# IDEAL FUZZY NEAR-RING

**Saman Abdurrahman, Na'imah Hijriati, Thresye**

Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

## ABSTRAK

*Dalam tulisan ini akan dibahas ideal near-ring, ideal fuzzy near-ring yang meliputi hubungan antara ideal near-ring dan ideal fuzzy near-ring.*
***Kata kunci:*** *Near-ring,* *ideal, ideal fuzzy.*

## 1. PENDAHULUAN

Near-ring yang dikontruksi oleh Pilz (1983), Clay (1992) dan Kandasamy (2002), merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa aksioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada near-ring. Operasi pertama (*aditif*) pada near-ring sebarang tidak harus komutatif, dan terhadap operasi pertama (*aditif*) dan kedua (*multiplikatif*), cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Seiring dengan perkembangan zaman, penelitian pada near-ring tidak hanya berkisar pada strukturnya tetapi mulai memadukan dengan teori lain, diantaranya dengan himpunan fuzzy yang diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965, seperti penelitian yang dilakukan oleh Abou-Zaid (1991).

Abou-Zaid (1991) melakukan fuzzyfikasi pada struktur near-ring, sehingga melahirkan definisi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, ideal fuzzy near-ring yang meliputi ideal prima fuzzy dan mendefinisikan ideal yang dibangun oleh satu elemen di near-ring secara detail.

Penelitian yang dilakukan oleh Abou-Zaid, memberikan ide bagi penulis untuk meneliti hubungaan antara ideal near-ring dan ideal fuzzy near-ring, sehingga buku dan jurnal tentang near-ring, ideal near-ring, near-ring fuzzy, dan ideal fuzzy near-ring yang ada pada daftar pustaka, akan di jadikan acuan utama dalam mengkaji ideal fuzzy near-ring yang meliputi hubungan antara ideal near-ring dan ideal fuzzy near-ring.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan ideal fuzzy near-ring.

**Definisi 2.1.** *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner + dan . disebut near ring, jika memenuhi:*

(1) $(R,+)$ *adalah grup* (*tidak harus grup komutatif*),

(2) $(R,\cdot)$ *adalah semigrup,*

(3) *untuk setiap x,y,z∈R berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri*

*(i). distributif kanan* : $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$

*(ii). distributif kiri* : $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, *x·y* adalah *xy*.

Pada near-ring, grupnya tidak harus komutatif terhadap operasi +, maka dalam mendefinisikan ideal di near-ring subgrupnya harus normal.

**Definisi 2.2.** *Diberikan* $(R,+,\cdot)$ *adalah near-ring. Subgrup normal* $I$ *di* $R$ *disebut ideal di* $R$*, jika*

(1). $RI \subseteq I$

(2). $(r+i)s - rs \in I$ *untuk setiap* $r, s \in R$ *dan* $i \in I$.

Subgrup normal $I$ di $R$ memenuhi kondisi $(1)$ disebut *ideal kiri* di $R$, sedangkan subgrup normal $I$ di $R$ memenuhi kondisi $(2)$ disebut *ideal kanan* di $R$.

**Definisi 2.3.** *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan* $\mu$ *disebut subset fuzzy di X jika* $\mu : X \to [0,1]$. *Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy di X dinotasikan dengan* $\mathbb{F}(X)$ *dan Image dari* $\mu$ *dinotasikan dengan* $\mathrm{Im}(\mu) := \{\mu(x) \mid x \in X\}$.

**Definisi 2.4.** *Diberikan sebarang* $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$*,maka*

(1) $\mu = \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu(x) = \upsilon(x)$ *untuk setiap* $x \in X$,

(2) $\mu \subseteq \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu(x) \leq \upsilon(x)$ *untuk setiap* $x \in X$,

(3) $(\mu \cap \upsilon)(x) := min\{\mu(x), \upsilon(x)\}$ *untuk setiap* $x \in X$.

**Definisi 2.5.** *Diberikan* $\mu \in \mathbb{F}(X)$ *dan* $t \in [0,1]$. *Level subset* (*t-cut*) *di* $\mu$ *dinotasikan dengan* $\mu_t$ *yang didefinisikan dengan,* $\mu_t := \{x \in R \mid \mu(x) \geq t\}$.

**Lemma 2.6.** *Diberikan sebarang* $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$*,maka*

(1) $\mu \subseteq \upsilon$ *maka* $\mu_a \subseteq \upsilon_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$

(2) $a \leq b$ *maka* $\mu_b \subseteq \mu_a$ *untuk setiap* $a,b \in [0,1]$

(3) $\mu = \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu_a = \upsilon_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$

## 3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan near-ring, ideal near-ring, near-ring fuzzy dan ideal fuzzy near-ring.

Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang near-ring, subnear-ring, ideal near-ring. Konsep-konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu untuk memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, dan ideal fuzzy near-ring.

Setelah memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, dan ideal fuzzy near-ring, dibuktikan beberapa lemma dan teorema yang terkait dan ditentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat baru, yang mendukung pada pembahasan hubungan antara ideal near-ring dan ideal fuzzy near-ring.

Langkah terakhir, dengan menggunakan lemma-lemma dan teorema-teorema yang saling terkait, maka diperoleh hubungan antara ideal near-ring dan ideal fuzzy near-ring.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1. IDEAL FUZZY NEAR-RING

**Definisi 4.1.1.** *Diberikan near-ring* $R$ *dan* $\mu \in \mathbb{F}(R)$. *Subset fuzzy* $\mu$ *disebut subnear-ring fuzzy di* $R$ *jika untuk setiap* $x, y \in R$ *berlaku*:

(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, *dan*

(2) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

*Selanjutnya,* $\mu$ *disebut ideal fuzzy di* $R$ *jika* $\mu$ *adalah subnear-ring fuzzy di* $R$ *dan untuk setiap* $x, y, z \in R$ *berlaku*:

(3) $\mu(x) = \mu(y+x-y)$,

(4) $\mu(xy) \geq \mu(y)$, *dan*

(5) $\mu((x+z)y - xy) \geq \mu(z)$.

Suatu $\mu$ disebut *ideal kiri fuzzy di* $R$ jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (4), sedangkan $\mu$ disebut *ideal kanan fuzzy di* $R$ jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (5).

**Contoh 4.1.2.** Diberikan $R := \{a, b, c, d\}$ adalah near-ring seperti pada Contoh 2.1.3. Jika $\mu \in \mathbb{F}(R)$ dengan $\mu(c) = \mu(d) < \mu(b) < \mu(a)$, maka dapat ditunjukkan $\mu$ adalah *ideal fuzzy* di $R$.

**Contoh 4.1.3.** Diberikan $R := \{a, b, c, d\}$ adalah near-ring dengan dua operasi biner yang didefinisikan pada tabel Cayley berikut:

| + | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *a* | *b* | *c* | *d* |
| *b* | *b* | *a* | *d* | *c* |
| *c* | *c* | *d* | *b* | *a* |
| *d* | *d* | *c* | *a* | *b* |

| · | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| *a* | *a* | *a* | *a* | *a* |
| *b* | *a* | *a* | *a* | *a* |
| *c* | *a* | *a* | *a* | *a* |
| *d* | *a* | *b* | *c* | *d* |

Jika $\mu \in \mathbb{F}(R)$ dengan $\mu(c) = \mu(d) < \mu(b) < \mu(a)$, maka dapat ditunjukkan $\mu$ adalah *ideal kiri fuzzy* di $R$, tetapi bukan *ideal kanan fuzzy* di $R$, karena ada $b, d \in R$ sedemikian hingga

$$\mu((d+b))d - dd) = \mu(cd - dd) = \mu(a - d) = \mu(a + c) = \mu(c) \ngeq \mu(b).$$

Setelah definisi subnear-ring fuzzy dan ideal fuzzy near-ring, berikut diberikan sifat dari subnear-ring fuzzy.

**Lemma 4.1.4.** *Diberikan near-ring* $R$. *Jika* $\mu$ *adalah subnear-ring fuzzy di* $R$, *maka untuk setiap* $x \in R$

(1) $\mu(0_R) \geq \mu(x)$, *dan*

(2) $\mu(-x) = \mu(x)$.

Setelah sifat dari subnear-ring fuzzy, berikut diberikan sifat dari ideal fuzzy near-ring.

**Lemma 4.1.5.** *Diberikan near-ring* $R$. *Jika* $\mu$ *adalah ideal fuzzy di* $R$, *maka untuk setiap* $x, y \in R$

(1) $\mu(x + y) = \mu(y + x)$, *dan*

(2) $\mu(x - y) = \mu(0_R)$ *maka* $\mu(x) = \mu(y)$.

Berikut diberikan sifat dari ideal fuzzy near-ring yang berhubungan dengan level subset (*t-cut*) dari $\mu$.

**Teorema 4.1.6.** *Diberikan near-ring* $R$ *dan* $\mu \in \mathbb{F}(R)$. *Level subset* $\mu_t$ *adalah ideal di* $R$ *untuk setiap* $t \in [0,1]$ *jika dan hanya jika* $\mu$ *adalah ideal fuzzy di* $R$.

**Bukti:**

($\Rightarrow$) Misalkan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ dan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Akan dibuktikan $\mu$ ideal fuzzy di $R$.

1) Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian hingga $\mu(x_0 - y_0) < \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$.
   Misalkan $t_0 = ½\,[\mu(x_0 - y_0) + \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}]$, maka

   $$\min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\} > t_0 > \mu(x_0 - y_0) \Leftrightarrow \mu(x_0) > t_0 \wedge \mu(y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0 - y_0) < t_0.$$

   Berdasarkan analisa di atas, maka $x_0, y_0 \in \mu_{t_0}$ dan $x_0 - y_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan $\mu_{t_0}$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya

   $$\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$

2) $(i)$ Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian hingga $\mu(x_0) > \mu(y_0 + x_0 - y_0)$.
   Misalkan $t_0 = ½\,[\mu(x_0) + \mu(y_0 + x_0 - y_0)]$, maka

   $$\mu(x_0) > t_0 > \mu(y_0 + x_0 - y_0) \Leftrightarrow \mu(x_0) > t_0 \wedge \mu(y_0 + x_0 - y_0) < t_0.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $x_0 \in \mu_{t_0}$ dan $y_0 + x_0 - y_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan $\mu_{t_0}$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya

$$\mu(x) \leq \mu(y + x - y), \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$

$(ii)$ Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian hingga $\mu(x_0) < \mu(y_0 + x_0 - y_0)$.

Misalkan $t_0 = ½\ [\mu(x_0) + \mu(y_0 + x_0 - y_0)]$, maka

$$\mu(y_0 + x_0 - y_0) > t_0 > \mu(x_0) \Leftrightarrow \mu(y_0 + x_0 - y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0) < t_0.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $y_0 + x_0 - y_0 \in \mu_{t_0}$ dan $x_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan $\mu_{t_0}$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya

$$\mu(x) \geq \mu(y + x - y), \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$

Berdasarkan $(i)$ dan $(ii)$, maka $\mu(x) = \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in R$.

3) Andaikan ada $x_0, y_0 \in R$ sedemikian hingga $\mu(x_0 y_0) < \mu(y_0)$.

Misalkan $t_0 = ½\ [\mu(x_0 y_0) + \mu(y_0)]$, maka

$$\mu(y_0) > t_0 > \mu(x_0 y_0) \Leftrightarrow \mu(y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0 y_0) < t_0.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $y_0 \in \mu_{t_0}$ dan $x_0 y_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan $\mu_{t_0}$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(xy) \geq \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in R$.

4) Andaikan ada $x_0, y_0, i_0 \in R$ sedemikian hingga $\mu((x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0) < \mu(i_0)$.

Misalkan $t_0 = ½\ [\mu((x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0) + \mu(i_0)]$, maka

$$\mu(i_0) > t_0 > \mu((x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0) \Leftrightarrow \mu(i_0) > t_0 \wedge \mu((x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0) < t_0.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $i_0 \in \mu_{t_0}$ dan $(x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan $\mu_{t_0}$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya

$$\mu((x + i)y - xy) \geq \mu(i), \text{ untuk setiap } x, y, i \in R.$$

Jadi, $\mu$ ideal fuzzy di $R$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mu$ ideal fuzzy di $R$. Akan dibuktikan $\mu_t$ ideal di $R$ untuk setiap $t \in [0,1]$

Diambil sebarang $t \in [0,1]$, maka menurut definisi $\mu_t := \{x \in R \mid \mu(x) \geq t\}$, $0_R \in \mu_t$ yang mengakibatkan $\mu_t \subseteq R$ dan $\mu_t \neq \varnothing$.

Mengingat $\mu$ adalah ideal fuzzy di $R$, maka untuk setiap $r, s \in R$ dan $x, y \in \mu_t$ berlaku:

1) $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$ yang mengakibatkan $x - y \in \mu_t$, dengan kata lain $(\mu_t, +)$ adalah subgrup di $(R, +)$.
2) $\mu(r + x - r) = \mu(x) \geq t$ yang mengakibatkan $r + x - r \in \mu_t$, dengan kata lain $(\mu_t, +)$ subgrup normal di $(R, +)$.
3) $\mu(rx) \geq \mu(x) \geq t$ yang mengakibatkan $rx \in \mu_t$, dengan kata lain $R\mu_t \subseteq \mu_t$.
4) $\mu[(r + i)s - rs] \geq \mu(i) \geq t$ yang mengakibatkan $(r + i)s - rs \in \mu_t$.

Jadi, $\mu_t$ ideal di $R$. ■

**Teorema 4.1.7.** *Diberikan near-ring $R$. Jika I adalah ideal di $R$, maka untuk setiap $t \in (0,1]$, ada $\mu$ ideal fuzzy di $R$ sedemikian hingga $\mu_t = I$.*

**Bukti:**

Misalkan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan dengan,

$$\mu(x) := \begin{cases} t, & x \in I \\ 0, & x \in R - I \end{cases}$$

dengan $t \in (0,1]$. Akan dibuktikan ada $\mu$ ideal fuzzy di $R$ sedemikian hingga $\mu_t = I$.

1) Diambil sebarang $x, y \in R$.
   a) Jika $x, y \in R - I$, maka $\mu(x) = 0$ dan $\mu(y) = 0$ sedemikian hingga
   $$\mu(x - y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ dan } \mu(xy) \geq 0 = \mu(y).$$
   b) Jika $x, y \in I$, maka $x - y, xy \in I$ sedemikian hingga
   $$\mu(x - y) = t = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ dan } \mu(xy) = t = \mu(y).$$
   c) Jika $x \in I$ dan $y \notin I$, maka $\mu(x) = t$ dan $\mu(y) = 0$ sedemikian hingga
   $$\mu(x - y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ dan } \mu(xy) \geq 0 = \mu(y).$$

   Jadi, $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(xy) \geq \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in R$.
2) Andaikan $\mu(x) < \mu(y + x - y)$ untuk suatu $x, y \in R$.

   Mengingat $\mathrm{Im}(\mu) = \{0, t\}$, maka
   $$\mu(x) = 0 \wedge \mu(y + x - y) = t \Leftrightarrow x \notin I \wedge y + x - y \in I.$$
   Di lain pihak,

   $(I, +)$ subgrup normal di $(R, +)$ maka $[x - y] + (y + x - y) - [x - y] \in I$ tetapi,
   $$\begin{aligned}[x - y] + (y + x - y) - [x - y] &= [x + ((-y) + y)] + ([x - y] - [x - y]) \\ &= x + 0_R + 0_R = x \in I.\end{aligned}$$
   Kontradiksi dengan $x \notin I$ sehingga pengandaian salah, seharusnya
   $$\mu(x) \geq \mu(y + x - y) \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$
   Selanjutnya, andaikan $\mu(x) > \mu(y + x - y)$ untuk suatu $x, y \in R$.

   Mengingat $\mathrm{Im}(\mu) = \{0, t\}$, maka
   $$\mu(x) = t \wedge \mu(y + x - y) = 0 \Leftrightarrow x \in I \wedge y + x - y \notin I.$$
   Akibatnya, $(I, +)$ bukan subgrup normal di $(R, +)$. Kontradiksi dengan $(I, +)$ subgrup normal di $(R, +)$ sehingga pengandaian salah, seharusnya
   $$\mu(x) \leq \mu(y + x - y) \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$
   Berdasarkan analisa di atas, maka $\mu(x) = \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in R$.
3) Andaikan $\mu[(x + i)y - xy] < \mu(i)$ untuk suatu $x, y, i \in R$.

   Mengingat $\mathrm{Im}(\mu) = \{0, t\}$, maka
   $$\mu((x + i)y - xy) = 0 \wedge \mu(i) = t \Leftrightarrow (x + i)y - xy \notin I \wedge i \in I.$$
   Akibatnya, $I$ bukan ideal di $R$. Kontradiksi dengan $I$ ideal di $R$.

   Jadi, $\mu((x + i)y - xy) \geq \mu(i)$ untuk setiap $x, y, i \in R$.
4) Akan dibuktikan $\mu_t = I$.

   Berdasarkan definisi $\mu$, maka
   $$\mu_t = \{x \in R \mid \mu(x) \geq t\} = \{x \in R \mid \mu(x) = t \vee \mu(x) > t\} = \{x \in R \mid \mu(x) = t\} = I.$$

Jadi, ada $\mu$ ideal fuzzy di $R$ sedemikian hingga $\mu_t = I$. ■

Selanjutnya akan didefinisikan fungsi karakteristik dari suatu near-ring yang merupakan kejadian khusus dari teorema di atas, yaitu pada saat $t = 1$.

**Definisi 4.1.8.** *Diberikan A subset tidak kosong di near-ring $R$ dan $\chi_A \in \mathbb{F}(R)$ yang didefinisikan dengan,*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in R - A \end{cases}$$

*untuk setiap $x \in R$. Selanjutnya $\chi_A$ disebut fungsi karakteristik dari A, kecuali ada keterangan lebih lanjut.*

Berikut diberikan sifat dari ideal fuzzy di near-ring $R$, yang berhubungan dengan fungsi karakteristik dari suatu ideal di $R$.

**Teorema 4.1.9** *Diberikan I subset tidak kosong di near-ring $R$. Fungsi karakteristik dari I adalah ideal fuzzy di $R$ jika dan hanya jika I ideal di $R$.*

**Bukti:**

($\Rightarrow$) Misalkan $\mu$ adalah ideal fuzzy di $R$ yang didefinisikan dengan,

$$\mu(x) := \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \in R - I \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$. Akan dibuktikan *I* adalah ideal di $R$.

Berdasarkan definisi $\mu$, maka $\mu_1 = \{x \in R \mid \mu(x) \geq 1\} = \{x \in R \mid \mu(x) = 1\} = I$, sehingga menurut Teorema 4.1.6, *I* adalah ideal di $R$.

($\Leftarrow$) Bukti sejalan dengan Teorema 4.1.7. ■

Berikut diberikan sifat kesamaan dari dua level subset (*t-cut*) dari suatu subset fuzzy di near-ring *R*.

**Teorema 4.1.10.** *Diberikan ideal fuzzy $\mu$ di near-ring $R$. Dua level subset $\mu_{t_1}$ dan $\mu_{t_2}$ di $\mu$ dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.*

**Bukti:**

($\Rightarrow$) Misalkan $\mu$ ideal fuzzy di $R$ dan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$. Akan dibuktikan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

Andaikan ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$, maka

$$\mu(x) \geq t_1 \wedge \mu(x) < t_2 \Leftrightarrow x \in \mu_{t_1} \wedge x \notin \mu_{t_2}.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $\mu_{t_1} \neq \mu_{t_2}$. Kontradiksi dengan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$, sehingga pengandaian salah, seharusnya tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\mu$ ideal fuzzy di near-ring $R$ dan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$. Akan dibuktikan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$.

Dimbil sebarang $x \in \mu_{t_2}$, maka $\mu(x) \geq t_2 > t_1$ yang mengakibatkan $\mu(x) > t_1$, yaitu $x \in \mu_{t_1}$, dengan kata lain $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$.

Selanjutnya, diambil sebarang $x \in \mu_{t_1}$ maka $\mu(x) \geq t_1$. Mengingat $\mu(x) \geq t_1$ dan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$, maka $\mu(x) \nless t_2$ yang mengakibatkan $\mu(x) \geq t_2$ sehingga $x \in \mu_{t_2}$, dengan kata lain $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$.

Berdasarkan analisa di atas, maka $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$. ■

Setelah sifat kesamaan dua level suset (*t-cut*) dari suatu subset fuzzy di near-ring $R$, berikut diberikan sifat dari koleksi ideal di near-ring $R$ yang identik dengan koleksi semua level subset $\mu$ di $R$.

**Teorema 4.1.11.** *Diberikan ideal fuzzy $\mu$ di near-ring R. Jika $Im(\mu) = \{t_1, t_2, ...t_n\}$ dengan $t_1 < t_2 < ... < t_n$, maka koleksi ideal $\{\mu_{t_i} | 1 \leq i \leq n\}$ di $R$ adalah koleksi semua level subset di $\mu$.*

**Bukti:**

Misalkan $\mu$ ideal fuzzy di $R$, $Im(\mu) = \{t_1, t_2, ...t_n\}$ dengan $t_1 < t_2 < ... < t_n$ dan $\{\mu_{t_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi ideal di $R$. Akan dibuktikan untuk setiap $t \in [0,1]$ ada $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ sedemikian hingga $\mu_t = \mu_{t_i}$.

Mengingat $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, maka $t_i < t_{i+1}$, $1 \le i \le n-1$ sehingga menurut Lemma 2.6, $\mu_{t_{i+1}} \subseteq \mu_{t_i}$ dalam arti $\mu_{t_1} \supseteq \mu_{t_2} \supseteq \ldots \supseteq \mu_{t_n}$.

Mengingat $\mu_{t_1} := \{x \in R \mid \mu(x) \ge t_1\}$, $\{\mu_{t_i} \mid 1 \le i \le n\}$ adalah koleksi ideal di $R$ dan $\mu_{t_1} \supseteq \mu_{t_2} \supseteq \ldots \supseteq \mu_{t_n}$, maka $\mu_{t_1} = R$.

Misalkan $t \in [0,1]$ dan $t \notin \mathrm{Im}(\mu)$.

1) Jika $t < t_1$, maka menurut Lemma 2.6, $\mu_{t_1} \subseteq \mu_t$.
   Mengingat $\mu_{t_1} = R$ dan $\mu_{t_1} \subseteq \mu_t$, maka $\mu_t = \mu_{t_1}$.
2) Jika $t_i < t < t_{i+1}$ dengan $1 \le i \le n-1$, maka menurut Lemma 2.6, $\mu_{t_{i+1}} \subseteq \mu_t$.
   Selanjutnya, diambil sebarang $x \in \mu_t$ maka $\mu(x) \ge t$.
   Andaikan ada $x \in R$ sedemikian hingga $t \le \mu(x) < t_{i+1}$, maka $t_i < t \le \mu(x) < t_{i+1}$. Akibatnya, $\mathrm{Im}(\mu) = \{t, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Kontradiksi dengan $\mathrm{Im}(\mu) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.
   Jadi, tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t \le \mu(x) < t_{i+1}$.
   Selanjutnya,
   $\mu(x) \ge t$ dan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t \le \mu(x) < t_{i+1}$, maka $\mu(x) \not< t_{i+1}$ yang mengakibatkan $\mu(x) \ge t_{i+1}$, yaitu $x \in \mu_{t_{i+1}}$ sehingga $\mu_t \subseteq \mu_{t_{i+1}}$.
   Mengingat $\mu_{t_{i+1}} \subseteq \mu_t$ dan $\mu_t \subseteq \mu_{t_{i+1}}$, maka $\mu_t = \mu_{t_{i+1}}$.

Jadi, untuk setiap $t \in [0,1]$ ada $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ sedemikian hingga $\mu_t = \mu_{t_i}$. ■

## 5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian maka dapat diambil kesimpulan bahwa setiap ideal di near-ring adalah ideal fuzzy near-ring dan juga sebaliknya.

## DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abou-Zaid. S, 1991, *On fuzzy subnear-rings and ideals*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 44, pp. 139-146.

[2]. Clay. J.R, 1992, *Nearrings, geneses and applications*, Oxford, New York.

[3]. Jun. Y.B, Sapanci. M. and Öztürk. M.A, 1998, *Fuzzy ideal in gamma near-ring*, Tr. J. of Math, vol. 22, no. __, pp. 449-459.

[4]. Kandasamy. W.B.V, 2002, *Smarandache near-rings*, American Research Press Rehoboth.

[5]. Kandasamy. W.B.V, 2003, *Smarandache fuzzy algebra*, American Research Press Rehoboth.

[6]. Kim. S.D. and Kim. H.S, 1996, *On fuzzy ideals of near-rings*, Bull. Korean Math. Soc, vol. 33, no. 4, pp. 593-601.

[7]. Mordeson, J.N, Malik D.S and Kuroki. N, 2003, *Fuzzy semigroup*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[8]. Mordeson, J.N, Bhutani. K.R. and Rosenfeld. A, 2005, *Fuzzy group theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[9]. Pilz. G, 1983, *Near-ring, the theory and applications* 2nd ed., North-Holland Mathematict Studies, vol. 23, North-Holland, Amsterdam.