Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 39-45

APLIKASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN UNTUK MENENTUKAN FORMULA TRANSFORMASI LAPLACE

Aji Wiratama, Yuni Yulida, Thresye
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 36 Banjarbaru

ABSTRAK

Dalam tulisan ini akan membahas tentang terbentuknya formula transformasi Laplace dari solusi persamaan diferensial linier orde satu. Salah satu metode pendekatan untuk solusi persamaan diferensial linier orde satu dapat mengaplikasikan metode dekomposisi Adomian. Solusi tersebut dituliskan dalam bentuk deret tak hingga. Selanjutnya, solusi menggunakan metode dekomposisi Adomian dan solusi eksak yang diperoleh dengan faktor integrasi dibandingkan sehingga diperoleh formula Transformasi Laplace.

Kata kunci: *persamaan diferensial linier orde satu, metode dekomposisi Adomian, transformasi Laplace*

1. PENDAHULUAN

Salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial linier orde satu. Solusi eksak persamaan diferensial linier orde satu dapat dicari dengan faktor integrasi. Selain itu terdapat suatu metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial linier orde satu yaitu metode dekomposisi Adomian. Metode dekomposisi Adomian dikemukakan oleh Seorang Ahli Ilmu Matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922 – 1996). Dalam tulisan ini akan membahas mengenai solusi persamaan diferensial linier orde satu dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Solusi tersebut dituliskan dalam bentuk deret tak hingga. Berdasarkan solusi menggunakan metode dekomposisi Adomian yang dibandingkan dengan solusi eksak dengan faktor integrasi akan ditentukan formula Transformasi Laplace.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Persamaan diferensial linier orde satu memiliki variabel tak bebas y dan variabel bebas x. Bentuk umum persamaan diferensial linier orde satu adalah

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.1}$$

dengan P dan Q adalah fungsi-fungsi dari x.

Persamaan (2.1) memiliki faktor integrasi $e^{\int P(x)dx}$, dengan mengalikan setiap ruas dengan faktor integrasi diperoleh solusi Persamaan (2.1) adalah :

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] \qquad (2.2)$$

[4]

2.2 Transformasi Laplace

Definisi 1 [5]

Misalkan $F(t)$ suatu fungsi dari t dengan $t > 0$. Transformasi Laplace dari $F(t)$, yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{F(t)\}$, didefinisikan sebagai,

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (2.3)$$

dengan parameter s adalah riil sehingga nilai integral ada.

Bila suatu fungsi dari *t* dinyatakan dengan huruf besar, seperti *F(t), G(t), Y(t)* dan seterusnya, maka Transformasi Laplace dari fungsi ini dinyatakan oleh huruf kecil yang bersangkutan seperti *f(s), g(s), y(s)* dan seterusnya.

Tabel 2.1 Transformasi Laplace dari beberapa fungsi sederhana

No.	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$ $s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$ $s > 0$
3.	t^n n = 0,1,2,……	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $s > 0$ Catatan: Faktorial n = n! = 1·2···n dengan 0! = 1
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $s > 0$

Tabel 2.1 di atas memperlihatkan Transformasi Laplace dari berbagai fungsi sederhana [5]

2.3 Metode Dekomposisi Adomian

Metode Dekomposisi Adomian dikemukakan oleh Seorang Ahli Ilmu Matematika dari Amerika yaitu George Adomian (1922 – 1996). Metode dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang digunakan untuk memudahkan dalam menyelesaikan solusi dari persamaan diferensial linier dan nonlinier.

Diberikan persamaan dalam bentuk:

$$G(x(t)) = F(t) \tag{2.4}$$

Dimana *G* adalah operator diferensial biasa yang memuat bagian linier dan non liniernya. *F(t)* adalah suatu fungsi sebarang dalam variabel bebas. Bagian linier dari *G* dapat didekomposisi/diuraikan dalam bentuk *L* + *R*, dimana *L* adalah suatu operator invertible sebagai turunan, dan *R* adalah operator linier. Untuk bagian nonlinier dari *G* dalam bentuk *N*, dimana *N* adalah operator nonlinier. Maka persamaan dapat ditulis sebagai:

$$(L + R + N)\, x(t) = F(t)$$

$$L(x(t)) + R(x(t)) + N(x(t)) = F(t) \tag{2.5}$$

atau

$$L(x(t)) = F(t) - R(x(t)) - N(x(t)) \tag{2.6}$$

dengan $L(.) = \frac{d(.)}{dt}$ adalah turunan, L invertible menggunakan invers L^{-1} atau L^{-1} sebagai operator invers yang merupakan operator integral. Gunakan terapkan operator L^{-1} pada kedua sisi dari persamaan (2.9) sehingga diperoleh persamaan :

$$L^{-1}L(x(t)) = L^{-1}F(t) - L^{-1}R(x(t)) - L^{-1}N(x(t)) \tag{2.7}$$

$$x(t) = \emptyset + L^{-1}F(t) - L^{-1}R(x(t)) - L^{-1}N(x(t)) \tag{2.8}$$

dimana ∅ adalah suatu konstanta integrasi yang memenuhi $L\emptyset = 0$. Kemudian Adomian, mendefinisikan solusi *x(t)* sebagai penjumlahan deret tak hingga yaitu:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \tag{2.9}$$

dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.8) diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \emptyset + L^{-1}F(t) - L^{-1}R(x(t)) - L^{-1}N(x(t)) \tag{2.10}$$

Kemudian operator nonlinier *N(x(t))* diuraikan Adomian menjadi sebuah deret tak hingga dalam bentuk :

$$N(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{2.11}$$

Dimana $A_n(t)$ tergantung pada $(x_0(t)), (x_1(t)), \cdots, (x_n(t))$ yang disebut dengan polinomial Adomian yang diperoleh dengan menuliskan :

$$x(t)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)\lambda^n \quad ,N(x(t)(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\lambda^n \tag{2.12}$$

dimana λ adalah parameter. Dari persamaan (2.12) $A_n(t)$ dapat disimpulkan yaitu:

$$A_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)\lambda^n \right) \right]_{\lambda=0} , \qquad n=0, 1, 2, ... \tag{2.13}$$

Beberapa polinomial Adomian yaitu:

$$A_0(t) = N(x_0(t)),$$
$$A_1(t) = (x_1(t))N'(x_0(t)),$$
$$A_2(t) = (x_2(t))N'(x_0(t)) + \frac{(x_1(t))^2}{2!}N''(x_0(t)),$$
$$A_3(t) = (x_3(t))N'(x_0(t)) + (x_1(t))(x_2(t))N''(x_0(t)) + \frac{(x_1(t))^3}{3!}N'''(x_0(t)) \quad (2.14)$$
$$\vdots$$

Dari persamaan (2.10) dan (2.11) diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \emptyset + L^{-1}F(t) - L^{-1}Rx(t) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right) \quad (2.15)$$

dan bentuk deret pada persamaan (2.15) dihitung secara rekursif, dengan

$$(x_0(t)) = \emptyset + L^{-1}F(t)$$
$$(x_n(t)) = -L^{-1}Rx_{n-1}(t) - L^{-1}A_{n-1}(t), \qquad n = 1, 2, 3, \dots \quad [6]$$

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan mengenai Persamaan Diferensial Linier orde Satu, Metode Dekomposisi Adomian, Transformasi Laplace. Pada tahap awal bahan tersebut dipelajari, kemudian akan dicari hubungan solusi Persamaan Diferensial Linier orde Satu dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian dan menggunakan faktor integrasi. Selanjutnya ditentukan formulasi transformasi Laplace dari hubungan solusi tersebut.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode Dekomposisi Adomian Pada Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Berikut diberikan persamaan diferensial linier orde satu :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (4.1)$$

dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi-fungsi dari *x*. Disyaratkan hanya untuk *P(x) = -p* fungsi konstan.Persamaan (4.1) dapat ditulis

$$y = \frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{1}{P(x)}\frac{dy}{dx} \quad (4.2)$$

atau

$$y = \frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{1}{P(x)}Ly \quad (4.3)$$

dengan $\frac{dy}{dx} = Ly$.

Karena fungsi *y* kontinu dan turunannya ada maka fungsi *y* dapat dideretkan dengan asumsi solusi dari *y* pada persamaan (4.1) dapat dinyatakan dalam bentuk deret tak hingga yaitu:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{4.4}$$

Selanjutnya persamaan (4.4) disubstitusikan ke persamaan (4.3) diperoleh :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{1}{P(x)}\, L\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)$$

$$\Leftrightarrow y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ \dots + y_n + \cdots = \frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{1}{P(x)}\, L(y_0) - \frac{1}{P(x)}\, L(y_1) - \frac{1}{P(x)} L(y_3) + \cdots - \frac{1}{P(x)}\, L(y_n) + \cdots \tag{4.5}$$

Karena y_n dihitung secara rekursif, maka persamaan (4.5) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$y_0 = \frac{Q(x)}{P(x)}, y_1 = -\frac{1}{P(x)}\, L(y_0), y_2 = -\frac{1}{P(x)}\, L(y_1), y_3 = -\frac{1}{P(x)}\, L(y_2), \dots,$$

$$y_n = -\frac{1}{P(x)}\, L(y_{n-1}), \dots \tag{4.6}$$

Selanjutnya disubstitusikan *P(x)* = -*p* ke persamaan (4.6), diperoleh

$$\begin{aligned}
y_0 &= -\frac{Q(x)}{P},\\
y_1 &= (-1)\frac{1}{P}\, L\left(\frac{Q(x)}{P}\right),\\
y_2 &= (-1)^2 \frac{1}{(p)^2}\, L^2\left(\frac{Q(x)}{p}\right),\\
y_3 &= (-1)^3 \frac{1}{(p)^3}\, L^3\left(\frac{Q(x)}{p}\right),\\
&\vdots\\
y_n &= (-1)^n \frac{1}{(p)^n}\, L^n\left(\frac{Q(x)}{p}\right),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dimana $L^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ adalah suatu operator yang dideferensialkan sebanyak *n* kali, untuk *n* = 1, 2, 3, ...

4.2 Menentukan Formula Transformasi Laplace dengan Metode Dekomposisi Adomian Pada Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Solusi eksak dari persamaan diferensial linier orde satu pada persamaan (4.1) menggunakan faktor integrasi adalah

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] \tag{4.8}$$

Jika diambil *C = 0* maka persamaan (4.8) menjadi

$$y\, e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{4.9}$$

Dimisalkan *f(x)* = $e^{\int P(x)dx}$, sehingga persamaan (4.9) diperoleh :

$$y\,f(x) = \int Q(x)f(x)dx \tag{4.10}$$

Diberikan nilai khusus *P(x)* = *-p* dengan *p* adalah konstanta positif , sehingga diperoleh :

f(x)= $e^{\int P(x)dx} = e^{-px}$

Selanjutnya persamaan (4.10) menjadi :

$$y\,e^{-px} = \int Q(x)\,e^{-px}dx \tag{4.11}$$

Telah diketahui solusi dari persamaan diferensial linier orde satu dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian yaitu :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

dengan $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ pada persamaan (4.7). Sehingga persamaan (4.11) menjadi :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) e^{-px} = \int Q(x)\,e^{-px}dx$$

atau

$$\int Q(x)\,e^{-px}dx = e^{-px}\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) \tag{4.12}$$

Dengan mengambil batasan *x* pada selang [0, ∞), maka persamaan (4.12) dapat ditulis menjadi:

$$\int_0^{\infty} Q(x)\,e^{-px}dx = \left(e^{-px}\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)\Bigg|_0^{\infty} \tag{4.13}$$

Dari persamaan (4.13) ruas kiri merupakan definisi Transformasi Laplace fungsi $Q(x)$, yaitu: $\int_0^{\infty} Q(x)\,e^{-px}dx = \mathcal{L}\{Q(x)\}$, sehingga persamaan (4.13) dapat ditulis menjadi:

$$\mathcal{L}\{Q(x)\} = \int_0^{\infty} Q(x)\,e^{-px}dx = \left(e^{-px}\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)\Bigg|_0^{\infty} \tag{4.14}$$

Jadi diperoleh formula Transformasi Laplace (Definisi 1) dengan metode Dekomposisi Adomian pada persamaan diferensial linier orde satu adalah:

$$\mathcal{L}\{Q(x)\} = \left(e^{-px} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \right)\Bigg|_0^{\infty} \tag{4.15}$$

dengan $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ pada persamaan (4.7)

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Ayres, F. Jr. 1999. *Persamaan Diferensial*. Erlangga, Jakarta.

[2]. Babolian, E. 2004. "*A New Computational Method For Laplace Transform by Decomposition Method*". *Applied Mathematics and Computation*, vol. 150, pp 841-846.

[3]. Renreng, Abdullah. 1990. *Asas-asas Metode Matematika dalam Fisika*. Angkasa Bandung. Bandung.

[4]. Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

[5]. Spiegel, Murray R. 1999. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal Transformasi Laplace (Alih Bahasa Pantur Silaban dan Hans Wospakrik). Erlangga. Jakarta.*

[6]. Vahidi, A. R. 2006. "Modifying Adomian Decomposition Method for Linier Ordinary Differential Equations". *Journal of Applied Mathematics*, vol. 3, no. 10, Autumn.