PENGGUNAAN BENTUK SMITH UNTUK MENENTUKAN BENTUK KANONIK MATRIKS NORMAL DENGAN ENTRI-ENTRI BILANGAN KOMPLEKS

Thresye
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru

ABSTRAK

Matriks normal A dengan entri-entri bilangan kompleks adalah suatu matriks bujursangkar n x n dengan sifat $AA^* = A^*A.$ di mana $A^* = \overline{A^t}$ yaitu tranpose sekawan dari matriks A. Matriks normal dengan entri bilangan kompleks terdiri atas matriks uniter, matriks Hermite dan matriks Hermite miring. Matriks normal yang tidak dapat didiagonalisasi dapat dibawa ke bentuk kanonik dengan menggunakan operasi baris dan kolom yang disebut Bentuk Smith. Bentuk kanonik adalah matriks yang bentuknya mendekati matriks diagonal.

Kata Kunci: *Bentuk Kanonik, Matriks Normal, Bentuk Smith*.

1. PENDAHULUAN

Diagonalisasi matriks A ukuran n x n yang entri-entrinya bilangan kompleks memerlukan beberapa prosedur standar seperti pencarian nilai eigen, vektor eigen yang ortonormal, dan matriks P yang dapat dibalik (invertibel) sedemikian sehingga $D = P^*AP$, di mana D adalah matriks diagonal. Matriks diagonal yang dihasilkan pada prosedur itu memiliki nilai eigen matriks A pada diagonal utamanya.

Suatu matriks A ukuran n x n dengan entri-entri bilangan kompleks yang tidak dapat didiagonalisasi dapat dibawa ke bentuk kanonik. Prosedur standarnya adalah mencari nilai eigen, vektor eigen yang ortonormal, matriks P dan matriks $P^* = \overline{P^t}$ sehingga terbentuk $C = P^*AP$ di mana C adalah bentuk kanonik matriks A.

Matriks normal dengan entri bilangan kompleks dengan sifat $AA^* = A^*A.$ terdiri atas 3 jenis yaitu matriks uniter, matriks Hermite, dan matriks Hermite miring. Matriks A yang merupakan matriks dengan unsur kompleks, memiliki tranpose sekawan A yang dinyatakan dengan $A^* = \overline{A^t}$. Matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut uniter jika $A^{-1} = A^*$. Matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut Hermite jika $A = A^*$. Sedang matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut Hermite miring jika $-A = A^*$.

Prosedur standar membawa matriks ke bentuk kanonik sangat rumit jika matriks berukuran n x n dengan $n \geq 3$ karena itu akan digunakan operasi baris kolom pada matriks A yang disebut Bentuk Smith untuk mendapatkan bentuk kanonik matriks A.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan riil, yang dinyatakan oleh (a,b) atau $z = a + bi$ dengan a disebut bilangan riil z dan bilangan riil b disebut bilangan imajiner z.

2.1.1 Modulus, Sekawan (konjugate) Kompleks dan Pembagian.

Jika $z = a + bi$ sebarang bilangan kompleks, maka sekawan z yang dinyatakan oleh $\bar{z}$ didefinisikan oleh $\bar{z} = a - bi$.

2.2 Ruang-ruang Vektor Kompleks C^n

Di antara ruang vektor kompleks yang paling penting adalah C^n yaitu ruang dari n-pasangan bilangan kompleks, dengan penambahan dan perkalian dilaksanakan secara koordinat. Sebuah vektor u di C^n dapat dituliskan dalam notasi mendatar: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ atau notasi dalam matriks $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, dimana

$u_1 = a_1 + b_1 i,\;\; u_2 = a_2 + b_2 i,\; \ldots,\; u_n = a_n + b_n i$.

Definisi 2.2.1

Jika $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor di C^n, maka hasilkali dalam Euclid $u \bullet v$ didefinisikan oleh:

$$u \bullet v = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \ldots + u_n \overline{v_n}\ .$$

2.3 Ruang Hasilkali Dalam Kompleks

Definisi 2.3.1

Suatu hasilkali dalam pada ruang vektor kompleks V adalah fungsi yang menghubungkan bilangan kompleks $\langle u,v \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v di V dalam suatu cara sehingga aksioma-aksioma berikut terpenuhi untuk semua vektor u, v dan w di V dan semua skalar k.

1. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$.
2. $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$.
3. $\langle ku,v \rangle = k\langle u,v \rangle$.
4. $\langle v,v \rangle \geq 0$ *dan* $\langle v,v \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $v = 0$.

Proses Gram-Schmidt dipakai hanya satu langkah saja yaitu untuk menormalkan vektor misalnya menghasilkan basis ortonormal v_1 adalah:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

2.4 Bentuk Kanonik

Sebuah matriks bujur sangkar A ukuran n x n dengan entri bilangan kompleks dapat didiagonalisasi jika terdapat sebanyak n nilai eigen dan vektor eigen yang membangun matriks P sedemikian sehingga $D = P^* AP$ di mana D adalah matriks diagonal. Jika tidak ditemukan cukup vektor eigen untuk membangun matriks P maka matriks A tidak dapat didiagonalisasi. Agar matriks A tersebut dapat mendekati bentuk matriks diagonal, maka matriks A dibentuk memjadi bentuk kanonik.

Matriks kanonik adalah matriks yang bentuknya hampir mendekati bentuk diagonal yaitu: $C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana p = indeks, r = rank matriks A dan signatur $s = p - (r - p)$.

2.5 Matriks Normal, Matriks Hermite dan matriks Hermite miring

Matriks A yang merupakan matriks dengan unsur kompleks, maka transpose sekawan A, dinyatakan oleh $A^* = \overline{A^t}$. Di mana $\overline{A}$ adalah matriks yang unsur-unsurnya adalah sekawan kompleks dari unsur-unsur yang seletak dalam A dan $\overline{A^t}$ adalah tranpose dari $\overline{A}$.

2.5.1 Matriks Normal

Definisi 2.5.1.1

Matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut Normal jika $AA^* = A^* A$.

Teorema 2.5.1.2

Jika Matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks, maka yang berikut ekivalen:

a. *A dapat didiagonalkan secara uniter.*
b. *A mempunyai himpunan ortonormal dari n vektor eigen.*
c. *A normal.*

Teorema 2.5.1.3

Jika Matriks A normal, maka vektor-vektor eigen dari ruang-ruang eigen yang berlainan adalah ortogonal.

2.5.2 Matriks Hermite

Definisi 2.5.2.1

Matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut Hermite jika $A = A^*$.

Definisi 2.5.2.2

Dua matriks Hermite bujur sangkar $n \times n$ *A dan B disebut kongruen secara Hermite jika terdapat suatu matriks tak singular P sedemikian sehingga* $B = \overline{P^t} AP = P^* AP$.

Definisi 2.5.2.3

Matriks Hermite A dengan rank r kongruen terhadap matriks kanonik $C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, dimana p = indeks, r = rank matriks A dan signatur* $s = p - (r - p)$.

2.5.3 Matriks Hermite Miring

Definisi 2.5.3.1

Matriks A ukuran n x n dengan unsur kompleks disebut Hermite miring jika $-A = A^*$.

Definisi 2.5.3.2

Jika A suatu matriks ukuran n x n dengan unsur kompleks maka $A + A^*$ *adalah matriks Hermite dan* $A - A^*$ *adalah matriks Hermite miring.*

Definisi 2.5.3.3

Dua matriks Hermite miring ukuran $n \times n$ *A dan B disebut kongruen secara Hermite jika terdapat suatu matriks tak singular P sedemikian sehingga* $B = -\overline{P^t} AP = -P^* AP$.

Definisi 2.5.3.4

Matriks Hermite miring A dengan rank r kongruen terhadap matriks kanonik $C = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, dimana p = indeks, r = rank matriks A dan signatur* $s = p - (r - p)$.

2.6 Operasi Baris Elementer

Operasi baris dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier atau mencari invers suatu matriks A ukuran n x n. Langkah-langkahnya diturunkan dari operasi baris elementer sebagai berikut:

1. Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkan dua baris tersebut.
3. Tambahkan perkalian dari satu baris pada baris lainnya.

2.7 Bentuk Smith

Suatu matriks A dapat direduksi dengan menggunakan operasi baris yang dikenal dengan bentuk Hermite. Bentuk Hermite menggunakan 3 operasi yaitu : pertukaran (swap), membagi (divide), dan menjumlahkan (add). Jika operasi baris dilanjutkan dengan operasi kolom maka disebut bentuk Smith, yang notasinya sebagai berikut :

RS(i,j), RD(i,u), RA(i,j,p) untuk operasi baris dan
CS(i,j), CD(i,u), CA(i,j,p) untuk operasi kolom

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Langkah-Langkah Mendapatkan Bentuk Kanonik Matriks Normal

1. Diberikan matriks Hermite/Hermite miring A ukuran n x n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Menggunakan $[A \| I]$ untuk mereduksi matriks A.

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

4. Menggunakan operasi baris Hermite untuk mereduksi baris kedua, baris ketiga sampai baris ke- n dengan menggunakan baris 1 di mana $a_{11} = 1$(disebut 1 utama) sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & -a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & -a_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

5. Menggunakan operasi kolom (Bentuk Smith) untuk mereduksi kolom kedua, kolom ketiga sampai kolom ke n sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & -a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & -a_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

6. Mengulangi langkah 3 dan 4 dengan menggunakan Bentuk Smith sehingga diperoleh baris dan kolom ke-n dengan bentuk $[C \| P*]$ di mana C merupakan bentuk kanonik matriks A.

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

3.2 Penerapan Pada Contoh

3.2.1 Mencari Bentuk Kanonik Matriks Hermite

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & (1-3i) & (2-3i) \\ (1+3i) & 1 & (2+3i) \\ (2+3i) & (2-3i) & 4 \end{bmatrix}$ di mana A suatu matriks normal karena $AA^* = A^*A$.
2. menggunakan $[A \| I]$ untuk mereduksi matriks A.

$$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & (1-3i) & (2-3i) & 1 & 0 & 0 \\ (1+3i) & 1 & (2+3i) & 0 & 1 & 0 \\ (2+3i) & (2-3i) & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Menggunakan operasi baris $RA(1,2,-(1+3i))$ dan $RA(1,3,-(2+3i))$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & (1-3i) & (2-3i) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & (-1-3i) & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & (-2-3i) & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. Menggunakan operasi Kolom $CA(1,2,-(1-3i))$ dan $CA(1,3,-(2-3i))$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & (-1-3i) & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & (-2-3i) & 0 & 1 \end{array}\right]$$

5. Baris kedua dipakai untuk mereduksi baris ke-3 menggunakan operasi baris dan kolom $RA(2,3,-1)$ dan $CA(2,3,-1)$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & (-1-3i) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

6. Baris kedua disederhanakan dengan menggunakan operasi baris dan kolom $RD(2,3)$ dan $CD(2,3)$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{(-1-3i)}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

7. Sehingga diperoleh matriks $P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{(-1-3i)}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, matriks kanonik

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ dan matriks } P=\begin{bmatrix}1&\frac{(-1+3i)}{3}0&-1\\0&\frac{1}{3}&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ di}$$

mana $C=\overline{P^t}AP=P^*AP$.

3.2.2 Mencari Bentuk Kanonik Matriks Hermite Miring

1. Diberikan matriks Hermite miring $A=\begin{bmatrix}i&-1-i&-1\\1-i&0&1-i\\1&-1-i&-i\end{bmatrix}$ di mana – $A=A^*$ dan merupakan suatu matriks normal karena $AA^*=A^*A$.
2. menggunakan $[A\|I]$ untuk mereduksi matriks A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}i&-1-i&-1&1&0&0\\1-i&0&1-i&0&1&0\\1&-1-i&-i&0&0&1\end{array}\right]$$

3. Menggunakan operasi baris $RD(1,i)$ dilanjutkan dengan $RA(1,2,(-1+i))$ dan $RA(1,3,-1)$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{-1-i}{i}&-\frac{1}{i}&\frac{1}{i}&0&0\\0&-2i&-2i&1+i&1&0\\0&-2i&-2i&i&0&1\end{array}\right]$$

1. Menggunakan operasi Kolom $CA\left(1,2,-\left(\frac{-1-i}{i}\right)\right)$ dan $CA\left(1,3,-\left(-\frac{1}{i}\right)\right)$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-i&0&0\\0&-2i&-2i&1+i&1&0\\0&-2i&-2i&i&0&1\end{array}\right]$$

2. Baris kedua dipakai untuk mereduksi baris ke-3 menggunakan operasi baris dan kolom $RA(2,3,-1)$ dan $CA(2,3,-1)$ sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-i&0&0\\0&-2i&0&1+i&1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right]$$

3. Baris kedua disederhanakan dengan menggunakan operasi baris dan kolom $RD(2,2\sqrt{2})$ dan $CD(2,2\sqrt{2})$ dan $CD\left(2,\frac{1}{1/i}\right)$ sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Sehingga diperoleh matriks, matriks kanonik $C = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks

P^* di mana $C = \overline{P^t} AP = P^* AP$.

4. KESIMPULAN

1. Bentuk Smith dapat digunakan untuk mencari bentuk kanonik suatu matriks normal dengan entri bilangan kompleks yang tidak dapat didiagonalisasi.
2. Prosedur mencari bentuk kanonik untuk matriks Hermite dan matriks Hermite miring adalah sama.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Anton, H., 1987, *Elementary Linier Algebra*, Fifth Edition, John Wiley & Sons.

[2]. Ayres, F. Jr., 1985, *Matriks*, Versi SI/Metrik, Schaum Outline Series, Erlangga, Jakarta.

[3]. Baker, A.C., & Porteus, H. L., 1990, *Linear Algebra and Differential Equation*, Ellis Horwood Limited, England.

[4]. Fraleigh, J.B., & Beauregard, R., 1988, *Linear Algebra*, Second Edition, Addison Wesley Publhising Company, Canada.

[5]. Lipschurtz, S., 1981, *Theory and Problem of Linier Algebra*, S1 (Metrik) Edition, Schaum Outline Series, Singapura.