Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 30-37

SIFAT-SIFAT FUNGSI PHI EULER DAN BATAS PRAPETA FUNGSI PHI EULER

Rizkun As Syirazi, Thresye, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Email: asrizkun@gmail.com

ABSTRAK

Teori little Fermat berhasil digeneralisasi oleh Euler menggunakan fungsi phi Euler, Fungsi phi Euler $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{h})$ didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli tidak lebih dari $\boldsymbol{h}$ dan saling prima dengan $\boldsymbol{h}$. Gupta (1981) mengatakan tidak semua bilangan asli merupakan elemen range $\boldsymbol{\phi}$.Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan sifat-sifat fungsi phi Euler dan menentukan batas bawah dan batas atas prapeta suatu bilangan di bawah fungsi phi Euler. Penelitian ini bersifat studi literatur yaitu dengan mengumpulkan dan mempelajari berbagai referensi yang berkaitan dengan topik penelitian. Hasil yang diperoleh adalah hubungan bilangan asli dengan peta bilangan tersebut ketika dikenakan fungsi phi Euler dan batas prapeta fungsi phi Euler, baik batas bawah maupun batas atas. Batas tersebut dapat digunakan untuk menentukan himpunanprapeta sebuah bilangan di bawah fungsi phi Euler .

Kata kunci : Fungsi Phi Euler, Prapeta Phi Euler.

1. PENDAHULUAN

Salah satu teori tentang bilangan prima pada teori bilangan yang terkenal adalah teori little Fermat. Namun, teori tersebut hanya berlaku untuk bilangan prima. [3] mengatakan pada tahun 1760, Euler mampu membuat generalisasi dari teori little Fermat untuk semua bilangan asli. Untuk membuat generalisasi tersebut, Euler menggunakan bantuan sebuah fungsi yang kemudian diberi nama fungsi phi Euler dan dinotasikan ϕ.

Fungsi phi Euler $\phi(h)$ didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli tidak lebih dari h dan saling prima dengan h. Untuk menghitung nilai $\phi(n)$ tanpa harus mendaftarkan bilangan yang memenuhi syarat, diperlukan sebuah formula $\phi(n)$ yang diperoleh berdasarkan sifat-sifat dari fungsi ϕ. Formula $\phi(n)$ juga dapat digunakan untuk memperoleh sifat-sifat lainnya dari fungsi ϕ [3]. Sebagai sebuah fungsi, ϕ tentu memiliki himpunan domain dan range. Menurut [5] tidak semua bilangan asli merupakan elemen range ϕ. Salah satu langkah untuk memudahkan mencari nilai prapeta dari m adalah menentukan batas bawah dan batas atas, sehingga dapat mempersempit ruang pencarian. Berdasarkan analisa masalah yang dikaji, maka dibahas sifat-sifat dari fungsi phi Euler dan batas bawah dan batas atas prapeta suatu bilangan di bawah fungsi phi Euler.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Keterbagian

Definisi 2.1.1 [3]

Sebuah bilangan bulat m bisa dibagi habis dengan bilangan bulat $k \neq 0$, disimbolkan $k|m$, jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $m = kc$. Ditulis $k \nmid m$ untuk menunjukkan bahwa m tidak habis dibagi dengan k.

Teorema 2.1.2 [3]

Untuk semua bilangan bulat k, l, m, memenuhi:

1. *Jika* $k|l$ *dan* $m|d$, *maka* $km|ld$.
2. *Jika* $k|l$ *dan* $l|m$, *maka* $k|m$.
3. *Jika* $k|l$ *dan* $k|m$, *maka* $k|(lx+my)$ *untuk sembarang bilangan bulat* x *dan* y.

2.2 Faktor Persekutuan Terbesar

Definisi 2.2.1 [3]

Diberikan k *dan* l *bilangan bulat, dimana paling tidak salah satu dari keduanya bukan nol. Faktor persekutuan terbesar dari* k *dan* l, *ditulis dengan* (k,l), *adalah bilangan bulat positif* w *memenuhi pernyataan berikut :*

1. $w|k$ *dan* $w|l$
2 *jika* $c|k$ *dan* $c|l$, *maka* $c \leq w$

2.3 Bilangan Prima

Definisi 2.3.1 [6]

Bilangan prima ialah bilangan asli yang lebih besar dari 1 yang hanya bisa dibagi dengan bilangan 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan komposit adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan bukan merupakan bilangan prima.

Teorema 2.3.2 [1]

Jika $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ *adalah faktorisasi prima dari* n, d *pembagi positif dari* n *maka* d *dapat dinyatakan dalam bentuk* $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{c_i}$, *dimana* $0 \leq c_i \leq a_i$ *untuk* $i = 1,2,\ldots,r$.

2.4 Kelipatan Persekutuan Terkecil

Definisi 2.4.1 [3]

Diberikan k *dan* l *bilangan bulat, dengan paling tidak salah satu dari keduanya bukan nol. Kelipatan persekutuan terkecil dari* k *dan* l, *ditulis dengan* $[k,l]$, *adalah bilangan bulat positif* v *memenuhi pernyataan berikut :*

1. $k|v$ *dan* $l|v$
2. *jika* $k|c$ *dan* $l|c$, *maka* $v \leq c$.

Teorema 2.4.2 [3]

Pada bilangan asli b *dan* d *berlaku* $[b,d](b,d) = bd$.

2.5 Fungsi Multiplikatif

Definisi 2.5.1 [6]

Sebuah fungsi yang didefinisikan untuk setiap bilangan bulat positif disebut fungsi multiplikatif jika $f(st) = f(s)f(t)$ *dimana* s *dan* t *bilangan asli yang saling prima.*

Teorema 2.5.2 [6]

Jika f *adalah fungsi multiplikatif dan misal* $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$ *adalah faktorisasi prima dari n, maka* $f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_s^{a_s})$.

2.6 Fungsi phi Euler

Definisi 2.6.1 [6]

Misal h *bilangan bulat positif. Fungsi phi Euler* $\phi(h)$ *didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli tidak lebih dari* h *yang saling prima dengan* h.

Teorema 2.6.2 [6]

Jika s dan t adalah bilangan bulat positif yang saling prima maka $\phi(st) = \phi(s)\phi(t)$.

2.7 Himpunan Terbatas

Definisi 2.7.1 [2]

Misal S adalah himpunan tak kosong yang merupakan subset $\mathbb{R}$.

(a) himpunan bilangan S disebut terbatas ke atas jika terdapat bilangan $t \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq t$ untuk setiap $s \in S$. Semua bilangan yang memenuhi syarat t dikatakan batas atas S.

(b) himpunan bilangan S disebut terbatas ke bawah jika terdapat bilangan $v \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Semua bilangan yang memenuhi syarat v disebut batas bawah S.

(c) sebuah himpunan dikatakan himpunan terbatas jika himpunan tersebut terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Sebuah himpunan dikatakan himpunan tak terbatas bila himpunan tersebut tidak terbatas.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berhubungan dengan fungsi phi Euler khususnya sifat-sifat fungsi phi Euler. Referensi tersebut dipahami, dibahas dan diuraikan sehingga diperoleh sifat-sifat fungsi phi euler dan batas prapeta fungsi phi euler.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 4.1.1 [6]

Jika p adalah bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif, maka

$$\phi(p^k) = (p^{k-1})(p-1)$$

Bukti

Bilangan kelipatan p dan tidak lebih dari p^k ada sebanyak p^{k-1} buah, yaitu $p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1})p$. Sehingga ada sebanyak $p^k - p^{k-1}$ yang tidak lebih dari p^k dan relatif prima dengan p^k, dengan kata lain $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p^{k-1})(p-1)$.■

Teorema 4.1.2 [3]

Jika $r_1^{a_1} r_2^{a_2} \cdots r_k^{a_k}$ adalah faktorisasi prima dari bilangan asli h, maka $\phi(h)$ bisa dinyatakan dalam satu bentuk berikut

(i). $\left(r_1^{a_1-1}\right)\left(r_2^{a_2-1}\right) \dots \left(r_k^{a_k-1}\right)(r_1-1)(r_2-1)\dots(r_k-1)$

(ii). $h\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\left(1-\frac{1}{r_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}\right)$

(iii). $h\prod_{r|h}\left(\frac{r-1}{r}\right)$

Bukti

Karena ϕ adalah fungsi multiplikatif maka $\phi(h) = \phi\left(r_1^{a_1}\right)\phi\left(r_2^{a_2}\right)\cdots\phi\left(r_k^{a_k}\right)$

$= \left(r_1^{a_1-1}\right)(r-1)\left(r_2^{a_2-1}\right)(r_2-1)\dots\left(r_k^{a_k-1}\right)(r_k-1)$

$= \left(r_1^{a_1-1}\right)\left(r_2^{a_2-1}\right)\dots\left(r_k^{a_k-1}\right)(r_1-1)(r_2-1)\dots(r_k-1)$

$= \left(r_1^{a_1}\right)\left(r_2^{a_2}\right)\dots\left(r_k^{a_k}\right)(1-r_1^{-1})(1-r_2^{-1})\cdots(1-r_k^{-1})$

$= h\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\left(1-\frac{1}{r_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_k}\right)$
$= h\left(\frac{r_1-1}{r_1}\right)\left(\frac{r_2-1}{r}\right)\cdots\left(\frac{r_k-1}{r_k}\right) = h\prod_{r|h}(\frac{r-1}{r})$.■

Teorema 4.1.3 [6]

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $\sum_{d|n}\phi(d) = n$

Bukti

Bilangan dari 1 sampai n dibagi ke dalam kelas-kelas. Bilangan m dimasukkan ke dalam kelas C_d jika dan hanya jika $(m,n) = d$. Karena $(m,n) = d$ jika dan hanya jika $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right) = 1$. Sehingga Bilangan bulat m dimasukkan ke kelas C_d jika dan hanya jika $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right) = 1$. Jadi diperoleh Banyaknya bilangan di dalam kelas C_d adalah sebanyak bilangan bulat positif tidak lebih dari $\frac{n}{d}$ dan relatif prima dengan $\frac{n}{d}$. Berdasarkan definisi 2.6.1 maka terdapat $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ buah bilangan dalam kelas C_d. Karena bilangan 1 sampai n dibagi ke dalam ke dalam kelas yang saling disjoin dan setiap bilangan hanya dimasukkan ke dalam tepat 1 kelas, maka jumlah elemen dari kelas-kelas yang berbeda adalah n. akibatnya $\sum_{d|n}\phi\left(\frac{n}{d}\right) = n$.
Karena d adalah sebarang bilangan yang membagi n, bilangan $\frac{n}{d}$ juga yang membagi n, maka $\sum_{d|n}\phi(d) = \sum_{d|n}\phi\left(\frac{n}{d}\right) = n$. ■

Teorema 4.1.4 [3]

Jika n bilangan bulat positif lebih besar dari 1, maka jumlah bilangan bulat positif tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n adalah $\frac{1}{2}n \cdot \phi(n)$.

Bukti

Misalkan $d_1, d_2, \dots, d_{\phi(n)}$ adalah bilangan-bilangan bulat positif tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n. Karena $(d,n) = 1$ jika dan hanya jika $(n-d,n) = 1$, maka bilangan-bilangan $n-d_1, n-d_2, \dots, n-d_{\phi(n)}$ sama dengan bilangan-bilangan $d_1, d_2, \dots, d_{\phi(n)}$. sehingga

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + \cdots + d_{\phi(n)} &= (n-d_1) + (n-d_2) + \cdots + (n-d_{\phi(n)}) \\ &= \phi(n)\cdot n - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{\phi(n)}) \end{aligned}$$

sehingga $\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\phi(n)}\right) = \frac{1}{2}n\phi(n)$.■

Teorema 4.1.5 [5]

Jika $n \geq 3$, maka $\phi(n)$ adalah bilangan genap.

Bukti

Misal $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ adalah faktorisasi prima dari n. Karena fungsi ϕ adalah fungsi multiplikatif maka $\phi(n) = \phi\left(p_1^{a_1}\right)\phi\left(p_2^{a_2}\right)\cdots\phi\left(p_k^{a_k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\phi\left(p_i^{a_i}\right)$. Berdasarkan teorema 4.1.1 diketahui bahwa $\phi\left(p_i^{a_i}\right) = p_i^{a_i-1}(p_i - 1)$. Karena diberikan $n \geq 3$ maka pasti memenuhi 1 dari 2 kondisi berikut. Kondisi 1, jika n memiliki faktor prima ganjil. Misal p_i adalah bilangan prima ganjil maka $\phi\left(p_i^{a_i}\right) = p_i^{a_i-1}(p_i - 1)$ adalah bilangan genap karena $(p_i - 1)$ genap, sehingga $\phi(n)$ juga adalah bilangan genap. Kondisi 2, Jika n tidak memiliki faktor prima ganjil maka $n = 2^j$ dengan $j \geq 2$. Sehingga $\phi\left(2^j\right) = 2^{j-1}(2-1) = 2^{j-1}$ juga bilangan genap. Akibatnya $\phi(n)$ adalah bilangan genap untuk $n \geq 3$. ■

Akibat 4.1.6 [5]
Jika n adalah bilangan bulat positif, maka peta dari n dibawah fungsi phi Euler adalah 1 atau bilangan genap, sehingga dipastikan tidak ada bilangan bulat x yang memenuhi $\phi(x) = 2t + 1, t \geq 1$.
Bukti
Diketahui $\phi(1) = \phi(2) = 1$ dan berdasarkan teorema 4.1.5 $\phi(n)$ adalah bilangan genap untuk $n \geq 3$. Sehingga peta dari n dibawah fungsi phi Euler adalah 1 atau bilangan genap. ∎
Teorema 4.1.7 [5]
Jika p adalah bilangan prima dengan $n = pm$, maka $\phi(n) = (p-1)\phi(m)$ untuk $(p, m) = 1$, dan $\phi(n) = p\phi(m)$ untuk $(p, m) \neq 1$.
Bukti
Jika $(p, m) = 1$ maka berdasarkan teorema 2.6.2 $\phi(n) = \phi(p)\phi(m) = (p-1)\phi(m)$. Jika $(p, m) \neq 1$, maka $(p, m) = p$. Karena $(p, m) = p$ maka berdasarkan definisi 2.2.1 $p|m$. Sehingga m dapat ditulis sebagai $p^a d$, dengan $a \geq 1$ dan $(p, d) = 1$. Karena $(p, d) = 1$ maka $(p^a, d) = (p^{a+1}, d) = 1$. Karena $(p^a, d) = 1$ maka berdasarkan teorema 2.6.2 dan teorema 4.1.1
$\phi(m) = \phi(p^a d) = \phi(p^a)\phi(d)$. Jadi $\phi(d) = \frac{\phi(m)}{\phi(p^a)} = \frac{\phi(m)}{(p^{a-1})(p-1)}$. Bilangan n dapat dijabarkan menjadi $n = pm = p(p^a d) = p^{a+1} d$. Karena $(p^{a+1}, d) = 1$ dengan p bilangan prima maka berdasarkan teorema 2.6.2, teorema 4.1.1 dan $\phi(d) = \frac{\phi(m)}{(p^{a-1})(p-1)}$ diperoleh

$$\phi(n) = \phi(p^{a+1} d) = \phi(p^{a+1})\phi(d) = (p^a)(p-1)\frac{\phi(m)}{(p^{a-1})(p-1)} = p\phi(m). \blacksquare$$

Akibat 4.1.8 [5]
Jika m adalah bilangan bulat positif, m adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika $\phi(2m) = \phi(m)$.
Bukti
($\Longrightarrow$) diketahui m adalah bilangan ganjil
Akan ditunjukkan $\phi(2m) = \phi(m)$
Karena m adalah bilangan ganjil maka $(2, m) = 1$. Sehingga $\phi(2m) = \phi(2)\phi(m) = 1 \cdot \phi(m) = \phi(m)$
($\Longleftarrow$) diketahui $\phi(2m) = \phi(m)$
Akan ditunjukkan m adalah bilangan ganjil
Andaikan m adalah bilangan genap maka $m = 2t$. Sehingga $(2, m) = 2 \neq 1$. Berdasarkan teorema 4.1.7, $\phi(2m) = 2\phi(m) \neq \phi(m)$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui, seharusnya m adalah bilangan ganjil. ∎
Teorema 4.1.9 [6]
Jika n memiliki faktor prima ganjil sebanyak k buah, maka $2^k | \phi(n)$.
Bukti
Karena n memiliki k faktor prima ganjil, maka n dapat ditulis sebagai $2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$ dengan $a \geq 0$ dan $b_i \geq 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$. Karena fungsi ϕ adalah fungsi multiplikatif maka $\phi(n) = \phi(2^a)\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2}) \cdots \phi(p_k^{b_k})$. Berdasarkan teorema 4.1.5 maka $\phi(p_i^{b_i})$ adalah bilangan genap untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, sehingga $2|\phi(p_i^{b_i})$. Karena $2|\phi(p_i^{b_i})$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, berdasarkan

teorema 2.1.2(1) maka $2^k|\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2})\cdots\phi(p_k^{b_k})$. Karena $2^k|\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2})\cdots\phi(p_k^{b_k})$, $2^k|0$ dan $\phi(2^a)$ adalah bilangan bulat maka berdasarkan teorema 2.1.2 (3)

$$2^k|\phi(2^a)\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2})\cdots\phi(p_k^{b_k})+\phi(2^a)\cdot 0$$

$\Rightarrow 2^k|\phi(2^a)\phi(p_1^{b_1})\phi(p_2^{b_2})\cdots\phi(p_k^{b_k}) \Rightarrow 2^k|\phi(n)$. ■

Teorema 4.1.10 [6]

Jika $m|n$ dengan m,n adalah bilangan positif maka $\phi(m)|\phi(n)$.

Bukti

Misal $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{a_r}$, karena $m|n$ maka berdasarkan teorema 2.3.2 $m=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{c_r}$ dimana $0\le c_i\le a_i$ untuk $i=1,2,..,r$. Misal $c_i=0$ untuk $i=1,2,\ldots,j$ dan $c_i\ge 1$ untuk $i=j+1,j+2,\ldots,r$ maka

$$m=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{c_j}p_{j+1}^{c_{j+1}}p_{j+2}^{c_{j+2}}\cdot\ldots\cdot p_r^{c_r}=p_1^0p_2^0\cdot\ldots\cdot p_j^0p_{j+1}^{c_{j+1}}p_{j+2}^{c_{j+2}}\cdot\ldots\cdot p_r^{c_r}$$
$$=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot p_{j+1}^{c_{j+1}}p_{j+2}^{c_{j+2}}\cdot\ldots\cdot p_r^{c_r}=p_{j+1}^{c_{j+1}}p_{j+2}^{c_{j+2}}\cdot\ldots\cdot p_r^{c_r}$$

Berdasarkan teorema 4.1.2

$\phi(n)=(p_1^{a_1-1})\ldots(p_r^{a_r-1})(p_1-1)\ldots(p_r-1)=\prod_{i=1}^r(p_i^{a_i-1})\prod_{i=1}^r(p_i-1)$

dan

$$\phi(m)=\left(p_{j+1}^{c_{j+1}-1}\right)\ldots\left(p_r^{c_r-1}\right)\left(p_{j+1}-1\right)\ldots(p_r-1)=\prod_{i=j+1}^{r}(p_i^{c_i-1})\prod_{i=j+1}^{r}(p_i-1)$$

Maka $\frac{\phi(n)}{\phi(m)}=\frac{\prod_{i=1}^r(p_i^{a_i-1})\prod_{i=1}^r(p_i-1)}{\prod_{i=j+1}^r(p_i^{c_i-1})\prod_{i=j+1}^r(p_i-1)}$

$$=\prod_{i=1}^j(p_i^{a_i-1})\prod_{i=j+1}^r(p_i^{(a_i-1)-(c_i-1)})\prod_{i=1}^j(p_i-1)$$
$$=\prod_{i=1}^j(p_i^{a_i-1})\prod_{i=j+1}^r(p_i^{(a_i-c_i)})\prod_{i=1}^j(p_i-1)$$

Karena $0\le c_i\le a_i$ untuk $i=1,2,..,j+1,j+2,\ldots,r$ maka $a_i-c_i\ge 0$. Sehingga $\prod_{i=1}^j(p_i^{a_i-1})\prod_{i=j+1}^r(p_i^{(a_i-c_i)})\prod_{i=1}^j(p_i-1)=\frac{\phi(n)}{\phi(m)}$ bilangan bulat. Karena $\frac{\phi(n)}{\phi(m)}$ bilangan bulat maka berdasarkan definisi 2.1.1 $\phi(m)|\phi(n)$.■

Teorema 4.1.11 [6]

Jika $(a,b)=d$ dan $[a,b]=c$ maka $\phi(a)\phi(b)=\phi(d)\phi(c)$

Bukti

Misalkan P_j adalah himpunan bilangan prima yang membagi a, dan P_k adalah himpunan bilangan prima yang membagi b. Jika $p_d\in(P_j\cap P_k)$ dan $p_c\in(P_j\cup P_k)$ maka $p_d|d$ dan $p_c|c$. Karena $n(P_j)+n(P_k)=n(P_j\cup P_k)+n(P_j\cap P_k)$ dan juga elemen pada himpunan tersebut saling identik maka

$\prod_{p_j\in P_j}(\frac{p_j-1}{p_j})\prod_{p_k\in P_k}(\frac{p_k-1}{p_k})=\prod_{p_d\in(P_j\cap P_k)}(\frac{p_d-1}{p_d})\prod_{p_c\in(P_j\cup P_k)}(\frac{p_c-1}{p_c})$

Berdasarkan teorema 2.4.2 $ab=(a,b)[a,b]=dc$, jadi

$\phi(a)\phi(b)=a\prod_{p_j\in P_j}(\frac{p_j-1}{p_j})b\prod_{p_k\in P_k}(\frac{p_k-1}{p_k})=ab\prod_{p_j\in P_j}(\frac{p_j-1}{p_j})\prod_{p_k\in P_k}(\frac{p_k-1}{p_k})$

$$=dc\prod_{p_d\in(P_j\cap P_k)}(\frac{p_d-1}{p_d})\prod_{p_c\in(P_j\cup P_k)}(\frac{p_c-1}{p_c})$$

$=d\prod_{p_d\in(P_j\cap P_k)}(\frac{p_d-1}{p_d})\ c\prod_{p_c\in(P_j\cup P_k)}(\frac{p_c-1}{p_c})=\phi(d)\phi(c)$. ■

Teorema 4.2.1 [5]

Setiap himpunan tak kosong $\phi^{-1}(m)$,maka $\phi^{-1}(m)$ terbatas ke atas dan terbatas ke bawah

Bukti

Misalkan untuk sebarang $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = n \in \phi^{-1}(m)$, maka $\phi(n) = m$. Berdasarkan definisi 2.6.1 $\phi(n)$ tidak lebih dari n. Sehingga $\phi(n) \leq n \Rightarrow m \leq n$. Karena $m \leq n$ maka berdasarkan definisi 2.7.1 m adalah batas bawah dari $\phi^{-1}(m)$. Karena $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = n$ maka berdasarkan teorema 4.1.2

$m = \phi(n) = p_1^{a_1 - 1} p_2^{a_2 - 1} \cdots p_k^{a_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1)$

Sehingga jika diberikan n dan $p|n$ maka $(p-1)|m$. Namun jika diberikan m dan $(p-1)|m$ belum dapat dipastikan $p|n$. contohnya $\phi(7) = 6$, diketahui $(3-1)|6$ namun $3 \nmid 7$. Akibatnya $\prod_{p|n}(\frac{p}{p-1}) \leq \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$.

$\frac{n}{\phi(n)} = \frac{1}{\prod_{p|n}(\frac{p-1}{p})} = \prod_{p|n}(\frac{p}{p-1}) \leq \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$

Sehingga $n \leq \phi(n) \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1}) = m \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$

Karena $n \leq m \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$ maka berdasarkan definisi 2.7.1 $m \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$ adalah batas atas dari $\phi^{-1}(m)$. Jadi $\phi^{-1}(m)$ terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. ■

Akibat 4.2.2 [5]

Jika q adalah elemen ganjil terbesar dari himpunan $\phi^{-1}(m)$, maka

$$q \leq \frac{m}{2} \prod_{(p-1)|m} (\frac{p}{p-1})$$

Bukti

Karena $q \in \phi^{-1}(m)$ maka $\phi(q) = m$. Berdasarkan akibat 4.8 jika q ganjil maka $\phi(2q) = \phi(q) = m$. Sehingga $2q \in \phi^{-1}(m)$. Berdasarkan teorema 4.12, $2q \leq m \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$. Sehingga $q \leq \frac{m}{2} \prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$. ■

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari penilitian ini adalah

1. Sifat-sifat fungsi phi Euler terkandung dalam teorema berikut:
   a. Jika p bilangan prima, k bilangan bulat positif maka
   $$\phi(p^k) = (p^{k-1})(p-1)$$
   b. Jika $r_1^{a_1} r_2^{a_2} \cdots r_k^{a_k}$ adalah faktorisasi prima dari bilangan bulat positif h. maka
   $$\begin{aligned} \phi(h) &= (r_1^{a_1 - 1})(r_2^{a_2 - 1}) \ldots (r_k^{a_k - 1})(r_1 - 1)(r_2 - 1) \ldots (r_k - 1) \\ &= h\left(1 - \frac{1}{r_1}\right)\left(1 - \frac{1}{r_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r_k}\right) \\ &= h \prod_{r|h}(\frac{r-1}{r}) \end{aligned}$$
   c. Jika n bilangan bulat positif dan d faktor positif n maka $\sum_{d|n} \phi(d) = n$
   d. Jika n bilangan bulat positif lebih besar dari 1, maka jumlah bilangan bulat positif tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n adalah $\frac{1}{2} n \cdot \phi(n)$
   e. Jika $n \geq 3$ maka $\phi(n)$ adalah bilangan genap

f. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif maka peta dari n dibawah fungsi phi Euler adalah 1 atau bilangan genap

g. Jika p adalah bilangan prima dengan $n = pm$, maka $\phi(n) = (p-1)\phi(m)$ untuk $(p,m) = 1$, dan $\phi(n) = p\phi(m)$ untuk $(p,m) \neq 1$

h. Jika m bilangan bulat positif, maka m adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika $\phi(2m) = \phi(m)$

i. Jika n memiliki faktor prima ganjil sebanyak k buah, maka $2^k|\phi(n)$

j. Jika $m|n$ dengan m, n adalah bilangan positif maka $\phi(m)|\phi(n)$

k. Jika FPB $(a,b) = d$ dan KPK $[a,b] = c$ maka $\phi(a)\phi(b) = \phi(d)\phi(c)$

2. Batas bawah dan batas atas prapeta bilangan positif m di bawah fungsi phi Euler adalah sebagai berikut:

a. m adalah batas bawah dari $\phi^{-1}(m)$

b. $m\prod_{(p-1)|m}(\frac{p}{p-1})$ adalah batas atas dari $\phi^{-1}(m)$ dengan p adalah bilangan prima

c. Jika q adalah elemen ganjil terbesar dari himpunan $\phi^{-1}(m)$, maka

$$q \leq \frac{m}{2} \prod_{(p-1)|m} \left(\frac{p}{p-1}\right)$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Apostol, T.M. *Introduction to analytic Number Theory*. California Institu of Tecnology. United States of America.

[2] Bartle & Sherbet. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. Hamilton: United State of America.

[3] Burton, D. M. 2011. *Elementary Number Theory Seventh Edition*. McGraw Hill: New York.

[4] Coppel, W. R. 2006. *Number theory An Introduction To Mathematics: Part A*. New York: United Stated of America.

[5] Gupta, H. 1981. *Euler's totient function and its inverse*. Indian J. Pure appl. Math., 12(1): 22-30.

[6] Rosen. K. H. 2005. *Elementary Number Theory And Its Aplication Fifth Edition*. AT&T Laboratories: United States of America.