Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.10 No.1 (2016) Hal. 14-20

POLINOMIAL CHEBYSHEV PADA SYARAT BATAS SERAP GELOMBANG AKUSTIK DUA DIMENSI

Mohammad Mahfuzh Shiddiq
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
E-mail: mmahfuzhs@unlam.ac.id

Abstrak

Masalah syarat batas pada persamaan gelombang mempunyai banyak jenis dan metode penyelesaian. Salah satu masalah syarat batas adalah syarat batas serap pada persamaan gelombang. Syarat batas serap ini muncul sebagai akibat domain natural pada permasalah perambatan gelombang tidak terbatas dan membutuhkan perhitungan yang besar. Metode penyelesaian secara numerik tidak bisa dihindari pada persamaan gelombang jenis ini. Solusi numerik yang akan dibahas pada makalah ini adalah dengan mendekati solusi masalah perambatan gelombang akustik dua dimensi dengan menggunakan polinomial chebyshev. Beberapa perbandingan hasil solusi dengan mengg8unakan pendekatan yang lain yang sudah dikerjakan juga diberikan sehingga menunjukkan efektifitas solusi mana yang lebih baik.

Kata kunci: Polinomial Chebyshev, Solusi Numerik, Gelombang Akustik dua dimensi

1. PENDAHULUAN

Masalah perambatan gelombang sangat menarik untuk diteliti. Hal ini menjadi dasar teori pada cabang ilmu aplikasi yang menggunakan gelombang sebagai alat. Salah satu bidang yang menggunakan adalah pemodelan gelombang air laut, tsunami, geofisika, seismik, pencitraan medik dan lain sebagainya [5,3]. Pemodelan perambatan gelombang biasa menggunakan domain natural yang tidak terbatas serta melibatkan perhitungan yang besar. Hal ini menyebabkan banyak peneliti menggunakan syarat batas buatan untuk menyederhanakan tapi masih bisa dipakai mensimulasikan keadaan sebenarnya [1,4] Syarat batas buatan pada perambatan gelombang untuk mengatasi permasalahan tersebut diantaranya adalah syarat batas serap. Syarat batas serap ini memungkinkan gelombang merambat di domain yang terbatas akan meneruskan perambatannya di batas-batas domain, dengan kata lain meminimkan gelombang pantulan di batas domain atau bahkan menghilangkan gelombang pantulan di batas.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Shiddiq [7] telah menunjukkan bahwa pada masalah perambatan gelombang akustik dua dimensi bisa meminimalkan gelombang pantul di batas domain. Selanjutnya Shiddiq [8] menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan pendekatan numerik dengan menggunakan persamaan beda hingga. Beberapa peneliti yang lain juga pernah melakukan dengan pendekatan yang berbeda [2,10] Pada paper ini akan ditentukan solusi dari masalah pada Shiddiq [7] dengan pendekatan numerik dan memakai polynomial Chebysev untuk mendekati syarat batas serap yang didefinisikan pada masalah perambatan gelombang.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan gelombang akustik adalah tipe gelombang longitudinal yang merambat dengan kompresi dan dekompresi adibiatik. Persamaan gelombang merambat dengan kecepatan suara yang bergantung pada media dimana gelombang tersebut merambat. Hal ini terjadi misalkan pada defraksi, refleksi dan interfensi.

Misalkan diberikan persamaan gelombang dua dimensi sebagai berikut

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1}$$

Didefinisikan di dalam media terbatas $\widetilde{D}=\{(x,y,t)|-L\le x\le L, 0\le y\le M, 0\le t\le T\}$ dan $c=\omega/k$ menotasikan kecepatan di media, ω adalah frekuensi sudut dan k adalah bilangan gelombang. Persamaan gelombang (1) dengan nilai awal

$$u(x,y,0)=F(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=0 \tag{2}$$

Masalah nilai awal persamaan gelombang (1) dan (2) dilengkapi dengan syarat batas Dirichlet, yaitu

$$u(\pm L,y,t)=0,\ u(x,M,t)=0$$

atau syarat batas Neumann, yaitu

$$\frac{\partial u(\pm L,y,t)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u(x,M,t)}{\partial y}=0$$

menghasilkan gelombang pantul pada batas dengan amplitudo sama dengan gelombang datang, yaitu koefisien pantul sama dengan 1. Koefisien pantul ini didapatkan dari mensubtitusikan solusi dari persamaan gelombang (1), yaitu

$$u=e^{i(\omega t-kx\cos\theta\pm ky\sin\theta)}+Re^{i(\omega t+kx\cos\theta\pm ky\sin\theta)},\qquad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

dengan θ adalah sudut diantara bidang gelombang dengan sumbu x dan R adalah koefisien pantul.

Polinomial Chebyshev memiliki banyak macam dan jenis. Salah satunya adalah polinomial jenis pertama dan kedua, $T_n(x)$ dan $U_n(x)$. Polinomial Chebyshev jenis pertama biasa digunakan untuk fungsi yang didefinisikan di dalam interval $[-1,1]$. Sedangkan untuk polinomial Chebyshev jenis kedua digunakan untuk interval yang lebih umum, yaitu $[a,b]$.

Definisi 1 Polinomial *Chebyshev* $T_n(x)$ *jenis pertama adalah polinomial dalam* x *dengan derajat* n *dan didefinisikan dengan*

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad ketika \;\; x = \cos\theta \tag{4}$$

Jika nilai x berada di dalam interval $[-1,1]$ maka nilai variabel θ berada di dalam interval $[0,\pi]$. Berdasarkan persamaan (4) maka dapat dilihat empat polinomial Chebyshev pertama sebagai berikut

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \; T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \cdots$$

Polinomial Chebyshev juga bisa didefinisikan secara rekursif jika dilihat dari (4) dan sifat identitas trigonometri, yaitu sebagai berikut

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2,3,\ldots,$$

dengan nilai awal

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

[6].

Pendekatan polinomial dengan derajat n untuk fungsi kontinu $f(x)$ yang diberikan pada $[-1,1]$ adalah dengan menginterpolasi diantara nilai dari $f(x)$ di $n+1$ titik yang dipilih secara benar di dalam interval $[-1,1]$. Misalkan untuk interpolasi di titik

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$$

dengan polinomial

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

dibutuhkan

$$c_0 + c_1 x_k + \cdots + c_n x_k^n = f(x_k), \qquad (k = 1,\ldots,\mathrm{n}+1)$$

Sedangkan pilihan yang baik dalam interpolasi titik untuk menjamin kekonvergenan seragam adalah himpunan *zeroes* dari polinomial Chebyshev $T_{n+1}(x)$, yaitu

$$x = x_k = \cos\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+1}, \qquad (k = 1,\ldots,n=1) \tag{5}$$

Jadi polinomial derajat n, $p_n(x)$, menginterpolasi $f(x)$ di dalam titik (5) dalam bentuk jumlahan polinomial Chebyshev adalah sebagai berikut

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x)$$

dengan koefisien c_i diberikan oleh

$$c_i = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f\left(x_k\right)T_i\left(x_k\right)$$

Teorema 2. *Jika* $f\left(x\right)$ *adalah sebarang fungsi di dalam interval* $\left[-1,1\right]$ *dan jika koefisien* $c_j,\ j = 0,1,\ldots,n-1$ *didefinisikan dengan*

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right)T_j\left(x_k\right) \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi j\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n}\right) \end{aligned}$$

Maka formula aproksimasi fungsi $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right) \approx \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k\left(x\right)\right] - \frac{1}{2}c_0$$

adalah eksak untuk x *sama dengan ke semua* n *zeroes* $T_n\left(x\right)$.

3. PEMBAHASAN

Tinjau kembali persamaan gelombang pada (1), yaitu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

dengan salah satu kelas dari solusi (1) yang direpresentasikan oleh gelombang yang merambat ke kanan diberikan oleh

$$u = e^{i\left(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta\right)} + Re^{i\left(\omega t + kx\cos\theta \pm ky\sin\theta\right)}$$

Jika variabel $\left(y,t\right)$ dibuat tetap, maka salah satu syarat batas orde satu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\cos\theta\right)u\bigg|_{x=L} = 0 \qquad (6)$$

akan menyebabkan gelombang diteruskan pada batas $x = L$ dan semua gelombang (3) tidak menghasilkan gelombang pantul, yaitu $R = 0$.

Pada kasus yang umum, tidak mungkin mendesain syarat batas sedemikian sehingga pantulan tidak terjadi, sehingga syarat batas yang mungkin dikontruksi adalah syarat batas yang mereduksi sebanyak mungkin sejumlah pantulan yang terjadi. Oleh karena itu, akan dicari dan ditaksir syarat batas pada (6) sedemikian sehingga koefisien pantul dapat dibuat seminim mungkin atau dengan kata lain amplitudo gelombang pantul mendekati nol.

Ambil simbol syarat batas pada (6) yang diberikan dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} + ik\cos\theta = \frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1-\sin^2\theta} \tag{7}$$

Jika menggunakan aproksimasi polinomial Chebyshev derajat nol untuk fungsi akar pangkat dua yaitu $\sqrt{1-x} = 1$ maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\partial}{\partial x} + ik$$

dengan mengingat bahwa $ik = \frac{1}{c} i\omega$ berkaitan dengan $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ sehingga didapatkan *hampiran pertama syarat batas serap*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0 \tag{8}$$

Selanjutnya akan ditentukan koefisien pantul dari syarat batas serap (8) dengan mensubstitusikan ke (3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]u &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)} + Re^{i(\omega t + kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)} + Re^{i(\omega t + kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)}\right) \\ 0 &= ik\cos\theta\left(-e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)} + Re^{i(\omega t + kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)}\right) + \\ &\quad \frac{i\omega}{c}\left(e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)} + Re^{i(\omega t + kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)}\right) \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan ik dan didapatkan

$$|R| = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = R_1(\theta) \tag{9}$$

Syarat batas serap (8) dapat diketahui bahwa bekerja hanya pada kasus satu dimensi. Jadi akan ditentukan lagi syarat batas hampiran dengan menggunakan derajat yang lebih tinggi.

Jika ditinjau kembali aproksimasi polinomial Chebyshev derajat satu untuk fungsi yaitu $\sqrt{1-x} = 0.9239 - 0.5412x$ maka dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1-\sin^2\theta} &= \frac{\partial}{\partial x} + ik\left(0.9239 - 0.5412\sin^2\theta\right) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x} + 0.9239ik - 0.5412\,ik\sin^2\theta \\ 0 &= ik\frac{\partial}{\partial x} - 0.9239k^2 + 0.5412\,k^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

Diketahui bahwa ik, $-k^2$ dan $-k^2\sin^2\theta$ berturut-turut berkaitan dengan $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ dan $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sehingga menghasilkan *hampiran kedua syarat batas serap*

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+0.9239\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-0.5412\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0 \tag{10}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (10) ke dalam persamaan (3) diperoleh rumusan koefisien pantul sebagai berikut

$$|R|=\frac{\cos\theta-0.9239+0.5412\sin^2\theta}{\cos\theta+0.9239-0.5412\sin^2\theta}=R_2(\theta) \tag{11}$$

Jika ditinjau kembali aproksimasi polinomial Chebyshev derajat dua untuk fungsi akar kuadrat, yaitu

$$\sqrt{1-x}=0.9107-0.5774x-0.0893\left(2x^2-1\right)=1-0.5774x-0.1786x^2$$

dan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}+ik\sqrt{1-\sin^2\theta}&=\frac{\partial}{\partial x}+ik\left(1-0.5774\sin^2\theta-0.1786\sin^4\theta\right)\\ 0&=\frac{\partial}{\partial x}+ik-0.5774ik\sin^2\theta-0.1786ik\sin^4\theta\\ 0&=k^4\frac{\partial}{\partial x}-ik^5+0.5774\left(ik^3\right)k^2\sin^2\theta+0.1786\left(ik\right)k^4\sin^4\theta\end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa diperoleh *hampiran ketiga syarat batas serap*

$$\left(\frac{1}{c^4}\frac{\partial^5}{\partial t^4\partial x}-\frac{1}{c^5}\frac{\partial^5}{\partial t^5}-0.5774\frac{1}{c^3}\frac{\partial^5}{\partial t^3\partial y^2}+0.1786\frac{1}{c}\frac{\partial^5}{\partial t\partial y^4}\right)u=0 \tag{12}$$

dan koefisien pantul mempunyai rumusan sebagai berikut

$$|R|=\frac{\cos\theta-1+0.756\sin^2\theta}{\cos\theta+1-0.756\sin^2\theta}=R_3(\theta) \tag{13}$$

Nilai dari koefisien pantul untuk aproksimasi polinomial Chebyshev derajat $n=0,1,2$ pada sebagian sudut dapat dilihat pada tabel 1 sebagai berikut

Tabel 1. Koefisien Pantul dengan polinomial Chebyshev

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$R_1(\theta)$	0	0.0718	0.1716	0.3333	1
$R_2(\theta)$	0.0396	0.0468	0.0396	-0.0177	-1
$R_3(\theta)$	0	0.0328	0.0640	0.0718	-1

Sedangkan nilai koefisien dari hampiran syarat batas serap dengan penaksir Padé [9] dapat dilihat pada tabel 2 sebagai berikut

Tabel 2. Koefisien Pantul dengan penaksir Padé

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\widetilde{R}_1(\theta)$	0	0.0718	0.1716	0.3333	1
$\widetilde{R}_2(\theta)$	0	0.0004	0.0051	0.0370	1
$\widetilde{R}_3(\theta)$	0	0.1221	0.2886	0.4999	1

4. KESIMPULAN

Berdasarkan tabel 1 diperoleh rata-rata terkecil dari nilai koefisien pantul terjadi pada hampiran ketiga syarat batas serap yaitu dengan menggunakan polinomial Chebyshev derajat 2. Sedangkan jika dibandingkan dengan menggunakan penaksir Padé pada tabel 2, hampiran dengan menggunakan polinomial Chebyshev derajat dua tetap memiliki rata-rata terkecil.

5. DAFTAR RUJUKAN

[1] Brunner H dan Han H. 2014. Artificial Boundary Condition and Finite Difference Approximations for A Time-Fractional Wave Equationon on A two-dimensional unbounded spatial domain. *Journal of Computational Physics*,276: 541-562

[2] Higdon R. 1987. Numerical absorbing boundary conditions for wave equation. Math. Comp. 49. 65–90

[3] Hu, J., dan Jia X. 2016. Numerical Modeling of Seismic Wave Using Frequency-Adaptive Meshes. Journal of Applied Geophysics. 131:41-53

[4] Lin X dan Yu X. 2015. A finite difference method for effective treatment of mild-slope wave equation subject to non-reflecting boundary conditions. Applied Ocean Research, 53: 179-189

[5] Mousavi, M. R. Karimi, M. dan Jamshidi, A. 2016. Probability Distribution of Acoustic Scattering from Slightly Rough Sea Surface. Ocean Engineering, 112: 134-144

[6] Mason J.C dan Handscomb D. 2002. Chebyshev Polynomials. A CRC Press Company. Florida

[7] Shiddiq, M. Mahfuzh. 2011. Syarat batas serap pada gelombang akustik dua dimensi. Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon. 05 (2)

[8] Shiddiq, M. Mahfuzh. 2013. Numerical solution of absorbing boundary conditions on two dimensional acoustic wave. Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon. 07 (1)

[9] Shiddiq, M. 2015. Numerical Solution of Absorbing Boundary Condition in Padé Approximation. The 2015 International Conference on Mathematics, Its Application, and Mathematics Education. Yogyakarta.

[10] Rowley C and Colonius T. 2000. Discretely nonreflecting boundary condition for linear hyperbolic system. J. Comput. Phys. 15. 500–538