Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

ANTI SUBGRUP α-*FUZZY*

Fiqriani Noor, Saman Abdurrahman, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714. Kalimantan Selatan
Email: noor.fiqriani@gmail.com

ABSTRACT

The concept of fuzzy subgroups is a combination of the group structure with the fuzzy set, which was first introduced by Rosenfeld (1971). This concept became the basic concept in other the fuzzy algebra fields such as fuzzy normal subgroups, anti fuzzy subgroups and anti fuzzy normal subgroups. The development in the area of fuzzy algebra is characterized by the continual emergence of new concepts, one of which is the α-anti fuzzy subgroup concept. The idea of α-anti fuzzy subgroups is a combination between the α-anti fuzzy subset and anti fuzzy subgroups. The α-anti subset fuzzy which is an anti fuzzy subgroup is called as α-anti fuzzy subgroup. The purpose of this study is to prove that the α-anti fuzzy subset is an anti fuzzy subgroup, examine the relationship between α-anti fuzzy subgroups with anti fuzzy subgroups and α-fuzzy normal subgroups with anti fuzzy subgroups. The results of this study are, if *A* is an anti fuzzy subgroup (an anti fuzzy normal subgroup), then an α-anti subset fuzzy of *A* is an anti fuzzy subgroup (an anti fuzzy normal subgroup). However, this does not apply otherwise. Furthermore, this study also provides sufficient and necessary conditions for an α-anti fuzzy subset of any group to be an α-anti fuzzy subgroup and the formation of a group of factors that are built from an α-anti fuzzy normal subgroup.

Keywords : Anti Fuzzy Subgroup, Anti Fuzzy Normal Subgroup, α-Anti Fuzzy Subgroup and α-Anti Fuzzy Normal Subgroup.

ABSTRAK

Konsep subgrup *fuzzy* merupakan perpaduan antara struktur grup dengan himpunan *fuzzy* yang pertama kali diperkenalkan oleh Rosenfeld (1971). Konsep ini kemudian menjadi konsep dasar dari bidang aljabar *fuzzy* lainnya seperti subgrup normal *fuzzy*, anti subgrup *fuzzy* dan anti subgrup normal *fuzzy*. Perkembangan pada bidang aljabar *fuzzy* ditandai dengan terusnya muncul konsep baru salah satunya konsep anti subgrup α-*fuzzy*. Konsep anti subgrup α-*fuzzy* merupakan perpaduan antara anti subset α-*fuzzy* dengan anti subgrup *fuzzy*. Suatu anti subset α-*fuzzy* yang merupakan anti subgrup *fuzzy* disebut anti subgrup α-*fuzzy*. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa anti *subset* α-*fuzzy* dapat merupakan anti subgrup *fuzzy*, mengkaji hubungan antara anti subgrup α-*fuzzy* dengan anti subgrup *fuzzy* dan anti subgrup normal α-*fuzzy* dengan anti subgrup normal *fuzzy*. Hasil dari penelitian ini adalah, jika *A* merupakan anti subgrup *fuzzy* (anti subgrup normal fuzzy) maka anti subset α-fuzzy dari *A* merupakan anti subgrup *fuzzy* (anti subgrup normal *fuzzy*). Namun, hal tersebut tidak berlaku sebaliknya. Selanjutnya, penelitian ini juga memberikan syarat cukup suatu anti subset α-fuzzy dari *A* merupakan anti subgrup *fuzzy* (anti subgrup normal *fuzzy*) dan pembentukan grup faktor yang dibangun dari anti subgrup normal α-*fuzzy*.

Kata Kunci : Anti Subgrup *Fuzzy*, Anti Subgrup Normal *Fuzzy*, Anti Subgrup α-*Fuzzy* dan Anti Subgrup Normal α-*Fuzzy*.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

1. PENDAHULUAN

Konsep himpunan *fuzzy* merupakan perluasan dari konsep himpunan klasik yang pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A Zadeh pada [9]. Zadeh memperkenalkan himpunan *fuzzy* yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari himpunan tak kosong X ke interval tertutup [0,1].

Setelah diperkenalkan, konsep himpunan *fuzzy* mengalami perkembangan. Para peneliti terus mendorong perkembangan konsep himpunan *fuzzy* baik secara teoritis maupun aplikasi. Salah satunya adalah Rosenfield pada [7] yang menggabungkan konsep himpunan *fuzzy* dengan struktur grup yang kemudian memunculkan konsep grup *fuzzy* yang menjadi model awal dari bidang aljabar *fuzzy* dan kemudian konsep tersebut menjadi dasar dari penelitian model aljabar *fuzzy* lainnya seperti subgrup *fuzzy*, subgrup normal *fuzzy* dan anti subgrup *fuzzy*.

Konsep aljabar *fuzzy* mengalami perkembangan, pendefinisian - pendefinisian baru terus bermunculan, diantaranya adalah konsep anti *subset* α-*fuzzy* yang diperkenalkan oleh Sharma pada [8]. Diberikan A *subset fuzzy* dari grup G dan $\alpha \in [0,1]$. Dapat didefinisikan suatu pemetaan A_α dari G ke selang [0,1] dengan $A_\alpha(x) = \max\{A(x), 1-\alpha\}$ maka A_α juga merupakan *subset fuzzy* dan A_α disebut anti *subset* α-*fuzzy*. Pembahasan dalam penelitian ini akan membuktikan bahwa A_α dapat berlaku anti subgrup *fuzzy* ataupun anti subgrup normal *fuzzy* dan membahas tentang keterkaitan antara teori anti subgrup α-*fuzzy* (normal) dengan anti subgrup *fuzzy* (normal) klasik.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Anti Subgrup *Fuzzy*

Sebelum masuk pada anti subgrup *fuzzy*, terlebih dahulu disajikan definisi dari himpunan *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 [9] Suatu himpunan *fuzzy* A dari himpunan tak kosong X adalah sebuah pemetaan $A: X \to [0,1]$.

Bentuk himpunan *fuzzy* A dari X adalah $A = \{(x, A(x)) | x \in X\}$.

Definisi 2.1.2 [8] Diberikan himpunan *fuzzy* A dan B dari himpunan tak kosong X. Maka A dan B mengikuti pernyataan sebagai berikut

(i) *$A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A(x) \leq B(x)$, untuk setiap $x \in X$.*
(ii) *$A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.*
(iii) *Komplemen dari himpunan fuzzy A adalah A^c dan didefinisikan sebagai $A^c(x) = 1 - A(x)$, untuk setiap $x \in X$.*
(iv) *$(A \cap B)(x) = min\{A(x), B(x)\}$, untuk setiap $x \in X$.*
(v) *$(A \cup B)(x) = max\{A(x), B(x)\}$, untuk setiap $x \in X$.*

Selanjutnya diberikan definisi dan teorema anti subgrup *fuzzy* sebagai berikut

Definisi 2.1.3 [2] Diberikan grup G. *Subset fuzzy* A dari G disebut dengan anti subgrup *fuzzy* dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi kondisi sebagai berikut

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

(i) $A(xy) \leq max\{A(x), B(y)\}$.
(ii) $A(x^{-1}) \leq A(x)$.

Teorema 2.1.4 [2] Jika A adalah anti subgrup *fuzzy* dari grup G, maka untuk setiap $x \in G$ berlaku

(i) $A(e) \leq A(x)$, dengan e identitas di G.

(ii) $A(x^{-1}) = A(x)$.

Teorema 2.1.5 [2] Misal A merupakan *subset fuzzy* dari grup G. A disebut anti subgrup *fuzzy* jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $A(xy^{-1}) \leq max\{A(x), A(y)\}$.

Selanjutnya diberikan definisi koset dari anti subgrup *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 [4] Diberikan $A: G \to [0,1]$ *subset fuzzy* dari grup G. Untuk setiap $g \in G$, *subset* $gA: G \to [0,1]$ didefinisikan dengan $(gA)(x) = A(g^{-1}x)$, untuk setiap $g, x \in G$, disebut koset kiri dari *A*. Dan *subset* $Ag: G \to [0,1]$ didefinisikan dengan $(Ag)(x) = A(xg^{-1})$, untuk setiap $g, x \in G$, disebut koset kanan dari *A*.

Selanjutnya disajikan definisi anti subgrup normal *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 [7] Diberikan anti subgrup *fuzzy* A dari grup G. A disebut anti subgrup normal dari grup G jika $A(xy) = A(yx)$, untuk setiap $x, y \in G$.

Teorema 2.1.8 [7] Diberikan A anti subgrup *fuzzy* dari grup G, maka pernyataan berikut ekuivalen untuk setiap $x, y \in G$.

(i) $A(xy) = A(yx)$.

(ii) $A(yxy^{-1}) = A(x)$.

(iii) $yA = Ay$.

2.2 Anti *Subset* α-*Fuzzy*

Anti *subset* α-*fuzzy* merupakan *subset fuzzy* baru yang dibangun dari *subset fuzzy* biasa yang diperkenalkan oleh Sharma. Berikut ini disajikan definisi dan teorema anti *subset* α-*fuzzy* yang disebutkan oleh Sharma pada [8].

Definisi 2.2.1 [8] Diberikan A suatu *subset fuzzy* dari grup G dan $\alpha \in [0,1]$. *Subset fuzzy* A disebut anti *subset* α- *fuzzy* yang dinotasikan dengan A_α didefinisikan sebagai $A_\alpha(x) = max\{A(x), 1 - \alpha\}$ untuk setiap $x \in G$.

Teorema 2.2.2 [8] Diberikan A dan B adalah *subset fuzzy* dari himpunan tak kosong X dan $\alpha \in [0,1]$. Untuk setiap $x \in X$ berlaku $(A_\alpha \cup B_\alpha)(x) = (A \cup B)_\alpha(x)$.

3. PROSEDUR PENELITIAN

Adapun prosedur-prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

1) Membuktikan teorema bahwa jika suatu *subset fuzzy* merupakan anti subgrup *fuzzy* maka *subset fuzzy* tersebut juga merupakan anti subgrup α-*fuzzy*.
2) Membuktikan teorema eksistensi *subset* α-*fuzzy* selalu merupakan anti subgrup α-*fuzzy* dengan kondisi tertentu.
3) Membuktikan sifat anti *subset* α-*fuzzy* tentang nilai fungsi elemen identitas dan nilai fungsi elemen invers digrup.
4) Membuktikan teorema bahwa jika suatu anti subgrup *fuzzy* merupakan anti subgrup normal maka anti subgrup *fuzzy* tersebut juga merupakan anti subgrup normal α-*fuzzy*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Anti Subgrup α-*Fuzzy*

Proposisi 4.1.1 Jika A merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G maka A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G.

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in G$.

$$\begin{aligned} A_\alpha(xy) &= \max\{A(xy), 1-\alpha\} \\ &\leq \max\{\max\{A(x), A(y)\}, 1-\alpha\} \\ &= \max\{\max\{A(x), 1-\alpha\}, \max\{A(y) 1-\alpha\}\} \\ &= \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\} \end{aligned}$$

sehingga $A_\alpha(xy) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$.

Selanjutnya, untuk sebarang $x^{-1} \in G$ berlaku

$$\begin{aligned} A_\alpha(x^{-1}) &= \max\{A(x^{-1}), 1-\alpha\} \\ &= \max\{A(x), 1-\alpha\} \\ &= A_\alpha(x). \end{aligned}$$

Berdasarkan analisa diatas, terbukti A_α merupakan anti subgrup *fuzzy*. ∎

Selanjutnya suatu anti subset α-*fuzzy* yang merupakan anti subgrup fuzzy disebut anti subgrup α-*fuzzy*.

Kebalikan dari Proposisi 4.1.1 belum tentu berlaku. Sebagai ilustrasi dimisalkan $G = \{e, a, b, z\}$ merupakan grup dengan $a^2 = b^2 = e$ dan $ab = ba = z$. Didefinisikan *subset fuzzy* A dari G sebagai berikut

$$A = \{(e\,,\ 0{,}5), (a\,, 0{,}4), (b\,, 0{,}3), (z\,,\ 0{,}2)\}.$$

Jelas A bukan anti subgrup *fuzzy* karena $A(e) \geq A(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Selanjutnya, dipilih $\alpha = 0{,}5$. Sehingga untuk setiap $x \in G$ berlaku

$$A_\alpha(x) = \max\{A(x), 1-\alpha\} = 1-\alpha.$$

Akibatnya, untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$ dengan demikian memenuhi $A_\alpha(xy) = \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$ dan $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$ sehingga terbukti A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari G walaupun A bukan anti subgrup *fuzzy*.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

Selanjutnya dipaparkan proposisi syarat cukup A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* walaukun A bukan anti subgrup *fuzzy*.

Proposisi 4.1.2 Diberikan, *subset fuzzy* A dari grup G. Jika $\alpha \leq 1-q$ dengan $q = Sup\{A(x)|x \in G$, maka A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G.

Bukti : Jika $\alpha \leq 1-q$ maka $q \leq 1-\alpha$ sehingga $Sup\,\{\,A(x)x \in G\} \leq 1-\alpha$. Dengan demikian untuk setiap $x \in G$ berlaku $A(x) \leq 1-\alpha$, sehingga berlaku berlaku $A_\alpha(x) = \max\{A(x), 1-\alpha\} = 1-\alpha$ untuk setiap $x \in G$. Karena $A_\alpha(x) = 1-\alpha$ untuk setiap $x \in G$, diperoleh $A_\alpha(xy) = max\{A_\alpha(x),\, A_\alpha(y)\}$, dan $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$. Terbukti A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G. ■

Berikut ini diberikan sifat anti subgrup *fuzzy* terkait dengan elemen identitas dan invers pada anti *subset α-fuzzy*.

Proposisi 4.1.3 Jika A_α adalah anti subgrup *fuzzy* dari grup G, maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

(i) $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(x)$. dengan e identitas di G.
(ii) $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$.
(iii) Jika $A_\alpha(xy^{-1}) = A_\alpha(e)$ maka $A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$.

Bukti : (i) Diambil sebarang $x \in G$, karena G grup dan A_α anti subgrup *fuzzy*, diperoleh

$$\begin{aligned} A_\alpha(e) &= A_\alpha(xx^{-1}) \\ &\leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(x^{-1})\} \\ &= A_\alpha(x). \end{aligned}$$

Jadi, $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(x)$ untuk setiap $x \in G$.

(ii) Diambil sebarang $x \in G$, karena G grup, berlaku $A_\alpha(x) = A_\alpha((x^{-1})^{-1})$. Karena A_α anti subgrup *fuzzy*, sehingga diketahui $A_\alpha((x^{-1})^{-1}) \leq A_\alpha(x^{-1})$ namun disisi lain $A_\alpha(x^{-1}) \leq A_\alpha(x)$. Akibatnya, $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$ untuk setiap $x \in G$.

(iii) Diambil sebarang $x, y \in G$, karena G grup dan A_α anti subgrup *fuzzy*, diperoleh

$$\begin{aligned} A_\alpha(x) &= A_\alpha\big(x(y^{-1}y)\big) = A_\alpha\big((xy^{-1})y\big) \leq \max\{A_\alpha(xy^{-1}), A_\alpha(y)\} \\ &= \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(y)\} = A_\alpha(y). \\ A_\alpha(y) &= A_\alpha\big(y(x^{-1}x)\big) = A_\alpha\big((yx^{-1})x\big) \leq \max\{A_\alpha(yx^{-1}), A_\alpha(x)\} \\ &= \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(x)\} = A_\alpha(x). \end{aligned}$$

Jadi, $A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$. ■

Proposisi 4.1.4 Diberikan A suatu *subset fuzzy* dari grup G dan $\alpha \in [0,1]$. A_α adalah anti subgrup *fuzzy* jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $A_\alpha(xy^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$.

Bukti : $(\Rightarrow)$ $A_\alpha(xy^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y^{-1})\} = \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$

$(\Leftarrow)$ Diambil sebarang $x \in G$, karena G grup sehingga berlaku

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

$$A_\alpha(e) = A_\alpha(xx^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(x)\} = A_\alpha(x).$$

Jadi diketahui $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(x)$.

Selanjutnya, diambil sebarang $x^{-1} \in G$, sehingga

$A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(ex^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(x)\} = A_\alpha(x)$. Jadi $A_\alpha(x^{-1}) \leq A_\alpha(x)$.

Diambil sebarang $x, y \in G$, karena G grup sehingga berlaku

$A_\alpha(xy) = A_\alpha(x(y^{-1})^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y^{-1})\} = \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$.

Berdasarkan analisa diatas, terbukti A_α anti subgrup *fuzzy*. ■

Selanjutnya dipaparkan sifat gabungan dari dua anti subgrup α-*fuzzy* dari grup G sebagai berikut.

Proposisi 4.1.5 Jika A_α dan B_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G, maka $(A \cup B)_\alpha$ adalah anti subgrup *fuzzy* dari grup G.

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in G$, diperoleh

$$\begin{aligned}
(A \cup B)_\alpha(xy^{-1}) &= (A_\alpha \cup B_\alpha)(xy^{-1}) \\
&= \max\{A_\alpha(xy^{-1}), B_\alpha(xy^{-1})\} \\
&\leq \max\{\max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y^{-1})\}, \max\{B_\alpha(x), B_\alpha(y^{-1})\}\} \\
&= \max\{\max\{A_\alpha(x), B_\alpha(x)\}, \max\{A_\alpha(y), B_\alpha(y)\}\} \\
&= \max\{(A_\alpha \cup B_\alpha)(x), (A_\alpha \cup B_\alpha)(y).
\end{aligned}$$

Berdasarkan Proposisi 4.1.4, terbukti $(A \cup B)_\alpha$ anti subgrup *fuzzy* dari grup G. ■

Irisan dari dua anti subgrup α-*fuzzy* dari grup G belum tentu anti subgrup α-*fuzzy* dari grup G. Diberikan contoh sebagai berikut.

Misal $G = Z$, merupakan grup bilangan bulat dibawah operasi penjumlahan. Dinotasikan dua buah anti subgrup *fuzzy* sebagai berikut.

$$A(x) = \begin{cases} 0{,}6\,, & Jika\ x = 2Z \\ 0{,}83\,, & yang\ lain \end{cases} \quad \text{Dan} \quad B(x) = \begin{cases} 0{,}7\,, & Jika\ x = 3Z \\ 0{,}8\,, & yang\ lain \end{cases}$$

Selanjutnya, $(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$ diperoleh

$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} 0{,}6, & Jika\ x \in 2Z \\ 0{,}7, & Jika\ x \in 3Z - 2Z \\ 0{,}8, & yang\ lain \end{cases}$$

Diambil $x = 2$ dan $y = 3$ maka $(A \cap B)(x) = 0{,}6$, $(A \cap B)(y) = 0{,}7$, kemudian $(A \cap B)(x + y) = (A \cap B)(2 + 3) = (A \cap B)(5) = 0{,}8$.

Sedangkan $\max\{(A \cap B)(x), (A \cap B)(y)\} = \max\{0{,}6\,, 0{,}7\} = 0{,}7$.

Sehingga $(A \cap B)(x + y) > \max\{(A \cap B)(x), (A \cap B)(y)\}$. Jadi $(A \cap B)$ bukan anti subgrup *fuzzy*, sehingga jelas $(A \cap B)_\alpha$ belum tentu anti subgrup *fuzzy*.

4.2 Anti Subgrup Normal α-*Fuzzy*

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

Proposisi 4.2.1 Jika A anti subgrup normal *fuzzy* dari grup G, maka A_α anti subgrup *fuzzy* dari grup G.

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in G$, diperoleh

$$\begin{aligned} A_\alpha(xy) &= \max\{A(xy), 1-\alpha\} \\ &= \max\{A(yx), 1-\alpha\} = A_\alpha(yx) \end{aligned}$$

Jadi A_α anti subgrup normal *fuzzy* dair grup G. ■

Selanjutnya suatu anti subset α-*fuzzy* yang merupakan anti subgrup normal *fuzzy* disebut anti subgrup normal α-*fuzzy*.

Kebalikan dari Proposisi (4.2.1) belum tentu berlaku. Sebagai ilustrasi dimisalkan $G = \{a, b, ab, ba, a^2, e\}$ adalah grup dengan $a^3 = b^2 = e$ dan $ba = a^2b$. Selanjutnya didefinisikan anti subgrup *fuzzy* A dari G sebagai berikut.

$$A(x) = \begin{cases} 0{,}1\,, & Jika\ x = b, x = e \\ 0{,}2\,, & Jika\ x \neq b, x \neq e \end{cases}$$

Jelas A bukan anti subgrup normal *fuzzy* karena terdapat $a^2, ba \in G$ sedemikian

$$A(a^2(ba) = 0{,}2 \neq 0{,}1 = A((ba)a^2).$$

Selanjutnya, diambil $\alpha = 0{,}6$ sehingga untuk setiap $x, g \in G$ berlaku

$$xA_\alpha(g) = \max\{A(x^{-1}g), 1-\alpha\} = 1-\alpha = \max\{A(gx^{-1}), 1-\alpha\} = A_\alpha x(g)$$

Jadi A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy*.

Selanjutnya akan dipaparkan syarat cukup A_α selalu merupakan anti subgrup *fuzzy* yaitu jika memenuhi proposisi sebagai berikut.

Proposisi 4.2.2 Diberikan A merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G. Jika $\alpha \leq 1-q$ dengan $q = \sup\{A(x) | x \in G\}$, maka A_α merupakan anti subgrup normal *fuzzy* dari grup G.

Bukti : Jika $\alpha \leq 1-q$, maka $q \leq 1-\alpha$, sehingga diperoleh $Sup\,\{A(x)|x \in G\} \leq 1-\alpha$ atau dengan kata lain untuk setiap $x \in G$ berlaku $A(x) \leq 1-\alpha$, dengan demikian diperoleh

$$A_\alpha(x) = \max\{A(x), 1-\alpha\} = 1-\alpha.$$

Akibatnya, untuk sebarang $x, y \in G$, berlaku $A_\alpha(xy) = \max\{A(xy), 1-\alpha\} = 1-\alpha$, dan $A_\alpha(yx) = \max\{A(yx), 1-\alpha\} = 1-\alpha$. Jadi $A_\alpha(xy) = A_\alpha(yx)$.

Jadi, terbukti A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy*. ■

Proposisi 4.2.3 Misalkan A adalah anti subgrup normal *fuzzy*. Pernyataan berikut ekuivalen untuk setiap $x, y \in G$.

(i) $A_\alpha(xy) = A_\alpha(yx)$.
(ii) $A_\alpha(yxy^{-1}) = A_\alpha(x)$.

Bukti : (i) ⇒ (ii) Diambil sebarang $x, y \in G$, sehingga

$$A_\alpha(yxy^{-1}) = A_\alpha((yx)y^{-1}) = A_\alpha((y^{-1}y)x) = A_\alpha(x)$$

Jadi $A_\alpha(yxy^{-1}) = A_\alpha(x)$.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

(ii) ⇒ (i) Diambil sebarang $x, y \in G$, berdasarkan (ii) diperoleh

$$\begin{aligned} A_\alpha(xy) &= A_\alpha(y(xy)y^{-1}) \\ &= \max\{A(y(xy)y^{-1}), 1-\alpha\} \\ &= \max\{A((yx)yy^{-1}), 1-\alpha\} \\ &= \max\{A(yx), 1-\alpha\} = A_\alpha(yx) \end{aligned}$$

Jadi $A_\alpha(xy) = A_\alpha(yx)$. ■

Proposisi 4.2.4 Jika A_α merupakan anti subgrup *fuzzy* dari grup G, maka *subset* $G_{A_\alpha} = \{x \in G | A_\alpha(x) = A_\alpha(e)\}$ merupakan subgrup normal dari G.

Bukti :

Berdasarkan definisi G_{A_α} jelas $G_{A_\alpha} \subseteq G$ dan G_{A_α} bukan himpunan kosong

karena terdapat $e \in G_{A_\alpha}$.

Diambil sebarang $x, y \in G$, diperoleh

$A_\alpha(xy^{-1}) \leq \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y) = \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(e) = A_\alpha(e)$,

Sehingga $A_\alpha(xy^{-1}) \leq A_\alpha(e)$, namun disisi lain diketahui $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(xy^{-1})$. Akibatnya $A_\alpha(xy^{-1}) = A_\alpha(e)$, berdasarkan definisi G_{A_α} diperoleh $xy^{-1} \in G_{A_\alpha}$.

Selanjutnya, diambil sebarang $x \in G_{A_\alpha}$dan $y \in G$, diperoleh $A_\alpha(y^{-1}xy) = A_\alpha(x) = A_\alpha(e)$. Jadi G_{A_α} subgrup normal dari G. ■

Proposisi 4.2.5 Jika A_α merupakan anti subgrup normal *fuzzy* dari grup G, maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

(i) $yA_\alpha = xA_\alpha \Leftrightarrow y^{-1}x \in G_{A_\alpha}$.

(ii) $A_\alpha y = A_\alpha x \Leftrightarrow yx^{-1} \in G_{A_\alpha}$.

Bukti : (i) (⇒) Diketahui $yA_\alpha = xA_\alpha$ untuk sebarang $x, y \in G$, sehingga untuk suatu $x \in G$ berlaku

$yA_\alpha(x) = xA_\alpha(x) \Leftrightarrow A_\alpha(y^{-1}x) = A_\alpha(x^{-1}x) = A_\alpha(e)$.

Karena $A_\alpha(y^{-1}x) = A_\alpha(e)$ berdasarkan definisi G_{A_α} diperoleh $y^{-1}x \in G_{A_\alpha}$.

(⇐) Diketahui $y^{-1}x \in G_{A_\alpha}$, sehingga $A_\alpha(y^{-1}x) = A_\alpha(e)$.

Diambil sebarang $y, g \in G$, sehingga koset kiri dari $yA_\alpha: G \to [0,1]$ adalah

$$\begin{aligned} yA_\alpha(g) &= A_\alpha(y^{-1}g) \\ &= A_\alpha(y^{-1}(xx^{-1})g) \\ &= A_\alpha\big((y^{-1}x)(x^{-1}g)\big) \\ &\leq \max\{A_\alpha(y^{-1}x), A_\alpha(x^{-1}g)\} \\ &= \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(x^{-1}g)\} \\ &= A_\alpha(x^{-1}g) = xA_\alpha(g), \end{aligned}$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

diperoleh, $yA_\alpha(g) \leq xA_\alpha(g)$.

Selanjutnya dengan menukar peran y dan x pada pembuktian diatas, dapat diperoleh $xA_\alpha(g) \leq yA_\alpha(g)$. Akibatnya, diperoleh $yA_\alpha(g) = xA_\alpha(g)$.

(ii) Pembuktian mengikuti cara yang sama pada bagian (i). ■

Proposisi 4.2.6 Diberikan anti subgrup normal *fuzzy* A_α dari grup G dan $u, v, x, y \in G$, maka :

(i) Jika $xA_\alpha = uA_\alpha$ dan $yA_\alpha = vA_\alpha$ maka $xyA_\alpha = uvA_\alpha$.
(ii) Jika $A_\alpha x = A_\alpha u$ dan $A_\alpha y = A_\alpha v$ maka $A_\alpha uv = A_\alpha uv$.

Bukti : (i) Misal $xA_\alpha = uA_\alpha$ dan $yA_\alpha = vA_\alpha$, maka $x^{-1}u, y^{-1}v \in G_{A_\alpha}$.

Selanjutnya diambil $u, v, x, y \in G$ sedemikian

$$\begin{aligned} A_\alpha\big((xy)^{-1}(uv)\big) &= A_\alpha(y^{-1}x^{-1}uv) \\ &= A_\alpha\big((x^{-1}u)(y^{-1}v)\big) \\ &\leq \max\{A_\alpha(x^{-1}u), A_\alpha(y^{-1}v)\} \\ &= \max\{A_\alpha(e), A_\alpha(e)\} = A_\alpha(e), \end{aligned}$$

diperoleh $A_\alpha\big((xy)^{-1}(uv)\big) \leq A_\alpha(e)$, namun disisi lain diketahui $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(a)$ untuk setiap $a \in G$ sehingga diperoleh $A_\alpha\big((xy)^{-1}(uv)\big) = A_\alpha(e)$.

Berdasarkan Proposisi (4.2.5) terbukti $xyA_\alpha = uvA_\alpha$.

(ii) Pembuktian mengikuti cara yang sama pada (i). ■

Selanjutnya akan disajikan proposisi yang berkaitan dengan grup faktor dari anti subgrup normal α-*fuzzy* sebagai berikut.

Proposisi 4.2.7 Diberikan G/A_α kumpulan semua anti *fuzzy* koset dari anti subgrup normal *fuzzy* A_α dengan definisi $G/A_\alpha = \{A_\alpha x \mid x \in G\}$. Operasi "$\otimes$" merupakan operasi biner pada G/A_α dengan definisi

$$A_\alpha x \otimes A_\alpha y = A_\alpha xy \qquad ,\forall\, A_\alpha x, A_\alpha y \in G/A_\alpha.$$

Bukti : Misal $A_\alpha x = A_\alpha x'$ dan $A_\alpha y = A_\alpha y'$ untuk sebarang $x, y, x', y' \in G$, maka berdasarkan Proposisi (4.2.6) bagian (ii) diperoleh $A_\alpha xy = A_\alpha x'y'$

Diambil sebarang $z \in G$, berdasarkan definisi "$\otimes$" sehingga

$$(A_\alpha x \otimes A_\alpha y)(z) = A_\alpha xy(z) = A_\alpha x'y'$$

Jadi terbukti bahwa "$\otimes$" well defined pada G/A_α. ■

Proposisi 4.2.8 Diberikan A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy* dari grup G, maka *subset* G/A_α adalah grup dengan operasi biner "$\otimes$".

Bukti : Mudah untuk menunjukkan bahwa identitas dari G/A_α adalah $A_\alpha e$ dengan e elemen identitas di G, dan invers untuk setiap elemen $A_\alpha x$ adalah $A_\alpha x^{-1}$.

Definisi 4.2.9 Diberikan A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy* dari grup *G*, maka G/A_α disebut grup faktor atau grup kosien dari *G* yang dibangun oleh anti subgrup normal *fuzzy* A_α.

Proposisi 4.2.10 Diberikan A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy* dari grup *G*. Didefinisikan pemetaan $f: G \to G/A_\alpha$ dengan aturan $f(x) = A_\alpha x$ untuk setiap $x \in G$, maka f adalah epimorfisma dari G ke G/A_α dan $ker\, f = G_{A_\alpha}$. (Homomorfisma f disebut homomorfisma natural dari *G* ke G/A_α)

Bukti : Diambil sebarang $x, y \in G$, diperoleh $f(xy) = A_\alpha xy = A_\alpha x A_\alpha y = f(x)f(y)$. Sehingga , f homomorfisma.

Selanjutnya, berdasarkan definisi himpunan $G/A_\alpha = \{A_\alpha x | x \in G\}$ diketahui berlaku untuk setiap $x' \in G/A_\alpha$ terdapat $x \in G$ sedemikian $f(x) = A_\alpha(x) = x'$. Jadi f bersifat surjektif. ■

Menggunakan Proposisi 4.2.9, akan mudah menunjukkan grup G/A_α isomorfik terhadap grup G/G_{A_α}. Berikut disajikan Akibat dari Proposisi (4.2.10) sebagai berikut.

Akibat 4.2.11 Diberikan A_α adalah anti subgrup normal *fuzzy* dari grup *G*, maka grup G/A_α isomorfik terhadap grup kosien G/G_{A_α}. Dinotasikan $G/G_{A_\alpha} \cong G/A_\alpha$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Jika suatu *subset fuzzy A* dari grup *G* merupakan anti subgrup *fuzzy* (anti subgrup normal *fuzzy*) maka anti *subset* α-*fuzzy A* juga merupakan anti subgrup *fuzzy* (anti subgrup normal *fuzzy*) dari grup *G*. Selanjutnya, syarat cukup untuk anti *subset* α-*fuzzy* dari *A* merupakan anti subgrup normal *fuzzy* adalah jika $\alpha \le 1 - q$ dan $q = Sup\{A(x) | x \in G\}$.
2. Anti *subset* α-*fuzzy* dari *A* merupakan anti subgrup *fuzzy* jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $A_\alpha(xy^{-1}) \le \max\{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$.
3. Terdapat grup faktor yang dibangun dari sebuah anti subgrup normal A_α yaitu kumpulan semua koset *α-fuzzy* dari A_α didefinisiakan $G/A_\alpha = \{A_\alpha x | x \in G\}$ dibawah operasi biner " ⊗ " dengan definisi,
$$A_\alpha x \otimes A_\alpha y = A_\alpha xy \qquad ,\forall\, A_\alpha x, A_\alpha y \in G/A_\alpha.$$
4. Grup faktor G/G_{A_α} isomorfik G/A_α dengan $G_{A_\alpha} = \{x \in G | A_\alpha(x) = A_\alpha(e)\}$.

6. REFERENSI

[1] Abdurrahman, S. 2019. *Seri Buku Ajar Bidang Aljabar Pengantar Teori Grup. Zifatama Jawara*, Sidoarjo.

[2] Biswas, R. 1990. *Fuzzy Subgroup and Anti Fuzzy Subgroup*. Departement of Mathematics. 35:121-124.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 10-20

[3] Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Edisi ke-7. Addison Wasley Publishing Company, New York.

[4] Jian, T & Yunfei, Y. 2012. *Correspondence Theorem for Anti L-fuzzy Normal Subgroup*. International Journal of Computational and Mathematical Sciences. 6:192-194.

[5] Judson, Thomas W. 2009. *Abstact Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University, Texas.

[6] Malik, DS, John N.M, M.K. Sen. 2007. *Introduction to Abstract Algebra*. Scientific Word, United States.

[7] Rosenfeld, Azriel. 1971. *Fuzzy Groups*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 35:512-517.

[8] Sharma, P.K. 2012. *α- Anti Fuzzy Subgroups*. International Review of *Fuzzy* Mathematics, 7:47-58.

[9] Zadeh, L. 1965. *Fuzzy Sets*. Information and control. 8:338-353.