R-SUBGRUP NORMAL *FUZZY NEAR-RING*

Saman Abdurrahman

E*mail*: samunlam@gmail.com
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru

ABSTRAK

Dalam tulisan ini akan dibahas R-subgrup normal fuzzy near-ring, dengan pendekatan R_μ dan $\mu^*(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0_R)$, untuk setiap $x \in R$.
Kata kunci: *Near-ring, R-subgrup, R-subgrup fuzzy*

1. PENDAHULUAN

Near-ring merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa aksioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada near-ring. Operasi pertama (*aditif*) pada near-ring sebarang tidak harus komutatif, dan terhadap operasi pertama (*aditif*) dan kedua (*multiplikatif*), cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Seiring dengan perkembangan zaman, penelitian pada near-ring tidak hanya berkisar pada strukturnya tetapi mulai memadukan dengan teori lain, diantaranya dengan himpunan fuzzy yang diperkenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965.

Abou-Zaid (1991) melakukan fuzzyfikasi pada struktur near-ring, sehingga melahirkan definisi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, ideal fuzzy near-ring yang meliputi ideal prima fuzzy dan mendefinisikan ideal yang dibangun oleh satu elemen di near-ring secara detail.

Penelitian yang dilakukan oleh Abou-Zaid, melahirkan ide bagi penulis yaitu melakukan fuzzyfikasi pada struktur R-subgrup near-ring dengan pendekatan R_μ dan $\mu^*(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0_R)$, untuk setiap $x \in R$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring, R-subgrup near-ring, dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan R-subgrup normal fuzzy near-ring.

Definisi 2.1. *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner + dan · disebut near-ring jika memenuhi:*

(1) $(R, +)$ *adalah grup* (*tidak harus grup komutatif*),

(2) $(R, \cdot)$ *adalah semigrup,*

(3) *untuk setiap x,y,z∈R berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri*

(i). *distributif kanan* : $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$

(ii). *distributif kiri* : $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, *x·y* adalah *xy*.

Berikut ini, diberikan definisi dari R-subgroup near-ring

Definisi 2.2. *Subset H dari near-ring R disebut R-subgrup di R, jika memenuhi:*
(1). $(H,+)$ *adalah subgrup* $(R,+)$,
(2). $RH \subset I$
(3). $HR \subset I$.

Jika subset *H* di R memenuhi kondisi (1) dan (2) disebut *R-subrup kiri* di *R*, sedangkan subset *H* di R memenuhi kondisi (1) dan (3) disebut *R-subrup kanan* di R.

Definisi 2.3. *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan* μ *disebut subset fuzzy di X jika* $\mu : X \to [0,1]$. *Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy di X dinotasikan dengan* $\mathbb{F}(X)$ *dan Image dari* μ *dinotasikan dengan* $\mathrm{Im}(\mu) := \{\mu(x) \mid x \in X\}$.

Definisi 2.4. *Diberikan sebarang* $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$, *maka*
(1) $\mu = \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu(x) = \upsilon(x)$ *untuk setiap* $x \in X$,
(2) $\mu \subseteq \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu(x) \leq \upsilon(x)$ *untuk setiap* $x \in X$,
(3) $(\mu \cap \upsilon)(x) := min\{\mu(x), \upsilon(x)\}$ *untuk setiap* $x \in X$.

Definisi 2.5. *Diberikan* $\mu \in \mathbb{F}(X)$ *dan* $t \in [0,1]$. *Level subset* (*t-cut*) *di* μ *dinotasikan dengan* μ_t *yang didefinisikan dengan,* $\mu_t := \{x \in R \mid \mu(x) \geq t\}$.

Lemma 2.6. *Diberikan sebarang sebarang* $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$, *maka*
(1) $\mu \subseteq \upsilon$ *maka* $\mu_a \subseteq \upsilon_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$
(2) $a \leq b$ *maka* $\mu_b \subseteq \mu_a$ *untuk setiap* $a,b \in [0,1]$
(3) $\mu = \upsilon$ *jika dan hanya jika* $\mu_a = \upsilon_a$ *untuk setiap* $a \in [0,1]$

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan near-ring, ideal near-ring, near-ring fuzzy dan ideal fuzzy near-ring. Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang near-ring, subnear-ring, R-subrup near-ring. Konsep-konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu untuk memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, dan R-subgrup fuzzy near-ring.

Setelah memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, dan R-subgrup fuzzy near-ring, dibuktikan beberapa lemma dan teorema yang terkait dan ditentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat baru, yang mendukung pada pembahasan hubungan antara R-subgrup near-ring dan R-subgrup fuzzy near-ring.

Langkah terakhir, dengan menggunakan lemma-lemma dan teorema-teorema yang saling terkait, maka diperoleh hubungan antara R-subgrup near-ring dan R-subgrup fuzzy near-ring.

4. NORMAL FUZZY R-SUBGRUP NEAR-RINGS

Definisi 4.1. *Diberikan near-ring R dan* $\mu \in \mathbb{F}(R)$. *Pemetaan* μ *disebut subnear-ring fuzzy di R jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku*:
(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, *dan*
(2) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Definisi 4.2. *Diberikan near-ring R dan* $\mu \in \mathbb{F}(R)$. *Pemetaan* μ *disebut R-subgrup fuzzy di R jika untuk setiap $x, y, r \in R$ berlaku*:
(1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
(2) $\mu(xr) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, *dan*
(3) $\mu(rx) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Jika $\mu \in \mathbb{F}(R)$ memenuhi kondisi (1) dan (2) disebut *R-subrup fuzzy kanan* di *R*, sedangkan $\mu \in \mathbb{F}(R)$ memenuhi kondisi (1) dan (3) disebut *R-subrup fuzzy kiri* di R. Selanjutnya yang dimaksud *R-subrup fuzzy* adalah *R-subrup fuzzy kanan*, kecuali ada keterangan lebih lanjut.

Contoh 4.3. Diberikan $R := \{a, b, c, d\}$ adalah near-ring terhadap operasi + dan · yang didefinisikan pada table Cayley berikut:

+	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*a*	*d*	*c*
c	*c*	*d*	*b*	*a*
d	*d*	*c*	*a*	*b*

·	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*a*	*a*	*a*
b	*a*	*a*	*a*	*a*
c	*a*	*a*	*a*	*a*
d	*a*	*a*	*b*	*b*

Misalkan μ: $R \to [0, 1]$ adalah subset fuzzy di R dengan $\mu(c) = \mu(d) < \mu(b) < \mu(a)$. Maka dapat ditunjukkan μ adalah *R-subrup fuzzy* di R.

Lemma 4.4. *Jika* μ *subnear-ring fuzzy di R, maka* $\mu(0_R) \geq \mu(x)$ *untuk setiap* $x \in R$.

Teorema 4.5. *Jika* μ *adalah R-subgrup fuzzy di near-ring R dan* $R_\mu := \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$, *maka* R_μ *adalah R-subgrup di R.*

Bukti:

Misalkan μ adalah R-subgrup fuzzy di R. Akan dibuktikan R_μ adalah R-subgrup di R.

$R_\mu := \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$, maka $0_R \in R_\mu$ sehingga $R_\mu \neq \emptyset$ dan $R_\mu \subseteq R$.

Diambil sebarang $x, y \in R_\mu$ dan $z \in R$, maka $\mu(x) = \mu(y) = \mu(0_R)$.

Mengingat μ adalah R-subgrup fuzzy di R maka,

1) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = \mu(0_R)$, sedangkan menurut Lemma 4.4, $\mu(0_R) \geq \mu(x-y)$, sehingga $\mu(x-y) = \mu(0_R)$ yang mengakibatkan $x - y \in R_\mu$, dengan kata lain $(R_\mu, +)$ subgrup di $(R, +)$.
2) $\mu(xz) \geq \mu(x) = \mu(0_R)$, dan menurut Lemma 4.4, $\mu(0_R) \geq \mu(xy)$, sehingga $\mu(xy) = \mu(0_R)$, yang mengakibatkan $xy \in R_\mu$, dengan kata lain $R_\mu R \subseteq R_\mu$.

Jadi, R_μ adalah R-subgrup di R. ■

Definisi 4.6. *Diberikan R-subgrup fuzzy* μ *di near-ring R. Pemetaan* μ *disebut normal jika ada* $x \in R$ *sedemikian hingga* $\mu(0_R) = 1$ *dan himpunan semua R-subgrup normal fuzzy di near-ring R dinotasikan dengan* $\mathbb{F}_N(R)$.

Teorema 4.7. *Jika* $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}_N(R)$ *dan* $\mu \subseteq \upsilon$, *maka* $R_\mu \subseteq R_\nu$.

Lemma 4.8. *Jika A adalah R-subgrup di near-ring* R, *maka* χ_A *adalah R-subgrup normal fuzzy di* R *dan* $R_{\chi_A} = A$.

Lemma 4.9. *Jika A dan B adalah R-subgrup di near-ring* R. *Maka* $A \subseteq B$ *jika dan hanya jika* $\chi_A \subseteq \chi_B$.

Lemma 4.10. *Jika* μ *dan* υ *adalah R-subgrup normal fuzzy di R, maka* $\mu \cap \upsilon$ *adalah R-subgrup normal fuzzy di* R.

Bukti:

Misalkan μ dan υ adalah R-subgrup normal fuzzy di R. Akan dibuktikan $\mu \cap \upsilon \in \mathbb{F}_N(R)$.

Diambil sebarang $x, y \in R$, maka

a) $$\begin{aligned}(\mu \cap \upsilon)(x-y) &= \min\{\mu(x-y), \upsilon(x-y)\}\\ &\geq \min\{\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}\}\\ &= \min\{\mu(x), \upsilon(x), \mu(y), \upsilon(y)\}\\ &= \min\{\min\{\mu(x), \upsilon(x)\}, \min\{\mu(y), \upsilon(y)\}\}\\ &= \min\{(\mu \cap \upsilon)(x), (\mu \cap \upsilon)(y)\}.\end{aligned}$$

   Jadi, $(\mu \cap \upsilon)(x-y) \geq \min\{(\mu \cap \upsilon)(x), (\mu \cap \upsilon)(y)\}$.

b) $$\begin{aligned}(\mu \cap \upsilon)(xy) &= \min\{\mu(xy), \upsilon(xy)\}\\ &\geq \min\{\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}\}\\ &= \min\{\mu(x), \upsilon(x), \mu(y), \upsilon(y)\}\\ &= \min\{\min\{\mu(x), \upsilon(x)\}, \min\{\mu(y), \upsilon(y)\}\}\\ &= \min\{(\mu \cap \upsilon)(x), (\mu \cap \upsilon)(y)\}.\end{aligned}$$

   Jadi, $(\mu \cap \upsilon)(xy) \geq \min\{(\mu \cap \upsilon)(x), (\mu \cap \upsilon)(y)\}$.

c) $(\mu \cap \upsilon)(0_R) = \min\{\mu(0_R), \upsilon(0_R)\} = \min\{1,1\} = 1$.

   Jadi, $(\mu \cap \upsilon)(0_R) = 1$.

Jadi, $\mu \cap \upsilon$ adalah R-subgrup normal fuzzy di R. ■

Lemma 4.11. *Diberikan R-subgrup fuzzy* μ *di near-ring* R *dan* $\mu^* \in \mathbb{F}(R)$ *yang didefinisikan dengan,* $\mu^*(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0_R)$, *untuk setiap* $x \in R$. *Maka* μ^* *adalah R-subgrup normal fuzzy di* R *dan* $\mu \subseteq \mu^*$.

Lemma 4.12. *Diberikan R-subgrup fuzzy* μ *di near-ring* R. *Jika* $\mu^*(x) = 0$ *untuk suatu* $x \in R$, *maka* $\mu(x) = 0$.

Lemma 4.13. *Diberikan R-subgrup fuzzy* μ *di near-ring* R. *Maka* μ *adalah normal jika dan hanya jika* $\mu = \mu^*$.

Definisi 4.14. *Diberikan* μ *adalah R-subgrup fuzzy di near-ring* R. *Pemetaan* μ *disebut maksimal jika memenuhi kondisi:*
(1) μ *tidak konstan,*
(2) μ^* *adalah elemen maksimal di* $(\mathbb{F}_N(R), \subseteq)$.

Lemma 4.15. *Diberikan* $\mu \in \mathbb{F}_N(R)$ *dengan* μ *elemen maksimal yang tidak konstan di* $(\mathbb{F}_N(R), \subseteq)$. *Maka nilai keanggotaan dari* μ *adalah* 0 *dan* 1.
Bukti:
Misalkan $\mu \in \mathbb{F}_N(R)$ dengan μ elemen maksimal yang tidak konstan di $(\mathbb{F}_N(R), \subseteq)$
Akan dibuktikan nilai keanggotaan dari μ adalah 0 dan 1.
Mengingat $\mu \in \mathbb{F}_N(R)$, maka $\mu(0_R) = 1$.
Misalkan $\mu(a) \neq 1$ untuk suatu $a \in R$.
Klaim $\mu(a) = 0$.
Andaikan $\mu(a) \neq 0$ maka $0 < \mu(a) < 1$.
Didefinisikan subset fuzzy $\upsilon : R \rightarrow [0,1]$ dengan $\upsilon(x) := \frac{\mu(x)+\mu(a)}{2}$ untuk setiap $x \in R$ dan dapat ditunjukkan υ well-defined.
Akan ditunjukkan υ adalah R-subgrup fuzzy di R.
Diambil sebarang $x, y \in R$, maka

a) $\upsilon(x-y) = \frac{\mu(x-y)+\mu(a)}{2}$
$\geq \frac{min\{\mu(x),\mu(y)\}+\mu(a)}{2} = \frac{min\{\mu(x)+\mu(a),\mu(y)+\mu(a)\}}{2}$
$= \min\{\frac{\mu(x)+\mu(a)}{2}, \frac{\mu(y)+\mu(a)}{2}\}$
$= \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$

b) $\upsilon(xy) = \frac{\mu(xy)+\mu(a)}{2} \geq \frac{min\{\mu(x),\mu(y)\}+\mu(a)}{2} = \frac{min\{\mu(x)+\mu(a),\mu(y)+\mu(a)\}}{2}$
$= \min\{\frac{\mu(x)+\mu(a)}{2}, \frac{\mu(y)+\mu(a)}{2}\} = \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$

Jadi υ adalah R-subgrup fuzzy di R, yang yang mengakibatkan $\upsilon^*(0_R) = 1$.
Dari sini maka,
$\upsilon^*(b) = \upsilon(b) + 1 - \upsilon(0_R)$ untuk setiap $b \in R$
$= \frac{\mu(b)+\mu(a)}{2} + 1 - \frac{\mu(0_R)+\mu(a)}{2} = \frac{\mu(b)+\mu(a)}{2} + 1 - \frac{1+\mu(a)}{2} = \frac{\mu(b)+1}{2} \geq \mu(b)$
dan $\upsilon^*(b) \leq 1 = \frac{\mu(0_R)+1}{2} = \upsilon^*(0_R)$. Akibatnya $\upsilon^*(0_R) \geq \upsilon^*(b) \geq \mu(b)$.

Jadi, υ^* tidak konstan dan $\mu \subseteq \upsilon^*$.

Mengingat $\mu \subseteq \upsilon^*$ dan $\mu, \upsilon^* \in \mathbb{F}_N(R)$, maka μ bukan elemen maksimal di $(\mathbb{F}_N(R), \subseteq)$. Ini kontradiksi dengan μ elemen maksimal di $(\mathbb{F}_N(R), \subseteq)$, sehingga pengandain salah, seharusnya $\mu(a) = 0$ untuk suatu $a \in R$. Dengan kata lain nilai keanggotaan dari μ adalah 0 dan 1. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian, maka dapat diambil kesimpulan bahwa, jika μ adalah R-subgrup fuzzy di near-ring R, maka R_μ adalah R-subgrup di R.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abou-Zaid. S, 1991, *On fuzzy subnear-rings and ideals*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 44, pp. 139-146.

[2]. Clay. J.R, 1992, *Nearrings, geneses and applications*, Oxford, New York.

[3]. Kandasamy. W.B.V, 2002, *Smarandache near-rings*, American Research Press Rehoboth.

[4]. Kandasamy. W.B.V, 2003, *Smarandache fuzzy algebra*, American Research Press Rehoboth.

[5]. Kim. S.D. and Kim. H.S, 1996, *On fuzzy ideals of near-rings*, Bull. Korean Math. Soc, vol. 33, no. 4, pp. 593-601.

[6]. Mordeson, J.N, Malik D.S and Kuroki. N, 2003, *Fuzzy semigroup*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[7]. Mordeson, J.N, Bhutani. K.R. and Rosenfeld. A, 2005, *Fuzzy group theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[8]. Pilz. G, 1983, *Near-ring, the theory and applications* 2^{nd} ed., North-Holland Mathematict Studies, vol. 23, North-Holland, Amsterdam.

[9]. Young. C L and Cang K H, 1999, *Another Normal fuzzy R-subgrup in near-ring,* Journal of the chungcheong mathematical society, vol 12, pp. 163-168.