Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.1 (2015) Hal. 12-19

HUBUNGAN ANTARA TRANSFORMASI LAPLACE DENGAN TRANSFORMASI ELZAKI

Arie Wijaya, Yuni Yulida, Faisal

PS Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36 Banjarbaru 70714, Kalsel
Email: a.meteor7@gmail.com

ABSTRAK

Transformasi Laplace adalah metode transformasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Transformasi Laplace pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Simon Marquas De Laplace,seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris. Selain transformasi Laplace, juga terdapat suatu transformasi yaitu transformasi Elzaki yang merupakan transformasi khusus dari transformasi Laplace. Transformasi Elzaki diperkenalkan oleh Tarig M. Elzaki untuk mencari solusi persamaaan diferensial biasa. Pada umumnya kedua transformasi tersebut digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier, dalamproses transformasinya menggunakan integral dengan batasan dari 0 sampai ∞. Tidak seperti pada transformasi Elzaki, transformasi Laplace tidak mempunyai perkalian operator integral dengan variabel v. Tujuan dari penelitian ini adalah mencari hubungan antara transformasi Laplace dengan transformasi Elzaki. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa transformasi Elzaki dari suatu fungsi $f(t)$ memiliki hubungan dengan transformasi Laplace yaitu $T(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right)$ sedangkan untuk transformasi Laplacenya $F(s) = sT\left(\frac{1}{s}\right)$ dengan $T(v)$ dan $F(s)$ berturut-turut adalah transformasi Elzaki dan Laplace dari $f(t)$. Berdasarkan hubungan di atas dapat diperoleh sifat-sifat transformasi Elzaki yang bersesuaian dengan transformasi Laplace.

Kata kunci: *Persamaan diferensial linier, transformasi Laplace, transformasi Elzaki*

1. PENDAHULUAN

Transformasi Laplace adalah metode transformasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Transformasi Laplace pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Simon Marquas De Laplace seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris. Selaintransformasi Laplace juga terdapat suatu transformasi yaitu transformasi Elzaki. Transformasi Elzaki diperkenalkan oleh Tarig M. Elzaki untuk mencari solusi persamaaan diferensial linier.

Pada umumnya kedua transformasi di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier. Adapun kesamaannya yaitu kedua transformasinya menggunakan integral dengan batasan dari 0 sampai ∞. Pada transformasi Laplace tidak ada perkalian operator integral dengan variabel v, sedangkan untuk transformasi Elzaki terdapat perkalian integral dengan variabel v. Berdasarkan uraian di atas peneliti tertarik untuk mempelajari lebih dalam tentang hubungan antara kedua transformasi ini.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Transformasi Laplace

Berikut ini Definisi Transformasi Laplace:

Definisi 1.1[5]

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t yang tertentu untuk $t > 0$. Transformasi Laplace dari $f(t)$, yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ dengan parameter s adalah riil.

Diberikan definisi eksistensi dari hasil transformasi Laplace

Definisi 1.2[4]

Sebuah fungsi f berorde eksponensial jika terdapat konstanta α, $t_0 > 0$ dan $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(t)| < Me^{\alpha t}$, untuk setiap $t > t_0$ dengan $f(t)$ terdefinisi.

Selanjutnya diberikan sifat linier dan turunan fungsi,

Teorema 1.3 [5]

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

Teorema 1.4 [5]

Diberikan $f(t)$ adalah fungsi kontinu untuk $0 \leq t \leq N$ dan berorde eksponensial untuk $t > N$ sedangkan $f'(t)$ adalah kontinu sepotong-sepotong untuk $0 \leq t \leq N$. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$.

Teorema 1.5[4]

Diberikan$f(t)$ fungsi kontinu yang mempunyai turunan ke $(n-1)$ dinotasikan $f^{(n-1)}(t)$ untuk $t \geq 0$ dan diasumsikan $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ semuanya berorde eksponensial $e^{-\alpha t}$. Andaikan$f^{(n)}(t)$ adalah kontinu sepotong-potong untuk $0 \leq t \leq b$. Jika $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ ada untuk $s > \alpha$ maka $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'^{(0)} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.

Berikut Definisi inver transformasi Laplace

Definisi 1.6[5]

Transformasi Laplace fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$, ditulis dengan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Sifat konvolusi

Definisi 1.7[4]

Diberikan$f$ dan$g$merupakan fungsi yang kontinu sepotong-sepotong pada interval tertutup berhingga $0 \leq t \leq b$ dan berorde eksponensial. Fungsi konvolusi dinotasikan dengan $f * g$ dan didefinisikan sebagai berikut $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$.

Teorema1.8[4]
Diberikan f dan g merupakan fungsi yang kontinu sepotong-sepotong pada interval tertutup berhingga $0 \leq t \leq b$ dan berorde eksponensial e^{at} maka $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$ untuk $s > a$.

2.2 Transformasi Elzaki

Berikut diberikan definisi serta sifat Transformasi Elzaki

Definisi 1.9[3]
Transformasi Elzaki didefinisikan untuk fungsi berorde eksponensial yang diberikan pada fungsi-fungsi dalam himpunan A yang didefinisikan oleh:

$$A = \{f: R \rightarrow R \mid \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}}, untuk\ setiap\ t \in R\}$$

fungsi yang diberikan dalam himpunan A dengan konstanta M harus banyaknya bilangan terbatas ,k_1, k_2 banyaknya boleh terbatas atau tidak terbatas.

Definisi 1.10[2]
Transformasi Elzaki ditunjukkan dengan operator $E(.)$,didefinisikan dengan persamaan integral $E[f(t)] = T(v) = v\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{v}}dt,\ k_1 \leq v \leq k_2, t \geq 0$ variabel yang akan ditransformasi dan variabel variabel hasil transformasi.

Teorema1.11[3]
Diberikan $T(v)$ adalah transformasi Elzaki dari $[E(f(t)) = T(v)]$, maka:
(i) $E[f'(t)] = \frac{T(v)}{v} - vf(0)$
(ii) $E[f"(t)] = \frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber, baik buku maupun jurnal yang menunjang dan relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Prosedurpenelitianakan di mulaidenganmengumpulkan dan mempelajari bahan-bahan mengenai transformasi Laplace, transformasi Elzaki, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa orde satu dan orde n; mencari hubungan antara transformasi Laplace dengan transformasi Elzaki; dan penerapannya dalam menentukan solusi persamaan diferensial biasa linier.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hubungan antara Transformasi Laplace dan Elzaki

Berikut diberikan beberapa teorema yang menunjukkan hubungan transformasi Laplace dengan transformasi Elzaki. Tetapi sebelumnya akan diberikan Teorema 4.1.1

Teorema 4.1.1

Diberikan $T(v)$ adalah transformasi Elzaki dari $f(t)$, $E[f(t)] = T(v)$.

Jika $g(t) = \begin{cases} f(t-\tau), t \geq \tau \\ 0 \qquad\quad , t < \tau \end{cases}$ *maka* $E[g(t)] = e^{\frac{-\tau}{v}}T(v)$.

Bukti: Berdasarkan Definisi 1.10, diperoleh

$$E[g(t)] = v\int_0^{\infty} g(t)e^{-\frac{t}{v}}dt = v\left[\int_0^{\tau} g(t)e^{-\frac{t}{v}}dt + \int_{\tau}^{\infty} g(t)e^{-\frac{t}{v}}dt\right]$$

$$= v\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-\frac{t}{v}}dt$$

Misalkan $t = \lambda + \tau$maka $dt = d\lambda$, diperoleh

$$E[g(t)] = v\int_0^{\infty} f(\lambda+\tau-\tau)e^{-\left(\frac{\lambda+\tau}{v}\right)}d\lambda = v\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\left(\frac{\lambda+\tau}{v}\right)}d\lambda$$

$$= e^{-\frac{\tau}{v}}v\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\frac{\lambda}{v}}d\lambda$$

Berdasarkan Definisi 1.10 diperoleh $E[g(t)] = e^{-\frac{\tau}{v}}T(v)$.■

Teorema 4.1.2

Diberikan $f(t)\epsilon A$ dengan transformasi Laplace$F(s)$, maka transformasi Elzaki $T(v)$dari $f(t)$ diberikan dengan $T(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right)$.

Bukti: Berdasarkan Definisi 1.10 diperoleh $T(v) = v\int_0^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{v}}dt$ dan berdasarkan Definisi 1.1, maka diperoleh $T(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right)$. ■

Akibat 4.1.3

Diberikan $f(t)$ yang memiliki $F(s)$ dan $T(v)$ berturut-turut merupakan transformasi Laplace dan Elzaki, maka $F(s) = sT\left(\frac{1}{s}\right)$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 4.1.2, dan misalkan $s = \frac{1}{v}$ diperoleh

$$T\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}F(s) \Leftrightarrow F(s) \ = sT\left(\frac{1}{s}\right).\ ■$$

3.2 Transformasi Elzaki pada Turunan dan Integral

Pada transformasi Laplace terdapat transformasi terhadap turunan maupun integral fungsi $f(t)$, demikian juga pada transformasi Elzaki yang akan disajikan dalam teorema-teorema berikut:

Teorema 4.2.1

Diberikan $F'(s)$ dan $T'(v)$berturut-turut adalah transformasi Laplace dan Elzaki dari turunan $f(t)$, maka:

(i) $T'(v) = \frac{T(v)}{v} - vf(0)$

(ii) $T^{(n)}(v) = \frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2-n+k}f^{(k)}(0) \quad ,n \geq 1$

Dimana $T^{(n)}(v)$ dan $F^{(n)}(s)$ adalah transformasi Elzaki dan Laplace dari turunan ke n dari fungsi $f(t)$ dengan notasi $f^{(n)}(t)$.

Bukti:

(i) Berdasarkan Teorema 1.4, diketahui $F'(s) = sF(s) - f(0)$
Maka berdasarkanTeorema 4.1.2

$$T'(v) = vF'\left(\frac{1}{v}\right) = v\left[\frac{1}{v}F\left(\frac{1}{v}\right) - f(0)\right] = \frac{T(v)}{v} - vf(0).$$

(ii) BerdasarkanTeorema 1.5, transformasi Laplace dari $f^{(n)}(t)$
$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Atau dapat ditulis dengan $F^{(n)}(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0)$
Misalkan $s = \frac{1}{v}$, diperoleh
$F^{(n)}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{F\left(\frac{1}{v}\right)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{v^{n-(k+1)}}$
Dan karena berdasarkan Teorema 4.1.2
$T^{(n)}(v) = vF^{(n)}\left(\frac{1}{v}\right)$, maka
$\frac{T^{(n)}(v)}{v} = \frac{1}{v}\frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{v^{n-(k+1)}} \Leftrightarrow T^{(n)}(v) = \frac{T(v)}{v^n} - v\sum_{k=0}^{n-1} v^{(k+1)-n} f^{(k)}(0)$
$$\Leftrightarrow T^{(n)}(v) = \frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2-n+k} f^{(k)}(0)\,.\ \blacksquare$$

Teorema 4.2.2
Diberikan $T'(v)$ dan $F'(s)$ merupakan transformasi Elzaki dan Laplace dari $h(t)$, dengan $h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, maka $T'(v) = E[h(t)] = vT(v)$.
Bukti: Berdasarkan Teorema 1.4 diperoleh
$\mathcal{L}\{h'(t)\} = sH(s) - h(0) = sH(s)$
Karena diketahui $\mathcal{L}\{h(t)\} = F'(s)$ dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$,
sedangkan $h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ maka $h'(t) = f(t)$ sehingga diperoleh
$\mathcal{L}\{h'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow sH(s) = F(s) \Leftrightarrow \quad H(s) = \frac{F(s)}{s}$, $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$.
Sehingga diperoleh $F'(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{F(s)}{s}$, akibatnya berdasarkan Teorema 3.1.2
$$T'(v) = vF'\left(\frac{1}{v}\right) = v\left[vF\left(\frac{1}{v}\right)\right] = v^2 F\left(\frac{1}{v}\right) = vT(v).\ \blacksquare$$

Teorema 4.2.3
Diberikan $T(v)$ adalah transformasi Elzaki dari fungsi $f(t)$ maka:
(i) $E[tf(t)] = v^2 \frac{dT(v)}{dv} - vT(v)$
(ii)$E[t^2 f(t)] = v^4 \frac{d^2T(v)}{dv^2}$
Bukti:
(i) Dari Definisi 1.10 dan turunan pertama terhadap v diperoleh
$$\frac{dT(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left[\int_0^\infty vf(t)e^{-\frac{t}{v}}dt\right]$$
$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}\left[ve^{-\frac{t}{v}}f(t)dt\right]$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{v}e^{-\frac{t}{v}}\big(tf(t)\big)dt + \int_0^\infty e^{-\frac{t}{v}}f(t)dt$$
$$\frac{dT(v)}{dv} = \frac{1}{v^2}E[tf(t)] + \frac{1}{v}E[f(t)]$$
$$\Leftrightarrow E[tf(t)] = v^2\frac{dT(v)}{dv} - vE[f(t)] = v^2\frac{dT(v)}{dv} - vT(v).$$

(ii) Dari Definisi 1.10 dan turunan kedua terhadap v diperoleh

$$\frac{d^2T(v)}{dv^2} = \frac{d^2}{dv^2}\left[\int_0^\infty vf(t)e^{-\frac{t}{v}}dt\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[ve^{-\frac{t}{v}}f(t)dt\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{v}e^{-\frac{t}{v}}\big(tf(t)\big)dt\right] + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}\left[e^{-\frac{t}{v}}f(t)dt\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{v^3}e^{-\frac{t}{v}}\big(t^2f(t)\big)dt - \int_0^\infty \frac{1}{v^2}e^{-\frac{t}{v}}\big(tf(t)\big)dt + \int_0^\infty \frac{1}{v^2}e^{-\frac{t}{v}}\big(tf(t)\big)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{v^3}e^{-\frac{t}{v}}\big(t^2f(t)\big)dt$$

$\frac{d^2T(v)}{dv^2} = \frac{E[t^2f(t)]}{v^4}$. Jadi $E[t^2f(t)] = v^4\frac{d^2T(v)}{dv^2}$. ■

Teorema 4.2.4

Jika $E[f(t)] = T(v)$ maka:

(i) $E[tf'(t)] = v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right]$

(ii) $E[tf"(t)] = v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right]$

(iii) $E[t^2f"(t)] = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right]$

Bukti:

(i) Berdasarkan Teorema 4.2.3 (i) diperoleh

$$E[tf'(t)] = v^2\frac{dT'(v)}{dv} - vT'(v)$$

$$= v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vF(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vF(0)\right].$$

(ii) BerdasarkanTeorema 4.2.3 (i) diperoleh

$$E[tf"(t)] = v^2\frac{dT"(v)}{dv} - vT"(v)$$

$$= v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right].$$

(iii) BerdasarkanTeorema 4.2.3 (ii) diperoleh

$$E[t^2f"(t)] = v^4\frac{d^2T"(v)}{dv^2} = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right]. ■$$

Teorema 3.2.5

Diberikan $f(t)\epsilon A$ dengan transformasi Elzaki $T(v)$, maka $E[e^{at}f(t)] = (1-av)T\left[\frac{v}{1-av}\right]$.

Bukti: Berdasarkan Definisi 1.10 diperoleh

$$E[f(t)] = T(v) = v\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{v}}dt$$

Misalkan $t = vw$ maka $dt = v\,dw$, sehingga

$$E[f(vw)] = T(v) = v^2\int_0^\infty f(vw)e^{-w}\,dw$$

Atau dapat ditulis $E[f(vt)] = T(v) = v^2\int_0^\infty f(vt)e^{-t}\,dt$

Sehingga $E[e^{at}f(t)] = v^2\int_0^\infty f(vt)e^{-avt}e^{-t}dt = v^2\int_0^\infty f(vt)e^{-(1-av)t}dt$

Misalkan $w = (1-av)t$maka $dw = (1-av)dt$, sehingga

$$\begin{aligned}
E[e^{at}f(t)] &= v^2\int_0^\infty f\left(v\frac{w}{1-av}\right)e^{-w}\frac{dw}{1-av}\\
&= \frac{v^2}{1-av}\int_0^\infty f\left(\frac{vw}{1-av}\right)e^{-w}dw\\
&= (1-av)\left[\frac{v^2}{(1-av)^2}\int_0^\infty f\left(\frac{v}{1-av}w\right)e^{-w}dw\right]\\
&= (1-av)T\left[\frac{v}{1-av}\right]. \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.6

Diberikan $f(t)$ dan $g(t)$ yang didefinisikan dalam himpunan A berturut-turut memiliki transformasi Laplace $F(s)$ dan $G(s)$ dan transformasi Elzaki $M(v)$ dan $N(v)$, maka transformasi Elzaki dari konvolusi f dan g $(f*g)(t) = \int_0^\infty f(t)g(t-\tau)d\tau$ diberikan oleh $E[(f*g)(t)] = \frac{1}{v}M(v)N(v)$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 1.8 diketahui bahwa $\mathcal{L}[(f*g)] = F(s)G(s)$
Dengan menggunakan Teorema 4.1.2 diperoleh $E[(f*g)(t)] = v\mathcal{L}[(f*g)(t)]$.
Dan berdasarkan Teorema 4.1.2 diperoleh $M(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right)$ dan $N(v) = vG\left(\frac{1}{v}\right)$
Misalkan $\frac{1}{v} = s$, maka diperoleh $F(s) = \frac{M(v)}{v}$ dan $G(s) = \frac{N(v)}{v}$
sehingga

$$\begin{aligned}
E[(f*g)(t)] = v\mathcal{L}[(f*g)(t)] = vF(s)G(s) &= v\left[\frac{M(v)N(v)}{v^2}\right]\\
&= \frac{1}{v}M(v)N(v). \blacksquare
\end{aligned}$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat ditarik kesimpulan bahwa hubungan transformasi Laplace dan Elzaki adalah:

1. Transformasi Elzaki dari suatu fungsi $f(t)$ memiliki hubungan dengan transformasi Laplace yaitu $T(v) = vF\left(\frac{1}{v}\right)$ dengan $v = \frac{1}{s}$.
2. Transformasi Laplace dari suatu fungsi $f(t)$ memiliki hubungan dengan transformasi Elzaki yaitu $F(s) = sT\left(\frac{1}{s}\right)$.
3. Fungsi-fungsi khusus dari transformasi Laplace juga dapat diselesaikan dengan transformasi Elzaki dan berdasarkan kesimpulan 1 dan 2 diperoleh sifat-sifat transformasi Elzaki seperti halnya sifat-sifat pada transformasi Laplace, seperti

transformasi terhadap turunan, integral, pergeseran, perkalian dengan t, dan konvolusi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Elzaki, T. M. 2012. Homotopy perturbation and Elzaki transform for solving nonlinier partial differential equations. *Mathematical Theory and Modeling*. ISSN 2224-5804, Vol. 2, No. 3

[2] Elzaki, T. M. 2011. On the connections between Laplace and Elzaki transforms. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*. ISSN 0973-4554, Number 1, pp. 1-10

[3] Elzaki, T. M. 2011. The New Integral Transform “Elzaki transform”.*Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768, Number 1, pp. 57-64.

[4] Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

[5] Spiegel, M. R. 1999. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal Transformasi Laplace (Alih Bahasa Pantur Silabandan Hans Wospakrik).*Erlangga. Jakarta.