PEMETAAN LINIER KONTINU PADA RUANG BERNORMA KABUR

Muhammad Ahsar K. dan Yuni Yulida

Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: m_ahsar@yahoo.com, y_yulida@yahoo.com,

ABSTRAK

Di dalam ruang metrik dikenal pemetaan linier dan pemetaan kontinu. Kedua pemetaan tersebut mempunyai sifat-sifat yang penting di dalam ruang bernorma. Sifat-sifat tersebut, di dalam paper ini dikaji pada ruang bernorma kabur. Kajian ini dimulai dengan menunjukkan bahwa ruang bernorma kabur merupakan ruang metrik kabur. Kemudian dikonstriksi definisi pemetaan kontinu kabur dan himpunan terbatas kabur pada ruang bernorma kabur. Selanjutnya dikonstruksi generalisasi dari sifat-sifat hubungan antara pemetaan terbatas kabur dengan pemetaan kontinu kabur pada ruang bernorma kabur.

Kata-kata kunci*: *ruang metrik kabur, ruang bernorma kabur, kontinu kabur, terbatas kabur

ABSTRACT

In metric space we have known about linear mapping and continuous mapping. Both of the mappings have the important properties in normed space. In this paper, we study the properties on fuzzy normed space. We start our results with first to show that the fuzzy normed space is fuzzy metric space. Then, we define the fuzzy continuous mapping and the fuzzy bounded set on fuzzy normed space. Moreover, we construct the generalisation of properties of relation between fuzzy bounded mapping and fuzzy continuous mapping on fuzzy normed space.

Keywords: *fuzzy metric space, fuzzy normed space, fuzzy continuous, fuzzy bounded.*

1. PENDAHULUAN

Pada paper ini, yang dimaksud dengan ruang linier (*linier space*) adalah ruang vektor atas lapangan □ atau □ dan anggota lapangan disebut skalar (*scalar*). Paper ini dimulai dengan asumsi bahwa konsep-konsep pada ruang metrik (*metric space*) telah diketahui. Oleh karena itu, pembicaraan dimulai pada ruang metrik khusus, yaitu ruang bernorma (*normed space*). Di satu pihak, ruang bernorma merupakan ruang linier dan di pihak lain merupakan ruang metrik.

Konsep ruang metrik terus mengalami perkembangan. Diilhami oleh konsep himpunan kabur (*fuzzy set*) yang diperkenalkan oleh Zadeh (1965) sebagai perluasan dari konsep himpunan tegas (biasa disebut *Cantor set*), Kramosil dan

Michalek (1975) memperkenalkan konsep ruang metrik kabur (*fuzzy metric space*). Definisi ruang metrik kabur ini kemudian dimodifikasi oleh George dan Veeramani (1994). Ruang metrik kabur khusus, yang sekaligus merupakan generalisasi ruang bernorma, yaitu ruang bernorma kabur (*fuzzy normed space*) diperkenalkan oleh Saadati and Vaezpour (2005).

Di dalam ruang metrik telah didefinisikan pemetaan linier (*linier mapping*) dan pemetaan kontinu (*continuous mapping*). Kedua pemetaan tersebut mempunyai sifat-sifat yang penting di dalam ruang bernorma. Sifat-sifat tersebut, di dalam paper ini dikaji pada ruang bernorma kabur dengan terlebih dahulu mendefiniskan himpunan terbatas kabur (*fuzzy bounded set*) pada ruang bernorma kabur. Kajian ini menggunakan konsep barisan konvergen kabur (*fuzzy convergence sequence*) dan pemetaan kontinu kabur (*fuzzy continuous mapping*) yang telah didefinisikan oleh Ahsar (2009) di dalam ruang metrik kabur.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Ruang Bernorma

Pada bagian ini, pembahasan akan dimulai dari pengertian ruang bernorma dan sifat-sifatnya yang akan digunakan sebagai dasar pembicaraan selanjutnya.

Definisi 2.1.1 *Diberikan ruang linier K. Fungsi* $x \in K \to \|x\| \in \mathbb{R}$, *yang mempunyai sifat-sifat:*

(*N1*) $\|x\| \geq 0$, *untuk setiap* $x \in K$

$\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = \theta$ (θ *vektor nol*)

(*N2*) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$, *untuk setiap skalar* α *dan* $x \in K$

(*N3*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *untuk setiap* $x, y \in K$ (*ketaksamaan segitiga*),

disebut ***norma*** *(norm) pada K dan bilangan nonnegatif* $\|x\|$ *disebut* ***norma vektor*** *x. Ruang linier N yang dilengkapi dengan suatu norma* $\|.\|$ *disebut* ***ruang bernorma*** *(normed space) dan biasa ditulis dengan* $(K, \|.\|)$, *atau ditulis K saja asalkan normanya telah diketahui.*

Setelah memahami pengertian ruang bernorma, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.1.2 *Setiap ruang bernorma K merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan:* $d(x, y) = \|x - y\|$, *untuk setiap* $x, y \in K$.

Bukti:

(M1) Untuk setiap $x, y \in K$, menurut Definisi 2.1.1 (N1) benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \text{ dan } d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow x = y .$$

(M2) Untuk setiap $x, y \in K$, menurut Definisi 2.1.1 (N2) benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| . \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x) .$$

(M3) Untuk setiap $x, y, z \in K$, menurut Definisi 2.1.1 (N3) benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|(x - z)\| + \|(z - y)\| = d(x, z) + d(z, y) .$$

Jadi, ruang bernorma K merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan $d(x,y)=\|x-y\|$, untuk setiap $x,y\in K$. ■

Berdasarkan Teorema 2.1.2, maka semua konsep yang berlaku pada ruang metrik berlaku pula pada ruang bernorma dengan pengertian $d(x,y)=\|x-y\|$ untuk setiap x dan y di dalam ruang bernorma tersebut.

2.2. Pemetaan Linier dan Fungsi Kontinu

Pemetaan linier adalah suatu fungsi yang bersifat aditif dan homogen. Secara matematis, pengertiannya diberikan di dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.2.1 *Diberikan dua ruang vector V dan W, masing-masing atas lapangan F yang sama. Pemetaan* $f:V\to W$ *disebut* ***Pemetaan linier*** *jika*

(i) *f aditif:* $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *untuk setiap* $x,y\in V$ *, dan*

(ii) *f homogen:* $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ *untuk setiap skalar* α *dan* $x\in V$.

Berdasarkan Definisi 2.2.1, mudah dipahami teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.2.2 *Diberikan dua ruang vector V dan W, masing-masing atas lapangan F yang sama (□ atau □). Fungsi* $f:V\to W$ *merupakan Pemetaan linier jika dan hanya jika untuk sebarang skalar* α,β *dan vektor* $x,y\in V$ *berlaku* $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$.

Teorema 2.2.3 *Diberikan dua ruang vector V dan W, masing-masing atas lapangan F yang sama. Jika* $f:V\to W$ *merupakan Pemetaan linier, maka*

(i) $f(-x)=-f(x)$ *untuk setiap* $x\in V$.

(ii) $f(x-y)=f(x)-f(y)$ *untuk setiap* $x,y\in V$.

(iii) $f(\theta)=\overline{\theta}$, *dengan* $\theta\in V$ *dan* $\overline{\theta}\in W$ *masing-masing menyatakan vektor nol.*

(iv) $f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k)$ *untuk setiap skalar* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ *dan vektor-vektor* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in V$.

Telah diketahui sebelumnya bahwa semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik berlaku pula pada ruang bernorma dengan pengertian $d(x,y)=\|x-y\|$ untuk setiap x dan y di dalam ruang bernorma tersebut. Atas dasar hal tersebut, konsep Pemetaan kontinu pada ruang metrik dapat pula dikembangkan menjadi Pemetaan kontinu pada ruang bernorma. Pengertian Pemetaan kontinu pada ruang bernorma ke ruang bernorma diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.4 *Diberikan dua ruang bernorma* $\left(X,\|.\|_X\right)$ *dan* $\left(Y,\|.\|_Y\right)$. *Pemetaan* $f:X\to Y$ *dikatakan* ***kontinu*** *(continuous)* ***di*** *(at) suatu titik* $a\in X$ *jika untuk*

sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ *ada bilangan* $\delta > 0$ *sehingga untuk setiap* $x \in X$ *dengan sifat* $\|a - x\|_X < \delta$ *berakibat* $\|f(a) - f(x)\|_Y < \varepsilon$.
Selanjutnya, Pemetaan f dikatakan ***kontinu pada*** *(on)* $A \subseteq X$ *jika f kontinu di setiap titik* $a \in A$.

Definisi di atas dapat ditulis sebagai berikut: Pemetaan $f : X \to Y$ dikatakan kontinu di suatu titik $a \in X$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \in N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon\left(f(a)\right)$. Oleh karena itu, diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 2.2.5 *Diberikan dua ruang bernorma X dan Y. Pemetaan* $f : X \to Y$ *kontinu di suatu titik* $a \in X$ *jika dan hanya jika untuk setiap barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *yang konvergen ke a berakibat barisan* $\{f(x_n)\}$ *konvergen ke* $f(a)$.

Salah satu teorema dasar penting tentang pemetaan linier kontinu dari suatu ruang bernorma ke ruang bernorma diberikan di dalam Teorema 2.2.7. Sebelumnya, perlu diingatkan pengertian himpunan terbatas berikut ini.

Definisi 2.2.6 *Diketahui X ruang bernorma. Himpunan* $\{\|x\| : x \in X\}$ *dikatakan* ***terbatas*** *jika ada bilangan real* $M \geq 0$ *sehingga* $\|x\| \leq M$ *untuk setiap* $x \in X$.

Teorema 2.2.7 *Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. Jika* $f : X \to Y$ *pemetaan linier, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*
(i) *Pemetaan f kontinu pada X.*
(ii) *Pemetaan f kontinu di* θ.
(iii) *Pemetaan f kontinu disetiap* $x \in X$.
(iv) *Himpunan* $\{\|f(x)\| : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1\}$ *terbatas.*
(v) *Ada bilangan* $M \geq 0$ *sehingga* $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ *untuk setiap* $x \in X$.

2.3. Ruang Metrik Kabur

Sebelum dibahas pengertian ruang metrik kabur, terlebih dahulu diberikan pengertian himpunan kabur sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 *Diberikan himpunan semesta* X, $A \subset X$, *dan fungsi* $\mu_A : X \to [0,1]$. *Himpunan pasangan terurut* $\{(x; \mu_A(x)) : x \in X\}$ *disebut* ***himpunan kabur*** $\tilde{A}$ *di dalam semesta X. Sedangkan fungsi* μ_A *disebut* ***fungsi keanggotaan*** *dari himpunan A.*

Selanjutnya, di dalam paper ini yang disebut himpunan kabur di dalam X adalah fungsi keanggotaan μ_A.

Di dalam teori himpunan kabur dikenal dua jenis operasi, yaitu operasi uner (komplemen) dan operasi biner (irisan, gabungan, selisih, dan selisih simetri).

Operasi-operasi tersebut dapat dirampatkan sehingga menjadi kejadian khusus dari perampatannya. Salah satunya adalah operasi irisan kabur, biasa disebut *norma-t* (*triangular norm*). Berikut ini diberikan pengertian norma-*t*.

Definisi 2.3.2 *Fungsi* $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ *disebut* ***norma-t*** *jika memenuhi sifat:*

(i) *asosiatif:* $a*(b*c)=(a*b)*c$,

(ii) *komutatif:* $a*b=b*a$,

(iii) *unsur identitas 1:* $a*1=a$ *untuk setiap* $a\in[0,1]$,

(iv) *monoton:* $a*b\le c*d$ *dengan* $a\le c$ *dan* $b\le d$,

untuk setiap $a,b,c,d\in[0,1]$.

Selanjutnya, fungsi $*$ *disebut* ***norma-t kontinu****, jika* $*$ *kontinu.*

Selanjutnya, diberikan pengertian ruang metrik kabur sebagai berikut.

Definisi 2.3.3 *Diberikan* X *himpunan tak kosong dan* $*$ *norma-t kontinu.*

(i) *Himpunan kabur* $M:X^2\times(0,\infty)\to[0,1]$ *dengan sifat, untuk setiap* $x,y,z\in X$ dan $t,s>0$ *berlaku:*

(F1) $M(x,y,t)>0$,

(F2) $M(x,y,t)=1$ *jika dan hanya jika* $x=y$,

(F3) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$,

(F4) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$,

(F5) $M(x,y,\cdot):(0,\infty)\to[0,1]$ *kontinu,*

disebut ***metrik kabur*** *pada* X .

(ii) *Himpunan* X *yang dilengkapi dengan metrik kabur M dan t-norm kontinu* $*$, *dituliskan dengan tupel-3* $(X,M,*)$, *disebut* ***ruang metrik kabur****.* *Selanjutnya, jika metrik kaburnya telah diketahui (tertentu), maka ruang metrik kabur* $(X,M,*)$ *biasa ditulis dengan X saja.*

Contoh 2.3.4 Diberikan ruang metrik (X,d) dan didefinisikan fungsi $M:X^2\times(0,\infty)\to[0,1]$ dengan:

$$M(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)},$$

untuk setiap $x,y\in X$ dan $t>0$. Jika didefinisikan $*$ dengan $a*b=\min\{a,b\}$ (atau $a*b=ab$) untuk setiap $a,b\in[0,1]$, maka dapat ditunjukkan bahwa $(X,M,*)$ merupakan ruang metrik kabur. Ruang metrik kabur ini biasa disebut **ruang metrik kabur standar** (*standard fuzzy metric space*). Untuk $X=\mathbb{R}$, $(X,M,*)$ disebut **ruang metrik kabur biasa** (*usual fuzzy metric space*).

Dari Contoh 2.3.4, dapat dikatakan bahwa setiap ruang metrik dapat dibentuk menjadi ruang metrik kabur. Salah satu sifat dari metrik kabur diberikan sebagai berikut.

Lemma 2.3.5 *Diberikan* $(X, M, *)$ *ruang metrik kabur. Untuk setiap* $x, y \in X$, $M(x, y, \cdot)$ *tidak turun (nondecreasing) pada* $(0, \infty)$.

Selanjutnya, diberikan pengertian barisan konvergen dan pengertian barisan Cauchy di dalam ruang metrik kabur sebagai berikut.

Definisi 2.3.6 *Diberikan ruang metrik kabur* $(X, M, *)$ *dan barisan* $\{x_n\} \subset X$.

(i) *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* ***konvergen ke*** $x \in X$ ***di dalam ruang metrik kabur*** $(X, M, *)$, *disingkat,* ***konvergen kabur****, jika untuk setiap* $t > 0$ *berlaku*

$$\lim_{n \to \infty} M(x_n, x, t) = 1.$$

Dalam hal $\{x_n\}$ *konvergen-M, barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* ***mempunyai limit*** x *untuk* $n \to \infty$ *dan dituliskan dengan:* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Selanjutnya, x *disebut* ***limit barisan*** $\{x_n\}$. *Barisan yang tak konvergen-M dikatakan* ***divergen kabur****.*

(ii) *Barisan* $\{x_n\}$ *disebut* ***barisan Cauchy di dalam ruang metrik kabur*** $(X, M, *)$, *disingkat,* ***barisan Cauchy kabur****, jika*

$$\lim_{n \to \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1,$$

untuk setiap $t > 0$ *dan* $p \in \mathbb{N}$.

Setiap barisan konvergen kabur merupakan barisan Cauchy kabur. Hal ini diberikan di dalam sifat berikut ini.

Teorema 2.3.7 *Diberikan* $(X, M, *)$ *ruang metrik kabur dan barisan* $\{x_n\} \subset X$. *Jika barisan* $\{x_n\}$ *konvergen kabur, maka* $\{x_n\}$ *merupakan barisan Cauchy kabur.*

Konvers dari Teorema 2.3.7 belum tentu benar. Jika ada suatu kasus sehingga konversnya benar, diperoleh definisi berikut ini.

Definisi 2.3.8 *Ruang metrik kabur* $(X, M, *)$ *dikatakan* ***lengkap kabur*** *jika setiap barisan Cauchy kabur merupakan barisan konvergen kabur.*

Salah satu contoh ruang metrik kabur lengkap kabur adalah ruang metrik kabur biasa $(\mathbb{R}, M, *)$.

Selanjutnya diberikan pengertian pemetaan kontinu (*continuous map*) pada ruang metrik kabur.

Definisi 2.3.9 *Diberikan ruang metrik kabur* $(X, M_1, *_1)$ *dan* $(Y, M_2, *_2)$. *Pemetaan* $T : X \to Y$ *dikatakan* ***kontinu*** *(continuous)* ***di*** *(at)* $a \in X$, *disingkat,*

kontinu kabur, *jika untuk setiap* $\varepsilon \in (0,1)$ *terdapat* $\delta \in (0,1)$ *sehingga untuk setiap* $x \in X$ *dan* $t > 0$ *dengan sifat* $M_1(x,a,t) > 1-\delta$ *berakibat*

$$M_2(T(x),T(a),t) > 1-\varepsilon .$$

Pemetaan T *dikatakan* ***kontinu kabur pada*** *(on)* $A \subset X$ *jika T kontinu-M di setiap* $a \in A$.

Salah satu sifat dari pemetaan kontinu kabur dalam hubungannya dengan barisan konvergen kabur diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.3.10 *Diberikan ruang metrik kabur* $(X, M_1, *)$ *dan* $(Y, M_2, *)$. *Pemetaan* $T : X \to Y$ *kontinu kabur di titik* $a \in X$ *jika dan hanya jika setiap barisan* $\{x_n\} \subset X$ *yang konvergen kabur ke a berakibat barisan* $\{T(x_n)\}$ *konvergen kabur ke* $T(a)$.

2.4 Ruang Bernorma Kabur

Pengertian ruang bernorma kabur diberikan di dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.4.1 *Tupel 3* $(X, N, *)$ *disebut* ***ruang bernorma kabur*** *jika X suatu ruang vektor,* $*$ *suatu norma-t kontinu, dan N suatu himpunan kabur pada* $X \times (0,\infty)$ *yang memenuhi kondisi di bawah ini,*

untuk setiap $x, y \in X$ *dan* $s,t > 0$ *berlaku:*

(N1) $N(x,t) > 0$,

(N2) $N(x,t) = 1 \Leftrightarrow x = \theta$,

(N3) $N(\alpha x,t) = N\left(x, \dfrac{t}{|\alpha|}\right)$; *untuk setiap* $\alpha \neq 0$,

(N4) $N(x,t) * N(y,s) \leq N(x+y, t+s)$,

(N5) $N(x,\cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ *kontinu,*

(N6) $\lim_{t\to\infty} N(x,t) = 1$.

Contoh 2.4.2 *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|.\|)$. *Didefinisikan* $a * b = ab$ *(atau* $a * b = \min\{a,b\}$ *dan*

$$N(x,t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\|x\|}; k,m,n \in \mathbb{R}^+ .$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(X, N, *)$ *merupakan ruang bernorma kabur.*

Khususnya, untuk $k = m = n = 1$ diperoleh

$$N(x,t) = \frac{t}{t + \|x\|},$$

yang disebut **norma kabur standar** yang diinduksi dari norma $\|.\|$.

Pengertian pemetaan terbatas di dalam ruang bernorma kabur diberikan di dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.4.3 *Diberikan* $(X, N_1, *_1)$ *dan* $(Y, N_2, *_2)$ *masing-masing ruang bernorma kabur. Suatu pemetaan linier* $T:(X, N_1, *_1) \to (Y, N_2, *_2)$ *dikatakan* ***terbatas kabur*** *jika terdapat konstanta* $h \in \mathbb{R}^+$ *sehingga untuk setiap* $x \in X$ *dan* $t > 0$ *berlaku*

$$N_2(T(x), t) \geq N_1\left(x, \frac{t}{h}\right).$$

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan penelitian dari buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas konsep ruang metrik, konsep ruang metrik kabur, konsep ruang bernorma, dan konsep ruang bernorma kabur, dan selanjutnya melakukan kajian terhadap konsep-konsep tersebut.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah memahami pengertian ruang bernorma kabur, pertama-tama dikonstruksi teorema berikut ini sebagai perluasan dari Teorema 2.1.2.

Teorema 4.1 *Setiap ruang bernorma kabur* $(X, N, *)$ *merupakan ruang metrik kabur terhadap metrik kabur M dengan:* $M(x, y, t) = N(x - y, t)$, *untuk setiap* $x, y \in X$.

Bukti:

Untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ berlaku:

(F1) $M(x, y, t) = N(x - y, t) > 0$, menurut Definisi 4.1 (N1).

(F2) $M(x, y, t) = N(x - y, t) = 1 \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow x = y$, menurut Definisi 4.1 (N2).

(F3) $M(x, y, t) = N(x - y, t) = N((-1)(y - x), t)$

$= N\left(y - x, \frac{t}{|-1|}\right) = N(y - x, t) = M(y, x, t)$, menurut Definisi 4.1 (N3).

Untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $t, s > 0$ berlaku:

(F4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) = N(x - y, t) * N(y - z, s)$

$\leq N((x - y) + (y - z), t + s) = N(x - z, t + s) = M(x, z, t + s)$,

menurut Definisi 4.1 (N4).

(F5) $M(x, y, \cdot) = N(x - y, \cdot) : (0, \infty) \to [0,1]$ kontinu, menurut Definisi 4.1 (N5).

Jadi, ruang bernorma kabur $(X, N, *)$ merupakan ruang metrik kabur terhadap metrik kabur *M* dengan: $M(x, y, t) = N(x - y, t)$, untuk setiap $x, y \in X$. ■

Berdasarkan Teorema 4.3 di atas, maka semua konsep yang berlaku pada ruang metrik kabur berlaku pula pada ruang bernorma kabur dengan pengertian bahwa $M\left(x,y,t\right)=N\left(x-y,t\right)$ untuk setiap x dan y di dalam ruang bernorma kabur tersebut. Oleh karena itu, Definisi 2.3.9 dapat dinyatakan (ekuivalen) di dalam ruang bernorma kabur sebagai berikut.

Definisi 4.2 *Diberikan ruang bernorma kabur* $\left(X,N_1,*_1\right)$ *dan* $(Y,N_2,*_2)$. *Pemetaan* $T:X\to Y$ *dikatakan* ***kontinu kabur di*** $a\in X$ *, jika untuk setiap* $\varepsilon\in(0,1)$ *terdapat* $\delta\in(0,1)$ *sehingga untuk setiap* $x\in X$ *dan* $t>0$ *dengan sifat* $N_1(x-a,t)>1-\delta$ *berakibat*

$$N_2(T(x)-T(a),t)>1-\varepsilon .$$

Pemetaan T *dikatakan* ***kontinu kabur pada*** $A\subset X$ *jika T kontinu kabur di setiap* $a\in A$.

Selanjutnya dikonstruksi pengertian himpunan terbatas kabur pada ruang bernorma kabur sebagai berikut.

Definisi 4.3 *Diberikan* $\left(X,N,*\right)$ *ruang bernorma kabur dan dibentuk himpunan* $A=\left\{N\left(x,t\right):x\in X \text{ dan } t>0\right\}$. *Himpunan* A *dikatakan* ***terbatas kabur*** *jika terdapat bilangan* $M\in\left(0,1\right]$ *sehingga*

$$N\left(x,t\right)\geq\frac{t}{t+M}$$

untuk setiap $x\in X$ *dan* $t>0$.

Lebih lanjut diberikan generalisasi dari Teorema 2.6, yaitu teorema tentang pemetaan linier kontinu kabur dari suatu ruang bernorma kabur ke ruang bernorma kabur yang lain.

Teorema 4.4 *Diketahui* $\left(X,N_1,*_1\right)$ *dan* $\left(Y,N_2,*_2\right)$ *masing-masing ruang bernorma kabur. Jika* $f:X\to Y$ *pemetaan linier, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(i) *Pemetaan f kontinu kabur pada X.*

(ii) *Pemetaan f kontinu kabur di* θ.

(iii) *Pemetaan f kontinu kabur disetiap* $x\in X$.

(iv) *Himpunan* $\left\{N_2\left(f(x),t\right):N_1\left(x,t\right)\geq\frac{t}{t+1},x\in X \text{ dan } t>0\right\}$ *terbatas kabur.*

(v) *Ada bilangan* $M\in\left(0,1\right]$ *sehingga* $N_1\left(x,t\right)\leq M.N_2\left(f(x),t\right)$ *untuk setiap* $x\in X$ dan $t>0$.

Bukti:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Jelas berdasarkan definisi pemetaan kontinu kabur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Diambil sebarang $x\in X$ dan sebarang barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ yang konvergen kabur ke *x*, artinya untuk setiap $t>0$ berlaku $\lim_{n\to\infty}N_1\left(x_n-x,t\right)=1$.

Mudah dipahami bahwa barisan $\{x_n - x\} = \{x_n\} - \{x\}$ konvergen kabur ke $\theta \in X$. Dengan demikian, menurut yang diketahui diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} N_2\left(f\left(x_n - x\right) - f(\theta), t\right) = \lim_{n\to\infty} N_2\left(f\left(x_n - x\right) - \bar{\theta}, t\right) = 1, \quad \bar{\theta} \in Y .$$

Karena pemetaan *f* linier, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} N_2\left(f(x_n) - f(x), t\right) = \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(f(x_n) - f(x)\right) - \bar{\theta}, t\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} N_2\left(f(x_n - x) - \bar{\theta}, t\right) = 1,$$

yang berarti bahwa pemetaan *f* kontinu kabur di setiap titik $x \in X$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Andaikan himpunan $\left\{ N_2\left(f(x), t\right) : N_1\left(x, t\right) \geq \dfrac{t}{t+1}, x \in X \text{ dan } t > 0 \right\}$ tak terbatas kabur. Hal ini berarti bahwa untuk setiap bilangan asli n dan $t > 0$, ada vektor-vektor $x_n \in X$ dengan $N_1\left(x, t\right) \geq \dfrac{t}{t+1}$ tetapi

$$N_2\left(f(x_n), t\right) < \frac{t}{t + 1/n} .$$

Dibentuk vektor-vektor $u_n = \dfrac{x_n}{n}$ untuk setiap bilangan asli *n*. Karena

$$\lim_{n\to\infty} N_1\left(u_n, t\right) = \lim_{n\to\infty} N_1\left(\frac{x_n}{n}, t\right) = \lim_{n\to\infty} N_1\left(x_n - \theta, nt\right) = 1 ,$$

maka diperoleh barisan vektor $\{u_n\} \subseteq X$ konvergen kabur ke θ. Selanjutnya, karena pemetaan *f* kontinu kabur di θ, maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(f(u_n) - \bar{\theta}\right), t\right) = \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(f(u_n) - f(\theta)\right), t\right) = 1$$

atau

$$1 = \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(f\left(\frac{x_n}{n}\right) - \bar{\theta}\right), t\right) = \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(\frac{f(x_n)}{n} - \bar{\theta}\right), t\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(\frac{f(x_n) - \bar{\theta}}{n}\right), t\right) = \lim_{n\to\infty} N_2\left(\left(f(x_n) - \bar{\theta}\right), nt\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} N_2\left(f(x_n), nt\right).$$

Berarti ada bilangan $\alpha > 0$ sehingga $N_2\left(f(x_n), t\right) \geq \alpha$ untuk setiap bilangan asli *n* dan $t > 0$, suatu kontradiksi. Jadi, seharusnya himpunan

$$\left\{ N_2\left(f(x), t\right) : N_1\left(x, t\right) \geq \frac{t}{t+1}, x \in X \text{ dan } t > 0 \right\}$$

terbatas kabur.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Menurut hipotesis, terdapat bilangan $M \in \left(0, 1\right]$ sehingga untuk setiap $y \in X$ dan $t > 0$ dengan $N_1\left(y, t\right) \geq \dfrac{t}{t+1}$ benar bahwa $N_2\left(f(y), t\right) \geq \dfrac{t}{t+M}$ untuk setiap $x \in X$ *dan* $t > 0$.

Diambil vektor $x \in X$. Untuk $x \neq \theta$, karena vektor $u = \dfrac{x}{N_1(x,t)} \in X$ dan $N_1(u,t) = 1$ untuk setiap $t > 0$, maka diperoleh

$$N_2(f(u),t) = N_2\left(f\left(\frac{x}{N_1(x,t)}\right),t\right) = \frac{1}{N_1(x,t)} N_2(f(x),t) \geq \frac{t}{t+M},$$

atau $N_1(x,t) \leq \dfrac{(t+M)}{t} N_2(f(x),t) = K.N_2(f(x),t)$, dengan $K = \dfrac{(t+M)}{t} > 0$.
Jika $x = \theta$, tetap benar karena untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$N_1(\theta,t) = 1 \leq K.1 = K.N_2(\overline{\theta},t) = K.N_2(f(\theta),t).$$

$(\text{v}) \Rightarrow (\text{i})$: Karena untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ ada bilangan $M \in (0,1]$ sehingga diperoleh

$$N_1(x-y,t) \leq M.N_2(f(x)-f(y),t) = M.N_2(f(x-y),t),$$

maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon \in (0,1)$ dapat dipilih bilangan

$$\delta = (1 - M + M\varepsilon) \in (0,1)$$

sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $N_1(x-y,t) > 1-\delta$ berakibat

$$\begin{aligned} M.N_2(f(x)-f(y),t) &= M.N_2(f(x-y),t) \\ &\geq N_1(x-y,t) \\ &> 1-\delta = 1-(1-M+M\varepsilon) = M - M\varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$N_2(f(x)-f(y),t) > \frac{M-M\varepsilon}{M} = 1-\varepsilon,$$

atau terbukti bahwa pemetaan f kontinu kabur pada X. ■

Salah satu sifat dari operator linier dalam hal hubungan antara konsep pemetaan terbatas kabur pada Definisi 2.4.3 dengan konsep pemetaan kontinu kabur pada Definisi 4.2 diberikan di dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.5 *Pemetaan linier $T:(X,N_1,*_1) \to (Y,N_2,*_2)$ terbatas kabur jika dan hanya jika T kontinu kabur.*
Bukti:
$(\Rightarrow)$ Diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ di dalam *X* yang konvergen kabur ke $\theta \in X$, artinya untuk setiap $\varepsilon \in (0,1)$ dan $t > 0$ berlaku $N_1(x_n,t) > 1-\varepsilon$ untuk $n \to \infty$. Menurut yang diketahui, terdapat $h \in \mathbb{R}^+$ sehingga berlaku

$$N_2(T(x_n),t) \geq N_1(hx_n,t) = N_1\left(x_n,\frac{t}{h}\right) > 1-\varepsilon.$$

untuk setiap $\varepsilon \in (0,1)$ dan $\dfrac{t}{h} > 0$. Ini berarti bahwa $T(x_n)$ konvergen kabur ke $T(\theta) = \overline{\theta} \in Y$, yang berarti pula bahwa T kontinu kabur di $\theta \in X$. Menurut Teorema 4.4 diperoleh bahwa T kontinu kabur pada *X*. Jadi, T kontinu kabur.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa T kontinu kabur. Menurut Teorema 4.4, terdapat $M \in (0,1]$ dan dapat dipilih $h = 1$ sehingga

$$N_1\left(x, \frac{t}{h}\right) = N_1(hx,t) = N_1(1.x,t) = N_1(x,t) \le M.N_2(T(x),t) \le N_2(T(x),t)$$

untuk setiap $x \in X$ dan $t > 0$. Jadi, T terbatas kabur. ■

6. DAFTAR PUSTAKA

Ahsar, M., *Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik Kabur dan Ruang Metrik-D*, Tesis, Sekolah Pasca Sarjana UGM, 2009.

Bruckner, A. M., Bruckner, J. B, & Thomson, B. S., *Real Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

Darmawijaya, S., *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta, 2007.

Efe, H., Round Fuzzy Metric Spaces, *International Mathematical Forum*, Vol. 2, No. 35, pp. 1717-1721, 2007.

George A. dan Veeramani, P., On Some Result of Analysis for Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, 90 (1997), 365-368, 1997.

Golet, I., On Generalized Fuzzy Normed Spaces, *International Mathematical Forum*, Vol. 4, No. 25, pp. 1237-1242, 2009.

Goudarzi, M. & Vaezpour, S. M., On The Definition of Fuzzy Hilbert Spaces and its Application, *The Journal of Nonlinear Science and Applications*, Vol. 2, No.1, pp. 46 – 59, 2009.

Gregori, V. & Sapena, A., On Fixed-point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 125 (2002), 245-252, 2002.

Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

Limaye, B. V., *Functional Analysis*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1981.

Razani, A., A Contraction Theorem in Fuzzy Metric Spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 3, pp. 257-265, 2005.

Royden, H. L., *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York, 1989.

Zadeh, L. A., *Fuzzy Sets**, Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.