Jurnal Matematika Murni dan Terapan "$\varepsilon psilon$"
Vol. 07, No.01, (2013), Hal. 13 – 20

KAJIAN KONSEP RUANG NORMA-2 DENGAN DOMAIN PEMETAAN BERUPA RUANG BERDIMENSI HINGGA

Wahidah[1] dan Moch. Idris[2]

[1,2]*Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
Jl. A. Yani Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
E-mail: Reemyfasol@gmail.com

Abstrak. Gagasan ruang norma-2 pada awalnya dikenalkan oleh Ghler pada tahun 1960an. Pada tahun 2001, Gunawan dan Mashadi mengkaji mengenai ruang norma-2 dan mendefinisikan suatu norma baru. Norma-2 standar merupakan luas bidang pada ruang-2 yang dibangun oleh dua buah vektor. Luas bidang tersebut bernilai nol ketika vektor-vektor yang membangunnya saling bergantung linear. Dalam penelitian ini dikaji ekuivalensi antara ruang norma dengan ruang norma-2.

Kata Kunci : ruang norma, ruang norma-2, ekuivalensi.

Abstract. The concept of 2-normed space was initially introduced by Gähler in 1960's. In 2001, Gunawan and Mashadi studied about 2-normed space and define a new norm. A standard 2-normed space is an area on 2-space which is generated by two vectors. That area will be zero when the vectors are linearly dependent. In this research, we have studied equivalency between normed space and 2-normed space.

Keywords : normed space, 2-normed space, equivalency.

1. Pendahuluan

Konsep ruang norma merupakan bagian dari pembahasan analisis fungsional. Ruang norma pada pembahasan analisis fungsional merupakan pasangan ruang vektor dengan suatu norma yang terdefinisi dalam ruang vektor tersebut dan dinyatakan dengan $(X, \|\cdot\|)$. Salah satu contoh norma yang akan digunakan dalam penelitian ini yaitu $\|\mathbf{x}\|_* = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ dan $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Sedangkan ruang norma-2 (dinyatakan dengan $(X, \|\cdot \quad ,\cdot\|))$ merupakan pasangan ruang vektor dengan norma-2 yang terdefinisi dalam ruang vektor tersebut.

Konsep ruang norma-2 pada awalnya diperkenalkan oleh S. Ghler pada tahun 1960an. Setelah itu, banyak peneliti yang mempelajari tentang ruang norma-2 dengan berbagai hasil yang diperoleh. Berikut ini akan diberikan definisi ruang norma-2 yang didefinisikan oleh Gunawan dan Mashadi.

Misalkan X suatu ruang vektor dimensi d, dengan $2 \leq d < \infty$. Suatu norma-2 pada X merupakan pemetaan $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi empat sifat berikut ini:

N1. $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\| \geq 0$ untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$, $\|\mathbf{x},\mathbf{y} \geq 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}\|$ bergantung linear;

N2. $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y},\mathbf{x}\|$ untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$;

N3. $\|\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}\| = |\alpha|\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$;

N4. $\|\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x},\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x},\mathbf{z}\|$ untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norma-2.

Contoh ruang norma-2 standar yaitu $\mathbb{R}^d$ yang dilengkapi dengan norma-2 berikut ini:

$$\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\|_s := \left(\begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\rangle \\ \langle \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_2\rangle \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Berdasarkan norma-2 diatas diketahui bahwa:

$$\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\|_s = \sqrt{(\|\mathbf{x}_1\|_*\|\mathbf{x}_2\|_*) - \langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\rangle^2} \geq 0 \tag{2}$$

dan $\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2+\alpha\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\|$ untuk setiap $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Selain itu, jika $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ dan $\mathbf{x}_3$ bebas linear maka $\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3\| = \|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\| + \|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3\|$ dan $\|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3\| = \|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\| + \|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3\|$ (hal ini terjadi ketika $d = 2$).

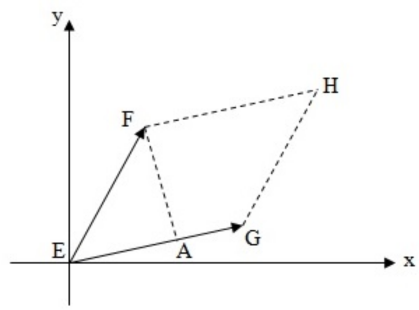
Diberikan suatu ruang norma-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$, barisan $(\mathbf{x}_m)$ dalam X dikatakan konvergen-2 ke $\mathbf{x} \in X$, atau $\mathbf{x}$ dikatakan sebagai limit dari X, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x},\mathbf{y}\| \leq \varepsilon$ untuk setiap $\mathbf{y} \in X$. Norma-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan ruang norma-2 lengkap atau ruang *Banach* jika barisan *Cauchy-2* pada X, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m,n \in \mathbb{N}$ dan $\mathbf{y} \in X$ berlaku $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n,\mathbf{y}\| \leq \varepsilon$ untuk setiap $m,n \geq K(\varepsilon)$, konvergen ke $\mathbf{x}$ pada X.

Berdasarkan pemaparan di atas, penelitian ini akan menunjukkan hubungan norma-2 standar dengan luas jajar genjang, membuktikan sifat barisan konvergen-2 dan barisan *Cauchy*-2 pada ruang norma-2 dan mengkonstruksi hubungan antara norma dengan norma-2.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Norma-2 pada $\mathbb{R}^d$

Pada kasus norma-2 standar, dapat kita lihat hubungannya dengan kasus seperti gambar berikut, yaitu pada luasan jajar genjang.



Gambar 1. Luas Jajar Genjang EFGH

Misalkan $|EF| = \|\mathbf{u}\|$, $|EG| = \|\mathbf{v}\|$ dan $|FA| = \|t\|$, maka berdasarkan gambar 1 dapat diketahui bahwa luas jajar genjang yang dibangun oleh dua vektor $\overrightarrow{EG}$ dan $\overrightarrow{EF}$ yaitu:

$$L_{EFGH} = \sqrt{(\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2) - \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle^2} \tag{3}$$

Berdasarkan persamaan (2) dan persamaan (3) dapat dilihat hubungan antara norma-2 standar dengan luas jajar genjang yang dibangun oleh dua vektor pada $\mathbb{R}^2$. Yaitu bahwa norma-2 standar , $\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|_s$, dapat dinyatakan sebagai luasan daerah yang dibangun oleh dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$.

Selain sebagai luasan daerah jajar genjang norma-2 pada $\mathbb{R}^d$ juga dapat didefinisikan dengan pemetaan yang lain, seperti pada lemma berikut ini

Lemma 2.1. *Diberikan* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ *dengan* $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ *dan* $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d)$ *serta* $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}$ *untuk setiap* $i = 1, \ldots, d$. *Didefinisikan suatu pemetaan yaitu:*

$$\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|_p := \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(abs \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

maka $(\mathbb{R}^d, \|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|_p)$ *merupakan ruang norma-2.*

2.2. Barisan Konvergen-2 dan Barisan *Cauchy*-2 pada Ruang Norma-2

Pada bagian ini akan diberikan lemma yang memuat hubungan antara barisan konvergen-2 dengan barisan Cauchy-2 pada ruang norma-2.

Lemma 2.2. *Dalam ruang norma-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$, setiap barisan konvergen-2 adalah barisan Cauchy-2.*

Bukti. Diberikan barisan $(\mathbf{x}_m)$ pada ruang norma-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ yang konvergen-2 ke $\mathbf{x} \in X$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m, n \in K(\varepsilon)$ berlaku $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}, \mathbf{y}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}, \mathbf{y}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $\mathbf{y} \in X$. Oleh karena itu diperoleh:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\| &= \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\| \\ &\leq \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}, \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, barisan konvergen $(\mathbf{x}_m)$ merupakan barisan *Cauchy*-2. □

Apabila barisan *Cauchy*-2 pada ruang norma-2 merupakan barisan konvergen-2 maka ruang norma-2 tersebut dikatakan lengkap-2. Hal ini termuat dalam definisi berikut ini:

Definisi 2.3. *Ruang norma-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dikatakan lengkap-2 jika setiap barisan Cauchy-2 pada X adalah konvergen-2.*

Salah satu contoh ruang norma lengkap-2 yaitu ruang norma-2 $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$ pada persamaan (4).

2.3. Ekuivalensi Norma-2

Ketika dua norma ekuivalen, maka semua sifat yang ada didalamnya akan sama untuk kedua norma itu. Berikut ini akan diberikan pengertian mengenai dua norma-2 yang ekuivalen.

Definisi 2.4. *Suatu norma-2 $\|\cdot,\cdot\|_a$ pada ruang vektor X dikatakan ekuivalen dengan suatu norma-2 $\|\cdot,\cdot\|_b$ pada X jika terdapat bilangan riil positif k_1 dan k_2 sedemikian sehingga berlaku*

$$k_1\|\cdot,\cdot\|_b \leq \|\cdot,\cdot\|_a \leq k_2\|\cdot,\cdot\|_b$$

Berdasarkan definisi di atas, berikut ini diberikan suatu teorema yang menyatakan ekuivalensi antara dua norma-2 yang terdefinisi dalam ruang berdimensi hingga.

Teorema 2.5. *Dalam ruang norma-2 berdimensi hingga $(\mathbb{R}^d)$, dua norma*

$$\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|_p := \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left(abs\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

dan

$$\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|_q := \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left(abs\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

adalah equivalen.

Bukti. Berdasarkan dua definisi norma-p dan norma-q maka akan dihasilkan:

$$\left(\frac{2}{d^2-d}\right)^{\frac{1}{q}} \|\cdot,\cdot\|_q \le \|\cdot,\cdot\|_p \le \left(\frac{d^2-d}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|\cdot,\cdot\|_q \tag{5}$$

Jadi, $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p$ ekuivalen dengan $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_q$. $\square$

Konsekuensi penting dari teorema di atas dinyatakan dalam akibat berikut ini:

Akibat 2.6. *Untuk ruang norma-2* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *dan ruang norma-2* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_q)$ *berlaku:*

A1. Barisan $(\mathbf{x}_m)$ *adalah barisan konvergen-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *jika dan hanya jika* $(\mathbf{x}_m)$ *barisan konvergen-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_q)$

A2. Barisan $(\mathbf{x}_m)$ *adalah barisan Cauchy-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *jika dan hanya jika* $(\mathbf{x}_m)$ *barisan Cauchy-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_q)$

2.4. Hubungan Norma dengan Norma-2 pada $\mathbb{R}^d$

Diketahui $\|\mathbf{x}\|_p$ adalah suatu norma dan $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p$ merupakan suatu norma-2. Berikut ini diberikan suatu lemma yang menyatakan hubungan antara norma dan norma-2 tersebut.

Lemma 2.7. *Untuk setiap* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$*, berlaku* $\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p < 2^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_p$.

Bukti. Diketahui

$$\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p := \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left(abs\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

berdasarkan definisi tersebut dihasilkan

$$\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p^p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{i=1} d|\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i||\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i|^{p-1}$$

berdasarkan ketaksamaan segitiga berlaku $|\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i| \le |\xi_i\eta_j| + |\xi_j\eta_i|$ sehingga dihasilkan

$$\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p^p \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|\xi_i\eta_j||\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i|^{p-1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}|\xi_j\eta_i||\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i|^{p-1}$$

berdasarkan ketaksamaan *Hölder* dihasilkan

$$\|\mathbf{x},\mathbf{y}\|_p \le 2^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_p \tag{6}$$

$\square$

Berdasarkan ketaksamaan (6) dapat dilihat bahwa sifat-sifat norma pada $\mathbb{R}^d$ juga berlaku pada norma-2. Hal ini dinyatakan dalam akibat berikut ini:

Akibat 2.8. *Untuk ruang norma-2* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$ *dan ruang norma* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ *berlaku:*

V1. Barisan $(\mathbf{x}_m)$ *adalah barisan konvergen pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ *jika dan hanya jika* $(\mathbf{x}_m)$ *barisan konvergen-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$

V2. Barisan $(\mathbf{x}_m)$ *adalah barisan Cauchy pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ *jika dan hanya jika* $(\mathbf{x}_m)$ *barisan Cauchy-2 pada* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p)$

Setelah memahami konsep dan beberapa sifat dari ruang norma dan ruang norma-2, maka dapat dibangun suatu norma yang didefinisikan secara khusus dari norma-2. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 2.9. *Misalkan* $\mathbf{x}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^d$ *dengan* $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d), \mathbf{z}_1 = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_d)$ *dan* $\mathbf{z}_2 = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d)$*, dengan* $\mathbf{z}_1$ *dan* $\mathbf{z}_2$ *vektor-vektor yang bebas linear, maka dapat ditunjukkan bahwa pemetaan berikut ini:*

$$\|\mathbf{x}\|_O := \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

merupakan suatu norma.

Bukti. P1. Berdasarkan definisi ruang norma-2, diketahui $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p \geq 0$ sehingga $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p \geq 0$, begitu pula $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p \geq 0$. Akibatnya dihasilkan $\|\mathbf{x}\|_O \geq 0$.

P2. (a) Diketahui $\mathbf{x} = 0$ maka $\xi_j = 0$ untuk $j = 1, \ldots, d$. Oleh karena itu dihasilkan $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p = 0$ dan $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p = 0$, sehingga $\left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Dengan kata lain $\|\mathbf{x}\|_O = 0$.

(b) Diketahui $\left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ sehingga $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p = 0$ dan $\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p = 0$. Berdasarkan definisi ruang norma-2, $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{z}_1$ bergantung linear, begitu pula $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{z}_2$ bergantung linear sehingga $\mathbf{x} = k_1\mathbf{z}_1$ dan $\mathbf{x} = k_2\mathbf{z}_2$. Oleh karena itu dihasilkan $k_1\mathbf{z}_1 - k_2\mathbf{z}_2 = 0$. Karena $\mathbf{z}_1$ dan $\mathbf{z}_2$ bebas linear, maka $k_1 = k_2 = 0$ akibatnya $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

P3. Diketahui $\|\mathbf{x}\|_O = \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$, misalkan terdapat $\alpha \in \mathbb{R}$ maka $\|\alpha\mathbf{x}\|_O = \left(\|\alpha\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\alpha\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Berdasarkan definisi ruang norma-2 berlaku:

$$\begin{aligned} \left(\|\alpha\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\alpha\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} &= |\alpha| \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \|\mathbf{x}\|_O. \end{aligned}$$

P4. Diketahui $\|\mathbf{x}\|_O = \left(\sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Dapat dibuktikan bahwa $\|\mathbf{x}\|_O$ memenuhi sifat ke-4 pada ruang norma, yaitu sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}_i\|_p^p\right) \leq \sum_{i=1}^{2} \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_i\|_p \|\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}_i\|_p^{p-1} + \|\mathbf{y}, \mathbf{z}_i\|_p \|\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}_i\|_p^{p-1}\right).$$

berdasarkan ketaksamaan *Hölder* diperoleh:

$$(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}_1\|_p + \|\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}_2\|_p) \leq \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|\mathbf{y}, \mathbf{z}_1\|_p^p + \|\mathbf{y}, \mathbf{z}_2\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

berdasarkan pembuktian [P1.] sampai dengan [P4.] terbukti bahwa $\|\mathbf{x}\|_O$ adalah suatu norma dan $(\mathbb{R}^d, \|\mathbf{x}\|_O)$ merupakan ruang norma. □

Berikut ini dibangun suatu teorema yang akan menunjukkan bahwa sifat-sifat pada ruang norma-2 berlaku pada ruang norma.

Teorema 2.10. *Misalkan* $\mathbf{e}_m = (0, 0, \ldots, 1_m, \ldots, 0, 0)$ *dan* $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1_n, \ldots, 0, 0)$, *dengan* $\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \in X$ *untuk* $m \neq n$, *maka berlaku*

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Bukti. Diketahui $\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\left(abs\begin{vmatrix} \xi_i & \mathbf{e}_{mi} \\ \xi_j & \mathbf{e}_{mj}\end{vmatrix}\right)^p$ dengan $\mathbf{e}_m = (0, 0, \ldots, 1_m, 0, 0)$, sehingga dihasilkan:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^p + \sum_{i=1}^{d} |-\xi_i|^p\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^p \end{aligned}$$

dengan $i = 1, \ldots, d$ dan $i \neq m$. Sejalan dengan $\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p$, untuk $\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p$ dihasilkan $\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |\xi_i|^p$. Dengan demikian dihasilkan:

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Setelah memahami beberapa konsep yang berkaitan dengan norma dan norma-2, berikut ini dibangun ekuivalensi antara norma dan norma-2.

Teorema 2.11. *Diketahui* $\|\mathbf{x}\|_p$ *suatu norma pada* $\mathbb{R}^d$ *dan didefinisikan*

$$\|\mathbf{x}\|_{O*} = \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, *maka norma* $\|\mathbf{x}\|_p$ *ekuivalen dengan norma* $\|\mathbf{x}\|_{O*}$.

Bukti. Diketahui $\|\mathbf{x}\|_p \leq \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Berdasarkan teorema sebelumnya, dapat dihasilkan:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{O*} &= \left(\|\mathbf{x}, \mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{x}, \mathbf{e}_n\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[2^{p-1}\|\mathbf{x}\|_p^p \left(\|\mathbf{e}_m\|_p^p + \|\mathbf{e}_n\|_p^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} = 2\|\mathbf{x}\|_p \end{aligned}$$

berdasarkan yang diketahui $\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_{O*}$ dan dihasilkan $\|\mathbf{x}\|_{O*} \leq 2\|\mathbf{x}\|_p$, sehingga dapat dikatakan bahwa $\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}_{O*}\| \leq 2\|\mathbf{x}\|_p$. Dengan kata lain $\|\mathbf{x}\|_p$ ekuivalen dengan $\|\mathbf{x}\|_{O*}$. □

Berdasarkan teorema-teorema dan lemma-lemma serta akibat yang dikaji, dapat dilihat bahwa sifat-sifat pada norma-2 berlaku pada norma-2 lainnya. Disisi lain juga diketahui bahwa sifat-sifat yang berlaku pada norma akan berlaku pada norma-2 dan berlaku sebaliknya. Oleh karena itu, apabila ruang norma $\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p\right)$ lengkap, maka akan mengakibatkan ruang norma-2 $\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot,\cdot\|_p\right)$ lengkap-2. Dengan kata lain, jika $\left(\mathbb{R}^d\right)$ adalah ruang *Banach* maka $(\mathbb{R})^d$ merupakan ruang *Banach* -2. Begitu juga sebaliknya.

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat diketahui bahwa norma-2 pada kasus standar $(\|\cdot,\cdot\|_s)$ merupakan luas jajar genjang. Selain itu juga diketahui bahwa norma-2 $(\|\cdot,\cdot\|_p)$ ekuivalen dengan $(\|\cdot,\cdot\|_q)$ dan $(\|\cdot\|_p)$ ekuivalen dengan $(\|\cdot,\cdot\|_p)$ pada $(\mathbb{R})^d$. Hal ini menunjukkan bahwa, pada $(\mathbb{R})^d$, sifat-sifat yang berlaku pada norma-2 juga akan berlaku pada norma-2 lainnya, begitupula sifat-sifat yang berlaku pada norma akan berlaku pada norma-2 dan sebaliknya. Dengan kata lain $(\mathbb{R})^d$ adalah ruang *Banach* jika dan hanya jika $(\mathbb{R})^d$ ruang *Banach*-2.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi ke-5. Erlangga. Jakarta.

[2] Bartle, R. G., H., dan D. R. SHelbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Edisi ke-3. John Wiley and Sons. Inc. New York.

[3] Gunawan, H., dan M. Mashadi. 2001. *Soochow Journal of Mathematics*. On finite dimensional 2-normed space. 27: 321-329.

[4] Kreyszig, E. 1978. *Introduction Functional Alaysis with Aplication*. John Wiley and Sons. Inc. New York.