$.

Jika I ideal dari R maka akan selalu terdapat pemetaan dari R ke R/I yang merupakan epimorfisma dan kernelnya adalah I, yang dinyatakan dalam teorema berikut ini :

Teorema 2.4.7. Homomorfisma Natural (Fraleigh, 2000)

Jika I ideal dari ring R, maka $f : R \to R/I$ *yang didefinisikan dengan* $f(r) = r + I$, *merupakan epimorfisma dengan* Ker$(f) = I$.

Selanjutnya akan diberikan Teorema Isomorfisma Ring Pertama, Kedua dan Ketiga sebagai berikut :

Teorema 2.4.8. Teorema Isomorfisma Ring Pertama (Dummit&Foote, 2002)

Jika $f : R \to S$ *homomorfisma ring dengan* Ker $(f) = I$, *maka I ideal dari R,* $f(R)$ *subring dari S dan* $\mu : R/I \to f(R)$ *yang didefinisikan dengan* $\mu(r+I) = f(r)$ *merupakan isomorfisma dan tunggal. Selanjutnya jika* $\phi : R \to R/I$ *homomorfisma natural, maka* $\mu\phi = f$.

Teorema 2.4.9 Teorema Isomorfisma Ring Kedua (Dummit&Foote, 2002)

Diberikan ring diferensial R. Jika I dan J adalah ideal-ideal dari R maka I ideal dari $I + J$, $I \cap J$ *ideal dari J, dan terdapat dengan tunggal isomorfisma dari* $I + J/I$ *ke* $J/I \cap J$.

Teorema 2.4.10. Teorema Isomorfisma Ring Ketiga (Dummit&Foote, 2002)
Jika I dan J adalah ideal-ideal dari ring R dan $I \subseteq J$ maka J/I ideal dari R/I dan terdapat dengan tunggal isomorfisma dari R/J ke $\dfrac{R/I}{J/I}$.

2.5. RING DIFERENSIAL

Definisi 2.5.1 (Morrison, 2002)
ring komutatif R yang dengan elemen satuan dan $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ merupakan himpunan derivasi berhingga yang komutatif atas R, yaitu himpunan pemetaan dari R ke R yang memenuhi $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$ dan $\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$ untuk setiap $f, g \in R$

Definisi 2.5.2 (Morrison, 2002)
Ideal I dari ring diferensial R disebut ideal diferensial jika $\forall\ a \in I$, $\forall\ \delta \in \Delta$, $\delta(a) \in I$.

Definisi 2.5.3 (Morrison, 2002)
Diberikan R dan S masing-masing ring diferensial. Pemetaan $\phi : R \rightarrow S$ disebut homomorfisma diferensial jika ϕ merupakan homomorfisam ring dan komutatif terhadap setiap derivasinya.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur, dengan langkah-langkah prosedur yang digunakan adalah pertama mengumpulkan beberapa pustaka yang berhubungan dengan ring diferensial, ideal diferensial dan homomorfisma diferensial, kedua mempelajari definisi dan sifat-sifat ring, ideal, homomorfisma ring, dan derivasi yang mendasari sifat-sifatnya ideal diferensial dan homomorfisma diferensial, ketiga membuktikan sifat-sifat dari ideal diferensial dan homomorfisma diferensial, dan terakhir menarik kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. IDEAL DIFERENSIAL

Berdasarrkan Definisi 2.5.2 diketahui bahwa suatu ideal diferensial dari ring diferensial dengan derivasi δ, merupakan suatu ideal yang memenuhi sifat $\delta(a) \in I$ untuk setiap $a \in I$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$, sehingga sifat – sifat dari ideal yang dinyatakan dalam Teorema 2.2.2 dapat diturunkan pada ideal diferensial, yaitu :

Teorema 4.1.1
Diberikan ideal-ideal diferensial I dan J dari ring diferensial R dengan derivasi δ, maka $I \cap J$ dan $I + J$ merupakan ideal diferensial

Bukti :

i. Berdasarkan Teorema 2.2.2 diketahui jika I dan J ideal dari R maka $I \cap J$ merupakan ideal dari R, sehingga untuk membukikan $I \cap J$ merupakan ideal diferensial cukup ditunjukkkan $\delta(a) \in I \cap J$, untuk setiap $a \in I \cap J$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$.
   Diberikan sebarang $a \in I \cap J$ maka $a \in I$ dan $a \in J$. Karena diketahui I dan J berturut-turut merupakan ideal diferensial maka $\delta(a) \in I$ dan $\delta(a) \in J$ umtuk setiap $\delta \in \Delta$, sehingga diperoleh $\delta(a) \in I \cap J$. Jadi terbukti $I \cap J$ merupakan ideal diferensial.
ii. Berdasarkan Teorema 2.2.2 diketahui jika I dan J ideal dari R maka $I + J$ merupakan ideal dari R, sehingga untuk membukikan $I + J$ merupakan ideal diferensial cukup ditunjukkkan $\delta(a) \in I + J$, untuk setiap $a \in I + J$.

Diberikan sebarang $a \in I + J$ maka terdapat $b \in I$ dan $c \in J$ sedemikian sehingga $a = b + c$. Dengan menggunakan definisi derivasi diperoleh untuk setiap $\delta \in \Delta$

$$\delta(a) = \delta(b + c) = \delta(b) + \delta(c).$$

Karena diketahui I dan J berturut-turut merupakan ideal diferensial maka $\delta(b) \in I$ dan $\delta(c) \in J$, akibatnya $\delta(a) \in I + J$. Jadi terbukti $I + J$ merupakan ideal diferensial. ■

Selanjutnya suatu ideal I dari ring komutatif R sedemikian sehingga berlaku sifat jika $a^n \in I$ maka $a \in I$, disebut ideal radikal, akibatnya jika I merupakan ideal diferensial dari ring diferensial R maka I disebut ideal diferensial radikal. Berikut ini beberapa sifat-sifat yang berkaitan dengan ideal diferensial radikal :

Lemma 4.1.2

Diberikan ideal diferensial radikal I dari ring diferensial R dengan himpunan derivasi berhingga Δ. Jika $ab \in I$ maka $a\delta(b) \in I$ dan $\delta(a)b \in I$, untuk $a, b \in R$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$

Bukti

Diketahui $ab \in I$, karena I ideal diferensial maka $\delta(ab) \in I$, untuk setiap $\delta \in \Delta$ dengan $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \Leftrightarrow a\delta(b) = \delta(ab) - \delta(a)b$ dan $\delta(a)b = \delta(ab) - a\delta(b)$, sehingga $a\delta(b)\delta(ab), (\delta(a)\delta(b))(ab) \in I$.

Akibatnya karena

$(a\delta(b))^2 = a\delta(b)(\delta(ab) - \delta(a)b) = a\delta(b)\delta(ab) - a\delta(b)\delta(a)b = a\delta(b)\delta(ab) - \delta(a)\delta(b)ab$

$(\delta(a)b)^2 = \delta(a)b(\delta(ab) - a\delta(b)) = \delta(a)b(\delta(ab) - \delta(b)ba\delta(b) = \delta(a)b(\delta(ab) - (\delta(a)\delta(b))ab$

maka $(a\delta(b))^2, (\delta(a)b)^2 \in I$, sehingga karena diketahui I ideal radikal maka diperoleh $a\delta(b)$, $\delta(a)b \in I$. ■

Lemma 4.1.3

Diberikan ideal diferensial radikal I dari ring diferensial R dan S sebarang himpunan bagian dari R. Jika didefinisikan $T = \{x \in R \mid xS \subset I\}$, maka T ideal diferensial radikal dari R.

Bukti :

Himpunan $T = \{x \in R \mid xS \subset I\}$ merupakan himpunan tak kosong karena terdapat $0 \in R$ sedemikian sehingga $0s = 0 \in I$, sehingga untuk membuktikan T ideal diferensial radikal jika T ideal yang memenuhi $\delta(x) \in T$ untuk setiap $x \in T$, setiap $\delta \in \Delta$ dan jika $x^n \in T$ maka $x \in T$.

i. Himpunan T disebut ideal jika T subgrup terhadap opersai penjumlahan dan memenuhi $rx, xr \in T$ untuk setiap $x \in T$ dan $r \in R$.
   a. Akan dibuktikan T subgrup dari R yaitu untuk setiap $x,y \in T$ berlaku
      $x - y \in T \Leftrightarrow (x - y)S \subset I$
      Ambil sebarang $x, y \in T$ maka $xS, yS \subset I$. Karena $(x - y)s = xs - ys$ untuk setiap $s \in S$ maka karena $xs, ys \in I$ dan diketahui I ideal dari R diperoleh $xs - ys \in I$ untuk setiap $s \in S$, akibatnya $(x - y)s \in I$ untuk setiap $s \in S$.
      Jadi $(x - y)S \subset I \Leftrightarrow x - y \in T$
   b. Akan dibuktikan $rx, xr \in T$ untuk setiap $x \in T$ dan $r \in R$
      Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in T$ maka $xS \subset I$.
      Karena $(rx)s = r(xs)$ dan $(xr)s = (rx)s = r(xs)$ untuk setiap $s \in S$ maka karena $xs \in I$ dan diketahui I ideal dari R diperoleh $r(xs) \in I$ untuk setiap $s \in S$, akibatnya $(rx)s$, $(xr)s \in I$ untuk setiap $s \in S$.
      Jadi $rxS, xrS \subset I \Leftrightarrow rx, xr \in T$

   Jadi berdasarkan (*a*) dan (*b*) terbukti T ideal dari R

ii. Akan dibuktikan $\delta(x) \in T$ untuk setiap $x \in T$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$

Ambil sebarang $x \in T$ maka $xS \subset I \Leftrightarrow xs \in I$ untuk setiap $s \in S$.
Andaikan $\delta(x) \notin T$ untuk setiap $\delta \in \Delta$. Karena diketahui I ideal difernsial maka jika $xs \in I$ maka $\delta(xs) \in I$. Selanjutnya karena diketahui I ideal diferensial radikal maka berdasarkan Lemma 4.1.2 diperoleh $\delta(x)s \in I \Leftrightarrow \delta(x) \in T$.
Akibatnya kontradiksi dengan $\delta(x) \notin T$.
Jadi terbukti $\delta(x) \in T$ untuk setiap $x \in T$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$.

iii. Akan dibuktikan jika $x^n \in T$ maka $x \in T$
Ambil sebarang $x \in R$ dengan $x^n \in T$. Karena $(xs)^n = x^n s^n = (x^n s^{n-1})s \in I$ untuk setiap $s \in S$ dan diketahui I ideal diferensial radikal maka $xs \in I$ untuk setiap $s \in S$, sehingga $x \in T$. Jadi terbukti T ideal radikal

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii) terbukti bahwa T ideal diferensial radikal. ■

4.2. HOMOMORFISMA DIFERENSIAL

Jika I ideal dari ring R maka berdasarkan Teorema 2.3.1 dapat dibentuk ring faktor R/I . Jika didefinisikan derivasi pada R/I dengan I ideal diferensial dari ring diferensial R dengan himpunan derivasi berhingga Δ sebagai berikut :

$$\delta(a + I) = \delta(a) + I \tag{4.1}$$

untuk setiap $a + I \in R/I$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$, maka R/I merupakan ring diferensial yang dinyatakan dalam lemma berikut ini :

Lemma 4.2.1

Jika I ideal diferensial dari ring diferensial R maka R/I *ring faktor diferensial dengan derivasi yang didefinisikan pada persamaan* (4.1)

Bukti :

Karena diketahui R/I merupakan ring faktor terhadap operasi pergandaan dan penjumlahan yang didefinisikan pada persamaan (2.1), maka untuk membuktikan R/I ring diferensial cukup dibuktikan

(i). $\delta((a + I) + (b + I)) = \delta(a + I) + \delta(b + I)$
(ii). $\delta((a + I)(b + I)) = (\delta(a + I))(b + I) + (a + I)(\delta(b + I))$

untuk setiap $a + I, b + I \in R/I$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$.

(i). Akan dibuktikan $\delta((a + I) + (b + I)) = \delta(a + I) + \delta(b + I)$
Diberikan sebarang $a + I, b + I \in R/I$ dan sebarang $\delta \in \Delta$, maka berlaku :

$$\begin{aligned}\delta((a + I) + (b + I)) &= \delta((a + b) + I) = \delta(a + b) + I = \delta(a) + \delta(b) + I = \\ &\delta(a) + I + \delta(b) + I = \delta(a + I) + \delta(b + I)\end{aligned}$$

(ii). Akan dibuktikan $\delta((a + I)(b + I)) = (\delta(a + I))(b + I) + (a + I)(\delta(b + I))$

$$\begin{aligned}\delta((a + I)(b + I)) &= \delta((ab) + I) = \delta(ab) + I = (\delta(a)b + a\delta(b)) + I = \delta(a)b + I + a\delta(b) + I = \\ &(\delta(a) + I)(b + I) + (a + I)(\delta(b) + I) = (\delta(a + I))(b + I) + (a + I)(\delta(b + I))\end{aligned}$$

Jadi terbukti R/I merupakan ring diferensial. ■

Berdasarkan Definisi 2.5.3 diketahui bahwa suatu homomorfisma diferensial ring adalah homomorfisma ring yang komutatif terhadap derifasinya, yaitu jika ϕ homomorfisma diferensial ring dari ring diferensial (R,δ_1) ke ring diferensial (S,δ_2), maka $\phi\delta_1(a) = \delta_2\phi(a)$ untuk setiap $a \in R$. Akibatnya beberapa sifat dari homomorfisma ring yang dinyatakan dalam Teorema 2.4.8, dapat diturunkan pada homomorfisma diferensial ring, yaitu :

Teorema 4.2.2

Diberikan homomorfisma diferensial ring ϕ dari ring diferensial ring diferensial (R,δ_1) ke ring diferensial (S,δ_2), maka berlaku

i. $\text{Ker}(\phi) = \{a \in R \mid \phi(a) = 0_S,\ 0_S \in S\}$ *merupakan ideal diferensial dari R*

ii. $\phi(R) = \{\phi(a) \mid a \in R\}$ *merupakan subring diferensial dari S*

Bukti :

i. Berdasarkan Teorema 2.4.8 terbukti bahwa $\text{Ker}(\phi)$ merupakan ideal dari ring R_1, sehingga untuk membuktikan $\text{Ker}(\phi)$ ideal diferensial cukup ditunjukkan $\delta_1(a) \in \text{Ker}(\phi)$ untuk setiap $a \in \text{Ker}(\phi)$ jika dan hanya jika $\phi(\delta_1(a)) = 0_S$.
Ambil sebarang $a \in \text{Ker}(\phi)$, maka $\phi(a) = 0_S$, sehingga $\phi(\delta_1(a)) = \delta_2(\phi(a)) = \delta_2(0_S) = 0_S$.
Jadi $\delta_1(a) \in \text{Ker}(\phi)$, sehingga terbukti $\text{Ker}(\phi)$ merupakan ideal diferensial dari ring R.

ii. Berdasarkan Teorema 2.4.8 terbukti bahwa $\phi(R)$ merupakan subring dari S, sehingga untuk membuktikan $\phi(R)$ subring diferensial cukup ditunjukkan $\delta_2(a + b) = \delta_2(a) + \delta_2(b)$ dan $\delta_2(ab) = \delta_2(a)b + a\delta_2(b)$ untuk setiap $a,b \in \phi(R)$.
Ambil sebarang $a,b \in \phi(R)$, maka terdapat $x, y \in R$ dengan $\phi(x) = a$ dan $\phi(y) = b$.

(a). $\delta_2(a + b) = \delta_2(\phi(x) + \phi(y)) = \delta_2(\phi(x + y)) = \phi(\delta_1(x + y)) = \phi(\delta_1(x) + \delta_1(y)) =$
$\phi(\delta_1(x)) + \phi(\delta_1(y)) = \delta_2(\phi(x)) + \delta_2(\phi(y)) = \delta_2(a) + \delta_2(b)$

(b). $\delta_2(ab) = \delta_2(\phi(x)\phi(y)) = \delta_2(\phi(xy)) = \phi(\delta_1(xy)) = \phi(\delta_1(x)y + x\delta_1(y)) =$
$\phi(\delta_1(x)y) + \phi(x\delta_1(y)) = \phi(\delta_1(x))\phi(y) + \phi(x)\phi(\delta_1(y)) =$
$\delta_2(\phi(x))b + a\delta_2(\phi(y)) = \delta_2(a)b + a\delta_2(b)$.

Berdasarkan (a) dan (b) terbukti $\phi(R)$ subring diferensial dari S. ■

Teorema 4.2.3

Diberikan ring diferensial R dengan derivasi δ dan I ideal diferensial dari R dan didefinisikan homomorfisma ring natural ϕ dari R ke R/I dengan $\phi(a) = a + I$. Jika didefinisikan $\phi(\delta(a)) = \delta(a) + I$ untuk setiap $a \in R$, maka ϕ merupakan homomorfisma diferensial.

Bukti :

Ambil sebarang $a \in R$, maka $\phi(a) = a + I$, sehingga berlaku
$\phi(\delta(a)) = \delta(a) + I = \delta(a + I) = \delta(\phi(a))$.
Jadi terbukti ϕ merupakan homomorfisma diferensial. ■

Sama hal nya dengan homomorfisma ring, pada suatu homomorfisma diferensial ring disebut berturut-turut disebut monorfisma, epimorfisma, dan isomorfisma, jika ϕ berturut-turut adalah injektif, surjektif, dan bijektif. Jika ϕ bijektif dan merupakan pemetaan dari dan ke dirinya sendiri disebut automorfisma.

Selanjutnya karena isomorfisma diferensial merupakan isomorfisma ring, maka Torema Pertama, Kedua dan Ketiga Isomorfisma berlaku pada isomorfisma diferensial, yang dinyatakan dalam teorema-teorema berikut ini :

Teorema 4.2.4 (Teorema Isomorfisma Diferensial Pertama)

Diberikan homomorfisma diferensial $\phi : R \to S$ dan I kernel dari homomorfisma diferensial ϕ yang didefinisikan atas ring diferensial R, maka I ideal diferensial dari R dan terdapat isomorfisma diferensial dari R/I ke imageϕ.

Bukti :

Diketahui $\phi : R \to S$ homomorfisma diferensial dan $I = \text{Ker}\ \phi$ dan berdasarkan Teorema 4.2.1 terbukti bahwa I ideal diferensial.

Ring diferensial $R/_{I}$ isomorfik diferensial dengan $\phi(r)$ jika terdapat suatu pemetaan dari $R/_{I}$ ke $\phi(r)$ yang merupakan homomorfisma diferensial dan bijektif.

Berdasarkan Teorema 2.4.8 yang merupakan Teorema Isomorfisma Ring Pertama dan Teorema 4.2.3, maka terdapat suatu isomorfisma ring $\eta : R/_{I} \to \phi(R)$ yang didefinisikan dengan $\eta(r + I) = \phi(r)$ untuk setiap $r + I \in R/_{I}$ dan $r \in R$. Sehingga untuk menunjukkan $R/_{I}$ isomorfik diferensial dengan $\phi(r)$, cukup ditunjukkan $\eta\delta(r + I) = \delta\eta(r + I)$ untuk setiap $\delta \in \Delta$. Ambil sebarang $r + I \in R/_{I}$, maka

$\delta(\eta(r + I)) = \delta(\phi(r)) = \phi(\delta(r)) = \eta(\delta(r) + I) = \eta(\delta(r + I))$

Jadi terbukti $\eta : R/_{I} \to \phi(R)$ isomorfisma atau dengan kata lain $R/_{I}$ isomorfik diferensial dengan $\phi(r)$. ■

Teorema 4.2.5 (Teorema Isomorfisma Diferensial Kedua)

Diberikan ring diferensial R. Jika I dan J adalah ideal diferensial-ideal diferensial dari R maka I ideal diferensial dari I + J, I $\cap$ J ideal diferensial dari J, dan terdapat dengan tunggal isomorfisma diferensial dari $I + J/_{I}$ *ke* $J/_{I \cap J}$.

Bukti :

Karena untuk setiap $a \in I$ berlaku $a = a + 0$ dengan $0 \in J$, maka $a \in I + J$, sehingga $I \subseteq I + J$ dan diketahui I ideal diferensial, jadi terbukti I ideal diferensial dari $I + J$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 4.1.1 terbukti bahwa $I \cap J$ merupakan ideal diferensial, karena $I \cap J \subseteq J$ maka $I \cap J$ merupakan ideal diferensial dari J. Akibatnya dapat dibentuk ring faktor diferensial $I + J/_{I}$ dan $J/_{I \cap J}$.

Berdasarkan Teorema 2.4.9 yang merupakan Teorema Kedua Isomorfisma ring, maka terdapat dengan tunggal isomorfisma $\eta : J/_{I \cap J} \to I + J/_{I}$ yang memenuhi $\eta\ \mu = \phi$ dengan ϕ epimorfisma dari J ke $I + J/_{I}$, Ker $\phi = I \cap J$ dan μ homomorfisma natural dari J ke $J/_{I \cap J}$ yang berdasarkan Teorema 4.2.4 merupakan homomorfisma diferensial. Sehingga untuk membuktikan η homomorfisma diferensial cukup ditunjukkan ϕ dan η homomorfisma diferensial.

i. diberikan sebarang $r \in J$ dan $\delta \in \Delta$, maka berlaku
   $\delta(\phi(r)) = \delta(r + I) = \delta(r) + I = \phi(\delta(r))$.
ii. Diberikan sebarang $r + (I \cap J) \in J/_{I \cap J}$ dan $\delta \in \Delta$, maka berlaku

$$\begin{aligned}\delta(\eta(\, r + (I \cap J))) &= \delta(\eta(\mu(r))) = \delta(\phi(r)) = \phi(\delta(r)) = \eta(\mu(\delta(r))) = \eta(\delta(r) + (I \cap J)) \\ &= \eta(\delta(r + (I \cap J)))\end{aligned}$$

Jadi berdasarkan (i) dan (ii) terbukti η homomorfisma diferensial. Akibatnya terbukti bahwa η isomorfisma diferensial. ■

Teorema 4.2.6 (Teorema Isomorfisma Diferensial Ketiga

Jika I dan J berturut-turut adalah ideal diferensial dari ring diferensial R dan I $\subseteq$ J maka terdapat dengan tunggal isomorfisma diferensial dari $R/_{J}$ *ke* $\dfrac{R/_{I}}{J/_{I}}$

Bukti :

Diketahui I dan J merupakan ideal-ideal diferensial dari R, sehingga berdasarkan Lemma 4.2.1 dapat dibentuk ring faktor diferensial R/J dan R/I, dan diketahui pula bahwa $I \subseteq J$, sehingga dapat dibentuk ring faktor diferensial J/I. Selanjutnya karena setiap $r + I \in J/I$ dengan $r \in J$ dan diketahui J ideal dari R, maka $r + I \in R/I$, sehingga J/I merupakan ideal diferensial dari R/I. Berdasarkan Teorema 2.4.10 yang merupakan Teorema Isomorfisma Ring Ketiga maka terdapat dengan tunggal isomorfisma $\eta : \dfrac{R/I}{J/I} \to R/J$ yang memenuhi $\eta\,\mu = \phi$ dengan ϕ epimorfisma dari R/I ke R/J, Ker $\phi = J/I$ dan μ homomorfisma natural dari R/I ke $\dfrac{R/I}{J/I}$ yang berdasarkan Teorema 4.2.4 merupakan homomorfisma diferensial. Sehingga untuk membuktikan η homomorfisma diferensial cukup ditunjukkan ϕ dan η homomorfisma diferensial.

i. diberikan sebarang $r + I \in R/I$ dan $\delta \in \Delta$, maka berlaku

$$\delta(\phi(r + I)) = \delta(r + J) = \delta(r) + J = \phi(\delta(r) + I) = \phi(\delta(r + I)).$$

ii. Diberikan sebarang $r + J/I \in \dfrac{R/I}{J/I}$ dan $\delta \in \Delta$, maka berlaku

$$\delta(\eta(r + J/I)) = \delta(\eta(\mu(r + I))) = \delta(\phi(r + I)) = \phi(\delta(r + I)) = \eta(\mu(\delta(r + I))) =$$
$$\eta(\mu(\delta(r) + I))) = \eta(\delta(r) + J/I) = \eta(\delta(r + J/I)).$$

Jadi berdasarkan (i) dan (ii) terbukti η homomorfisma diferensial. Akibatnya terbukti bahwa η isomorfisma diferensial. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat diambil kesimpulan bahwa setiap sifat yang berlaku pada ideal dan homomorfisam ring, dapat diturunkan pada ideal diferensial dari ring diferensial dan homomorfisam diferensial yaitu :

1. Jika I dan J ideal diferensial dari ring diferensial, maka $I \cap J$ dan $I + J$ merupakan ideal diferensial. Jika I ideal diferensial radikal dari ring diferensial R dengan himpunan derivasi berhingga Δ, maka berlaku jika $ab \in I$ maka $a\delta(b) \in I$ dan $\delta(a)b \in I$, untuk $a, b \in R$ dan untuk setiap $\delta \in \Delta$
2. Diberikan ideal diferensial radikal I dari ring diferensial R dan S sebarang himpunan bagian dari R. Jika didefinisikan $T = \{x \in R \mid xS \subset I\}$, maka T ideal diferensial radikal dari R.
3. Kernel dari homomorfisma diferensial merupakan ideal diferensial, dan image dari homomorfisma diferensial merupakan subring diferensial dari S
4. Diberikan ring diferensial R dengan derivasi δ dan I ideal diferensial dari R dan didefinisikan homomorfisma ring natural ϕ dari R ke R/I dengan $\phi(a) = a + I$. Jika didefinisikan $\phi(\delta(a)) = \delta(a) + I$ untuk setiap $a \in R$, maka ϕ merupakan homomorfisma diferensial.

5. Diberikan homomorfisma diferensial $\phi : R \to S$ dan I kernel dari homomorfisma diferensial ϕ yang didefinisikan atas ring diferensial R, maka I ideal diferensial dari R dan terdapat isomorfisma diferensial dari R/I ke image ϕ
6. Diberikan ring diferensial R. Jika I dan J adalah ideal diferensial-ideal diferensial dari R maka I ideal diferensial dari $I + J$, $I \cap J$ ideal diferensial dari J, dan terdapat dengan tunggal isomorfisma diferensial dari $I + J/I$ ke $J/I \cap J$
7. Jika I dan J berturut-turut adalah ideal diferensial dari ring diferensial R dan $I \subseteq J$ maka terdapat dengan tunggal isomorfisma diferensial dari R/J ke $\dfrac{R/I}{J/I}$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, A.W. and S.H Weintraub, 1992, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2] Dummit, D.S.&Richard M.F., 2002, *Abstract Algebra*, JhonWiley&Sons, Inc., Singapura

[3] Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wasley Publishing Company, New York

[4] Morrison, Sally, 2002, Differential Polynomial Algebra in Characteristic Zero, *Kolchin Seminar in Differential Algebra*