Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.1 (Juni 2018) Hal. 31-42

INVERS DARI MATRIKS SIRKULAN SIMETRIS ATAS *SKEW FIELD*

Azizah, Thresye, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email : zye.azizah5@gmail.com

ABSTRAK

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan atau disebut entri-entri yang disusun teratur berdasarkan baris dan kolom. Ada beberapa jenis matriks, diantaranya yaitu matriks simetris dan matriks sirkulan. Konsep dari suatu matriks sangat berguna dalam menyelesaikan beberapa permasalahan pada ilmu matematika. Salah satu masalah yang paling umum dalam matematika adalah menyelesaikan sistem persamaan linier. Penyelesaian permasalahan sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan menggunakan invers matriks. Setiap matriks yang nonsingular mempunyai invers. Begitu halnya dengan suatu matriks A sirkulan simetris juga mempunyai invers, yaitu matriks B, sehingga memenuhi sifat $AB = BA = I$. Invers dari suatu matriks bergantung pada determinan dari matriks tersebut. Sedangkan determinan suatu matriks bergantung pada entri-entri matriks tersebut. Karena entri-entri matriks A dan B merupakan elemen dari *skew field* maka belum tentu berlaku $AB = BA$, sehingga jika $AB = I$ maka belum tentu berlaku $BA = I$. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan invers dari matriks sirkulan simetris atas *skew field*. Metode yang digunakan bersifat studi literatur yang berkaitan dengan penelitian yang dilakukan. Hasil yang diperoleh adalah setiap matriks sirkulan simetris atas *skew field* memiliki invers sehingga berlaku $AB = BA = I$.

Kata kunci: *Skew field*, matriks, invers matriks, matriks sirkulan simetris.

ABSTRACT

A matrix is a collection of numbers that are often also called regularly arranged entries by rows and columns. There are several types of matrices, such as symmetric matrix and circulant matrix. The concept of a matrix is very useful in solving some problems in mathematics. One of the most common problems in mathematics is solving system of linear equations. Solution system of linear equations problems can be solved by using the inverse matrix. That each nonsingular matrix has an inverse. So is the case with a symmetric circulant matrix A also has an inverse, is a matrix B, so it fulfills the properties $B = BA = I$. The inverse of a matrix depends on the determinant of the matrix. While the determinant of a matrix depends on the entries of the matrix. Because the matrix entries A and B is an element of *skew fields* then it is not necessarily applicable $AB = BA$, so if $AB = I$ then it is not necessarily applicable $BA = I$. The purpose of this study is to determine the inverse of symmetric circulant matrix on *skew field*. The method used is a literature study related to research conducted. The result is that each symmetric circulant matrix on *skew field* has inverse so that $AB = BA = I$.

Keywords: *Skew field*, matrix, inverse matrix, symmetric circulant matrix.

1. PENDAHULUAN

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan atau disebut entri-entri yang disusun teratur berdasarkan baris dan kolom sehingga berbentuk segi empat siku-siku [7]. Konsep dari suatu matriks sangat berguna dalam menyelesaikan permasalahan pada ilmu matematika. Salah satu masalah yang paling umum dalam matematika adalah menyelesaikan sistem persamaan linier. Penyelesaian permasalahan sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan menggunakan invers matriks.

Setiap matriks yang nonsingular mempunyai invers, sehingga memenuhi sifat $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ [5]. Begitu halnya dengan suatu matriks A sirkulan simetris jika nonsingular maka juga mempunyai invers, yaitu matriks B. Karena entri-entri dari matriks A dan B merupakan elemen dari *skew field*, belum tentu berlaku sifat komutatif perkalian $AB = BA$, sehingga jika $AB = I$ maka belum tentu berlaku $BA = I$. Berdasarkan hal tersebut muncul permasalahan apakah setiap matriks sirkulan simetris atas *skew field* memiliki invers sehingga berlaku $= BA = I$. Artikel ini mengkaji kembali tulisan Wang, J & Dong, C. 2007 [9].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ring dan Skew Field

Definisi 2.1.1 [4]

Suatu himpunan tak kosong R dengan operasi penjumlahan (+) dan pergandaan (.) disebut ring jika memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $\langle R, + \rangle$ *grup abelian*
   Bersifat tertutup jika untuk setiap s,t ∈ R berlaku s + t ∈ R.
   Bersifat assosiatif jika untuk setiap s, t, u ∈ R berlaku (s + t) + u = s + (t + u).
   Terdapat elemen identitas, jika untuk setiap s ∈ R terdapat 0 ∈ R berlaku s + 0 = 0 + s = s.
   Terdapat elemen invers, jika untuk setiap s ∈ R terdapat −s ∈ R berlaku s + (−s) = (−s) + s = 0.
   Bersifat komutatif jika untuk setiap s, t ∈ R, berlaku s + t = t + s.

ii. $\langle R, \cdot \rangle$
   Bersifat tertutup jika untuk setiap s, t ∈ R berlaku st ∈ R.
   Bersifat assosiatif jika untuk setiap s, t, u ∈ R berlaku (st)u = s(tu).

iii. $\langle R, +, \cdot \rangle$
   Bersifat distributif kiri jika untuk setiap s, t, u ∈ R berlaku s (t + u) = st + su.
   Bersifat distributif kanan jika untuk setiap s, t, u ∈ R berlaku (s + t) u = su + tu.

Definisi 2.1.2 [4]

Misalkan $\langle R, +, \cdot \rangle$ *ring dengan unsur satuan 1. Suatu R disebut skew field atau division ring jika setiap elemen tak nol di R mempunyai invers perkalian.*

2.2 Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.2.1 [1]

Suatu garis yang terletak pada bidang pq *dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk:*

$$s_1 p + s_2 q = t$$

Persamaan seperti ini disebut persamaan linier dengan variabel p dan q. Secara umum persamaan linier didefinisikan dengan n variabel $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 + \cdots + s_n p_n = t$$

dimana $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *dan t merupakan konstanta real.*

Definisi 2.2.2 [1]

Sejumlah tertentu persamaan linier dalam variabel $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *disebut sistem persamaan linier atau sistem linier. Urutan sejumlah bilangan* $r_1, r_2, \cdots, r_n$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.1 (Juni 2018) Hal. 30-41

merupakan solusi dari sistem persamaan tersebut jika $p_1 = r_1, p_2 = r_2, \cdots, p_n = r_n$ *merupakan solusi dari setiap persamaan di dalam sistem tersebut.*

2.3 Matriks

Definisi 2.3.1 [1]

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Matriks S yang berukuran dari m baris dan n kolom, maka bentuk umum matriks S berordo $m \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S_{m\times n} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1j} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2j} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \cdots & s_{ij} & \cdots & s_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mj} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix} \quad i = 1,2,\ldots,m \text{ dan } j = 1,2,\ldots,n$$

2.4 Jenis - Jenis Matriks

Definisi 2.4.1 [6]

Matriks transpose adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom. Misalkan $S = [s_{ij}]$ *berukuran* $m \times n$, *maka transpose dari matriks S, ditulis* S^T, *adalah matriks* $n \times m$ *yang dalam hal ini* $S^T = [r_{ij}]$, *maka* $r_{ij} = s_{ji}$ *untuk i = 1, 2, …, n dan j =1, 2, …, m.*

Definisi 2.4.2 [2]

Matriks simetris adalah suatu matriks jika $S^T = S$, *yaitu jika* $s_{ij} = s_{ji}$ *untuk setiap i dan j.*

Definisi 2.4.3 [8]

Matriks permutasi adalah matriks persegi yang mempunyai satu buah entri 1 pada setiap baris dan kolom sedangkan entri lain bernilai 0.

2.5 Operasi Pada Matriks

Definisi 2.5.1 [1]

Jika S adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar, maka hasil kali (product) kS adalah suatu matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari S oleh k.

Definisi 2.5.2 [1]

Jika S adalah suatu matriks berukuran m × p dan T adalah suatu matriks berukuran p × n, maka hasil kali dari ST adalah matriks berukuran m × n yang entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut. Untuk memperoleh entri pada baris i dan kolom j dari ST, pilih baris i dari matriks S dan kolom j dari matriks T. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.6.1 [5]

Suatu matriks S berukuran n × n dikatakan nonsingular (matriks yang determinannya tidak sama dengan nol) atau dapat dibalik (invertible) jika terdapat matriks T yang berukuran sama sedemikian sehingga ST = TS = I, maka *matriks T disebut sebagai invers dari matriks S. Jika S tidak mempunyai invers maka S dikatakan singular (matriks yang determinannya sama dengan nol).*

2.7 Matriks Sirkulan

Definisi 2.7.1 [3]

Matriks sirkulan adalah suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$S_{n\times n} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} \\ s_{n-1} & s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-3} & s_{n-2} \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_0 & \cdots & s_{n-4} & s_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} & s_0 \end{bmatrix}$$

Setiap baris dari matriks tersebut merupakan pergeseran sekali (satu entri) dari entri-entri baris sebelumnya dan setiap kolomnya merupakan pergeseran sekali (satu entri) dari entri-entri kolom sebelumnya.

3. METODE PENELITIAN

Penulisan dilakukan melalui studi literatur. Prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah membuktikan sifat-sifat dari operasi matriks sirkulan simetris, membuktikan solusi tunggal dari sistem persamaan linier menggunakan invers matriks, dan membuktikan invers matriks dari dua tipe khusus matriks sirkulan simetris atas *skew field.*

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Matriks Sirkulan Simetris

Matriks sirkulan simetris adalah suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$\mathrm{W}_{\mathrm{n\times n}} = \begin{bmatrix} \mathrm{w}_0 & \mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2 & \cdots & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-2} & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-1} \\ \mathrm{w}_1 & \mathrm{w}_2 & \mathrm{w}_3 & \cdots & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-1} & \mathrm{w}_0 \\ \mathrm{w}_2 & \mathrm{w}_3 & \mathrm{w}_4 & \cdots & \mathrm{w}_0 & \mathrm{w}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{w}_{\mathrm{n}-2} & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-1} & \mathrm{w}_0 & \cdots & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-4} & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-3} \\ \mathrm{w}_{\mathrm{n}-1} & \mathrm{w}_0 & \mathrm{w}_1 & \cdots & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-3} & \mathrm{w}_{\mathrm{n}-2} \end{bmatrix}$$

dinotasikan dengan $W = \boldsymbol{S_c}\,(\boldsymbol{w_0} \quad \boldsymbol{w_1} \quad \boldsymbol{w_2} \ \cdots \ \boldsymbol{w_{n-2}} \quad \boldsymbol{w_{n-1}})$ [9] .

Setiap baris dari matriks tersebut merupakan pergeseran ke kiri sekali (satu entri) dari entri-entri baris sebelumnya dan setiap kolomnya merupakan pergeseran sekali (satu entri) dari entri-entri kolom sebelumnya.

Ada beberapa sifat-sifat yang harus diperhatikan pada operasi matriks sirkulan simetris, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{D^{2k-1}} = \boldsymbol{D}$ dan $\boldsymbol{D^{2k}} = \boldsymbol{I}$, dimana $\boldsymbol{D}$ adalah matriks permutasi yang merupakan matriks sirkulan simetris.
2. Perkalian dari dua matriks sirkulan simetris adalah matriks sirkulan.
3. Misalkan matriks sirkulan simetris W invertible (dapat dibalik), maka W^{-1}dan kW (dimana k skalar) adalah matriks sirkulan simetris juga [9]**.**

Bukti:

1. Ambil sebarang matriks $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{R}$, dimana $\boldsymbol{D}$ adalah matriks permutasi yang merupakan matriks sirkulan simetris

dengan $\boldsymbol{D}_{n\times n}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}$

a) Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k-1}=\boldsymbol{D}$

Misalkan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k})$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k-1}=\boldsymbol{D}$. Akan dibuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

(i) Basis induksi

$\boldsymbol{P}(\mathbf{1})$ benar, karena untuk $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ diperoleh $\boldsymbol{D}^{2k-1}=\boldsymbol{D}^{2\cdot 1-1}=\boldsymbol{D}^{2-1}=\boldsymbol{D}$

(ii) Langkah induksi

Misalkan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k})$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k-1}=\boldsymbol{D}$ adalah benar (hipotesis induksi). Akan diperlihatkan bahwa $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$ juga benar, yaitu $\boldsymbol{D}^{2(k+1)-1}=\boldsymbol{D}$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$\boldsymbol{D}^{2(k+1)-1}=\boldsymbol{D}^{2k+2-1}=\boldsymbol{D}^{2k-1}\cdot\boldsymbol{D}^{2}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}^{2}=\boldsymbol{D}^{3}$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}$$

Karena langkah $(\boldsymbol{i})$ dan $(\boldsymbol{ii})$ telah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa $\boldsymbol{D}^{2k-1}=\boldsymbol{D}$

b) Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k}=\boldsymbol{I}$

Misalkan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k})$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k}=\boldsymbol{I}$. Akan dibuktikan kebenaran proposisi ini dengan dua langkah induksi sebagai berikut:

(i) Basis induksi

$\boldsymbol{P}(\mathbf{1})$ benar, karena untuk $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ diperoleh $\boldsymbol{D}^{2k}=\boldsymbol{D}^{2\cdot 1}=\boldsymbol{D}^{2}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

(ii) Langkah induksi

Misalkan $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k})$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $\boldsymbol{D}^{2k}=\boldsymbol{I}$ adalah benar (hipotesis induksi). Akan diperlihatkan bahwa $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$ juga benar, yaitu $\boldsymbol{D}^{2(k+1)}=\boldsymbol{I}$

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$\boldsymbol{D}^{2(k+1)}=\boldsymbol{D}^{2k+2}=\boldsymbol{D}^{2k}\cdot\boldsymbol{D}^{2}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{D}^{2}$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\dots&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\dots&\mathbf{1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$

Karena langkah $(\boldsymbol{i})$ dan $(\boldsymbol{ii})$ telah diperlihatkan benar, maka terbukti $\boldsymbol{D}^{2k}=\boldsymbol{I}$

2. Ambil sebarang matriks $\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{R}$ yang merupakan matriks sirkulan simetris,

$$\boldsymbol{G}_{n\times n}=\begin{bmatrix}g_0&g_1&\cdots&g_{n-1}\\g_1&g_2&\cdots&g_0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\g_{n-1}&g_0&\dots&g_{n-2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}_{n\times n}=\begin{bmatrix}h_0&h_1&\dots&h_{n-1}\\h_1&h_2&\dots&h_0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\h_{n-1}&h_0&\dots&h_{n-2}\end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi 2.5.2 maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah

$$\boldsymbol{GH} = \begin{bmatrix} g_0h_0 + g_1h_1 + \cdots + g_{n-1}h_{n-1} & g_0h_1 + gh_2 + \cdots + g_{n-1}h_0 & \cdots & g_0h_{n-1} + g_1h_0 + \cdots + g_{n-1}h_{n-2} \\ g_1h_0 + g_2h_1 + \cdots + g_0h_{n-1} & g_1h_1 + g_2h_2 + \cdots + g_0h_0 & \cdots & g_1h_{n-1} + g_2h_0 + \cdots + g_0h_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}h_0 + g_0h_1 + \cdots + g_{n-2}h_{n-1} & g_{n-1}h_2 + g_0h_2 + \cdots + g_{n-2}h_0 & \cdots & g_{n-1}h_{n-1} + g_0h_0 + \cdots + g_{n-2}h_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_0h_0 + g_1h_1 + \cdots + g_{n-1}h_{n-1} & g_0h_1 + g_1h_2 + \cdots + g_{n-1}h_0 & \cdots & g_0h_{n-1} + g_1h_0 + \cdots + g_{n-1}h_{n-2} \\ g_0h_{n-1} + g_1h_0 + g_2h_1 + \cdots & g_0h_0 + g_1h_1 + g_2h_2 + \cdots & \cdots & g_1h_{n-1} + g_2h_0 + \cdots + g_0h_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}h_0 + \cdots + g_{n-2}h_{n-1} + g_0h_1 + & g_{n-1}h_2 + g_0h_2 + \cdots + g_{n-2}h_0 & \cdots & g_0h_0 + \cdots + g_{n-2}h_{n-2} + g_{n-1}h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Misal $\boldsymbol{g_0h_0 + g_1h_1 + g_2h_2 + \cdots + g_{n-2}h_{n-2} + gh_{n-1} = f_0}$

$$\boldsymbol{g_0h_1 + g_1h_2 + \cdots + g_{n-2}h_{n-1} + g_{n-1}h_0 = f_1}$$
$$\boldsymbol{g_{n-1}h_2 + g_0h_2 + \cdots + g_{n-2}h_0 = f_2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{g_1h_{n-1} + g_2h_0 + \cdots + g_0h_{n-2} = f_{n-2}}$$
$$\boldsymbol{g_0h_{n-1} + g_1h_0 + g_2h_1 + \cdots + g_{n-1}h_{n-2} = f_{n-1}}$$

$$\boldsymbol{F_{n\times n}} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_0 & \cdots & f_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan definisi 2.4.1, maka transpose dari matriks $\boldsymbol{F}$ adalah

$$\boldsymbol{F^T} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_0 & \cdots & f_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} f_0 & f_{n-1} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1} & f_{n-2} & \cdots & f_0 \end{bmatrix}$$

∴ Karena perkalian matriks $\boldsymbol{GH = F}$ dan $\boldsymbol{F \neq F^T}$ yang berarti matriks F tidak simetris, maka terbukti bahwa perkalian dari dua matriks sirkulan simetris adalah matriks sirkulan.

3. Ambil sebarang matriks $\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{R}$ yang merupakan matriks sirkulan simetris.

dengan $\boldsymbol{W_{n\times n}} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_0 & \cdots & w_{n-2} \end{bmatrix}$

dan berdasarkan definisi 2.4.2 karena matriks W simetris maka $\boldsymbol{W = W^T}$.

a) Diketahui bahwa matriks A invertible (dapat dibalik) dan$\boldsymbol{W = W^T}$ maka
$\boldsymbol{W^{-1} = (W^T)^{-1} = (W^{-1})^T}$
Sehingga invers dari matriks sirkulan simetris juga merupakan matriks sirkulan simetris.

b) Ambil sebarang $\boldsymbol{k \epsilon R}$ dimana $\boldsymbol{k}$ skalar, berdasarkan definisi 2.4.2 dan definsi 2.5.1 maka

$$\boldsymbol{k(W^T)} = \boldsymbol{k}\left(\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_0 & \cdots & w_{n-2} \end{bmatrix}^T\right)$$
$$= \boldsymbol{k}\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_0 & \cdots & w_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} kw_0 & kw_1 & \dots & kw_{n-1} \\ kw_1 & kw_2 & \dots & kw_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kw_{n-1} & kw_0 & \dots & kw_{n-2} \end{bmatrix}$$, selanjutnya

$$(kW)^T = \left(k \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_0 & \dots & w_{n-2} \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} kw_0 & kw_1 & \dots & kw_{n-1} \\ kw_1 & kw_2 & \dots & kw_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kw_{n-1} & kw_0 & \dots & kw_{n-2} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} kw_0 & kw_1 & \dots & kw_{n-1} \\ kw_1 & kw_2 & \dots & kw_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kw_{n-1} & kw_0 & \dots & kw_{n-2} \end{bmatrix}$$

Karena $k(W^T) = (kW)^T$ maka terbukti bahwa kW merupakan matriks sirkulan simetris. ■

4.2 Solusi Tunggal dari Sistem Persamaan Linier menggunakan Invers Matriks

Lemma 4.2.1

Diberikan $W = S_c\ (w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{n-1})$. Misalkan W invertible (dapat dibalik), maka $W^{-1} = S_c\ (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1})$ dimana $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ adalah solusi tunggal dari sistem persamaan linier

$$W \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Diberikan

$$W_{n\times n} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_{n-1} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n-1} & w_0 & \dots & w_{n-2} \end{bmatrix} \text{ dan } {W^{-1}}_{n\times n} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_0 & \dots & b_{n-2} \end{bmatrix}$$

adalah matriks simetri sirkulan. Dinotasikan dengan $W = S_c\ (w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{n-1})$ dan $W^{-1} = S_c\ (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1})$. W merupakan matriks invertible (dapat dibalik). Misal diberikan Sistem persamaan linier dengan n peubah dan n persamaan dengan $W\,x = b$. Maka Sistem persamaan linier mempunyai solusi tunggal, yaitu

$$W\,x = b$$

$$W^{-1}W\,x = W^{-1}b$$

$$x = W^{-1}b$$

$$x = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_0 & \dots & b_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Karena W adalah matriks $n \times n$ yang invertible dan matriks b berukuran $n \times 1$, maka sistem persamaan $Wx = b$. Sehingga diperoleh bahwa sistem persamaan linier mempunyai solusi tunggal yaitu $b_0,\ b_1,\ \dots,\ b_{n-1}$. ■

4.3 Invers Matriks dari Dua Tipe Khusus Matriks Sirkulan Simetris atas *Skew Field*

Teorema 4.3.1

Misalkan $W = S_c(p,\ q,\ q, \dots,\ q,\ q)$ *dan p, q unit di K . K adalah skew field. Jika W invertible (dapat dibalik) maka* $W^{-1} = S_c(b_0,\ b_1,\ \dots,\ b_{n-1})$ *dimana*

$$b_0 = [-pq^{-1}p + n(q-p) + p]^{-1}[-pq^{-1} - (n-1)]$$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = (q-p)^{-1} + b_0$$

$$= (q-p)^{-1} + [-pq^{-1}p + n(q-p) + p]^{-1}[-pq^{-1} - (n-1)]$$

Bukti:

Diberikan $W = S_c(p,\ q,\ q, \dots,\ q,\ q)$ adalah matriks sirkulan simetris atas *skew field* dengan $W_{n\times n} = \begin{bmatrix} p & q & q & \cdots & q & q \\ q & q & q & \cdots & q & p \\ q & q & q & \cdots & p & q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q & p & p & \cdots & p & p \end{bmatrix}$

Sistem persamaan linier dari matriks W adalah

$$W\,x = b$$

$$W\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan W adalah koefisien.

Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara membentuk matriks yang diperbesar dari sistem persamaan linier dan melakukan operasi baris elementer pada matriks yang diperbesar tersebut.

Dilakukan operasi baris elementer pada matriks yang diperbesar $\overline{W}$ dari W sebagai berikut.

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} p & q & q & q & \dots & q & q & 1 \\ q & q & q & q & \dots & q & p & 0 \\ q & q & q & q & \dots & p & q & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q & q & q & p & \cdots & q & q & 0 \\ q & q & q & q & \cdots & q & q & 0 \\ q & p & q & q & \cdots & q & q & 0 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dikali -1 dan dijumlahkan dengan baris kedua, lakukan juga hal yang sama pada baris ketiga, ke $n-2$, ke $n-1$, dan ke$-n$ untuk memperoleh

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p & q & q & q & \dots & q & q & 1 \\ q-p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p-q & -1 \\ q-p & 0 & 0 & 0 & \dots & p-q & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q-p & 0 & 0 & p-q & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ q-p & 0 & p-q & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ q-p & p-q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Baris kedua dikali -1 dan dijumlahkan dengan baris ketiga, lakukan juga hal yang sama pada baris ke $n-2$, ke $n-1$, dan ke$-n$ untuk memperoleh

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p & q & q & q & \dots & q & q & 1 \\ q-p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p-q & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p-q & q-p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p-q & \cdots & 0 & q-p & 0 \\ 0 & 0 & p-q & 0 & \cdots & 0 & q-p & 0 \\ 0 & p-q & 0 & 0 & \cdots & 0 & q-p & 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan berikut

$$\begin{cases} pb_0 + q(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1}) = 1, \\ (q-p)b_0 + (p-q)b_{n-1} = -1, \\ (p-q)b_{n-2} + (q-p)\, b_{n-1} = 0, \\ \vdots \\ (p-q)b_3 + (q-p)b_{n-1} = 0, \\ (p-q)b_2 + (q-p)\, b_{n-1} = 0, \\ (p-q)b_1 + (q-p)\, b_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Sehingga $\begin{cases} pb_0 + q(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = 1, & (*) \\ (q-p)b_0 + (p-q)b_{n-1} = -1, & (**) \\ (p-q)\, b_i + (q-p)\, b_{n-1} = 0 & (***) \quad i = 1,2,\dots,n-2 \end{cases}$

Dari persamaan $(**)$

$$(q-p)b_0 + (p-q)b_{n-1} = -1$$
$$(p-q)b_{n-1} = -1 + (p-q)b_0$$
$$b_{n-1} = (q-p)^{-1} + b_0$$

Dari persamaan $(***)$

$$(p-q)\, b_i + (q-p)\, b_{n-1} = 0$$
$$(p-q)b_i = (p-q)b_{n-1}$$
$$b_i = q_{n-1} \qquad i = 1,2,\dots,n-2$$

Dari persamaan $(*)$

$$pb_0 + q(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = 1$$
$$pb_0 + q[(n-1)((q-p)^{-1} + b_0)] = 1$$
$$pb_0 + q[(n-1)(q-p)^{-1}] + q[(n-1)b_0)] = 1$$
$$[p + q(n-1)]b_0 = 1 - q[(n-1)(q-p)^{-1}]$$
$$[p + q(n-1)]^{-1}[p + q(n-1)]b_0 = [p + q(n-1)]^{-1} - q[(n-1)(q-p)^{-1}]\,[p + q(n-1)]^{-1}$$
$$b_0 = [p + q(n-1)]^{-1} - q[(n-1)(q-p)^{-1}]\,[p + q(n-1)]^{-1}$$
$$b_0 = [-pq^{-1}p + n(q-p) + p]^{-1}[-pq^{-1} - (n-1)]$$

Maka diperoleh :

$$b_0 = [-pq^{-1}p + n(q-p) + p]^{-1}[-pq^{-1} - (n-1)]$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = (q-p)^{-1} + b_0$$
$$= (q-p)^{-1} + [-pq^{-1}p + n(q-p) + p]^{-1}[-pq^{-1} - (n-1)]$$

Sehingga,

$$W^{-1} = S_c(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3.2

Diberikan $W = S_c(p,\ p+q,\ p+2q \dots, p+(n-1)q)$ *dan* p, q *unit di* K. K *adalah skew field. Jika* W *invertible (dapat dibalik) maka* $W^{-1} = S_c(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ *dimana*

$$b_0 = [\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} - b_1 - \cdots - b_{n-1}$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-2} = n^{-1}[\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$

$b_{n-1} = (1+q^{-1}p)\left[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)\right]^{-1} + (1+2+\cdots+(n-2))\left(n^{-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)\right]^{-1}\right).$

Bukti:

Diberikan $W = S_c(p,\ p+q,\ p+2q \ldots, p+(n-1)q)$ adalah matriks sirkulan simetris atas *skew field*

dengan $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} p & p+q & p+2q & \cdots & p+(n-1)q \\ p+q & p+2q & p+3q & \cdots & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p+(n-1)q & p & p+q & \cdots & p+(n-2)q \end{bmatrix}$

Sistem persamaan linier dari matriks A adalah

$$W\,x = b$$

$$W\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A adalah koefisien.

Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara membentuk matriks yang diperbesar dari sistem persamaan linier dan melakukan operasi baris elementer pada matriks yang diperbesar tersebut.

Dilakukan operasi baris elementer pada matriks yang diperbesar $\bar{W}$ dari W sebagai berrikut.

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} p & p+q & p+2q & \cdots & p+(n-1)q & 1 \\ p+q & p+2q & p+3q & \cdots & p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p+(n-1)q & p & p+q & \cdots & p+(n-2)q & 0 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dikali -1 dan dijumlahkan dengan baris kedua kemudian dibagi q untuk memperoleh

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \\ p+q & p+2q & p+3q & \cdots & p+(n-1)q & p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p+(n-1)q & p & p+q & \cdots & p+(n-3)q & p+(n-2)q & 0 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dikali $-(p+q)$ dan dijumlahkan dengan baris kedua kemudian dibagi q, lakukan juga hal yang sama pada baris ketiga dan ke$-n$ untuk memperoleh

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, \\ b_1 + 2b_2 + \cdots + (n-2)b_{n-2} - b_{n-1} = -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, \\ -nb_{n-2} = -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \\ \quad\vdots \\ -nb_1 = -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, \end{cases}$$

Dilakukan penyederhanaan untuk memperoleh

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, & (*) \\ b_1 + 2b_2 + \cdots + (n-2)b_{n-2} - b_{n-1} = -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, & (**) \\ -nb_j = -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}, \quad j = 1,2,\ldots,n-2 & (***) \end{cases}$$

Dari persamaan $(***)$

$$-nb_j = -[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$nb_j = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$b_j = n^{-1}[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} \qquad j = 1,2,\dots,n-2$$

Dari persamaan $(**)$, misal $x = n^{-1}[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$

$$b_1 + 2b_2 + \cdots + (n-2)b_{n-2} - b_{n-1} = -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$x + 2x + \cdots + (n-2)\,x - b_{n-1} = -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$x\,(1+2+\cdots+(n-2)) - b_{n-1} = -(1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$b_{n-1} = (1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} + \ x\,(1+2+\cdots+(n-2))$$
$$b_{n-1} = (1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} + \ (1+2+\cdots+(n-2))\,(n^{-1}[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1})$$

Dari persamaan $(*)$

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$b_0 = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} - b_1 - \cdots - b_{n-1}$$

Maka diperoleh,

$$b_0 = [\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} - b_1 - \cdots - b_{n-1}$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-2} = n^{-1}[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}$$
$$b_{n-1} = (1+q^{-1}p)[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1} + \ (1+2+\cdots+(n-2))\,(n^{-1}[\sum_{i=0}^{n-1}(p+iq)]^{-1}).$$

Sehingga

$$W^{-1} = S_c(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \quad \blacksquare$$

5. KESIMPULAN

1) Matriks sirkulan simetris adalah suatu matriks sirkulan yang baris (atau kolomnya) merupakan pergeseran ke kiri sekali (satu entri) dari baris (atau kolom) sebelumnya.
2) Perkalian dari dua matriks sirkulan simetris adalah matriks sirkulan.
3) Invers dari matriks sirkulan simetris adalah matriks sirkulan simetris juga.
4) Setiap matriks sirkulan simetris atas *skew field* memiliki invers sehingga berlaku $WW^{-1} = W^{-1}W = I$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer.* Edisi Ke-5. Erlangga. Jakarta.
[2] Anton, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 1.* Edisi ke-7. Terjemahan Hari Suminto. Interaksara, Batam.
[3] Brualdi, R. A. 2009. *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications*. CRC Press, New York.
[4] Fraleigh, J. B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Edisi ke-7. Addison-Wesley Publishing Company inc., United States.
[5] Leon, SJ. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya.* Edisi ke-5. Erlangga. Jakarta.
[6] Munir, Rinaldi. 2010. *Matematika Diskrit*. Revisi ke-4. Informatika, Bandung.
[7] Supranto, J. 1998. *Pengantar Matrix*. Edisi revisi. Rineka Cipta, Jakarta.
[8] Nurmayanti, Ulva. 2012. *Jenis-jenis Matriks*, http://ulva-s-nurmaryani fst10.web.unair.ac.id/artikel_detail-49810-Kuliah Campur Aduk-Jenis Jenis Matriks.html, April 2016.

[9] Wang, J. & Dong, C. 2007. Inverse Matrix of Symmetric Circulant Matrix on Skew Field. *International Journal of Algebra*. Vol. 1 : 541 – 546.