Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 29-35

ANALISIS MODEL *PREDATOR-PREY* TERHADAP EFEK PERPINDAHAN PREDASI PADA SPESIES *PREY* YANG BERJUMLAH BESAR DENGAN ADANYA PERTAHANAN KELOMPOK

Mursyidah Pratiwi, Yuni Yulida*, Faisal
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
*Email: y_yulida@unlam.ac.id

ABSTRAK

Model interaksi predasi merupakan model *predator prey*, dengan spesies *predator* berinteraksi dengan spesies *prey* dalam peristiwa makan memakan, dengan kondisi satu spesies populasi *predator* memangsa satu spesies populasi *prey* di dua habitat yang berbeda. Dua habitat yang berbeda di sini artinya populasi prey memiliki 2 tempat hidup (habitat), misalnya lokasi 1 dan lokasi 2. *Prey* mampu bermigrasi diantara dua habitat yang berbeda tersebut, karena suatu kondisi seperti perubahan musim sehingga *predator* diperbolehkan untuk memilih memangsa *prey* di habitat yang satu ataupun yang lain, tetapi spesies *prey* di masing-masing habitat memiliki kemampuan pertahanan kelompok. Pertahanan kelompok prey akan lebih efektif jika jumlah populasinya besar, sehingga *predator* akan tertarik terhadap habitat dimana spesies *prey* berjumlah sedikit. Berdasarkan keadaan tersebut, artikel ini akan menjelaskan kembali dalam bentuk model matematika, menentukan kestabilan titik ekuilibrium pada model dan menganalisa terjadinya Bifurkasi Hopf. Hasil yang diperoleh pada model efek perpindahan predasi memiliki 2 titik ekuilibrium salah satu diantaranya mengalami Bifurkasi Hopf.

Kata kunci: *Predator-prey*, titik ekuilibrium, kestabilan ,bifurkasi hopf

1. PENDAHULUAN

Menurut B. S Bhatt, 1999, dalam lingkungan *predator-prey*, *predator* lebih memilih mencari makan sendiri pada suatu habitat dalam waktu tertentu dan dapat pula mengubah pilihannya untuk mencari makan ke habitat yang lain. Fenomena perubahan ini disebut dengan perpindahan yang melibatkan interaksi antara satu spesies *predator* dengan satu spesies *prey di dua habitat yang berbeda*, dengan tingkat konversi dari *prey* ke *predator* sebagai parameter bifurkasi. Ketika spesies *prey* dengan jumlah relatif kecil dibandingkan dengan jumlah spesies *predator* maka pertahanan kelompok *prey* terhadap gangguan *predator* juga semakin kecil, begitu pula sebaliknya. Pertahanan kelompok ini merupakan istilah yang digunakan untuk menggambarkan fenomena dimana predasi menurun atau bahkan dicegah sama sekali dengan kemampuan populasi spesies *prey* untuk lebih membela diri ketika jumlah mereka lebih besar dibandingkan jumlah spesies *predator.*

Artikel ini mengkaji kembali Model yang telah dipaparkan oleh Bhatt, B. (1999). Dari Model efek perpindahan predasi akan dijelaskan pembentukan Model, selanjutnya dianalisa kestabilan di sekitar titik ekuilibrium dan menganalisa apakah terjadi Bifurkasi pada model tersebut.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah

1) Menjelaskan pembentukan Model,
2) Menentukan titik ekuilibrium,
3) Melinierisasi Model di sekitar titik ekulibrium,
4) Menentukan matrik Jacobian dan nilai eigen untuk menentukan kestabilan dan
5) Menganalisa Bifurkasi pada Model

3. **HASIL DAN PEMBAHASAN**

3.1 Model Efek Perpindahan predasi

Model efek perpindahan predasi dengan adanya pertahanan kelompok dari *prey* (x_1) pada habitat 1 dan *prey* (x_2) pada habitat 2, mengadaptasi fungsi mekanisme efek perpindahan predasi pada tulisan Mumay Tansky (1978), yaitu
Untuk interaksi *predator* terhadap *prey* (x_1) maupun terhadap *prey* (x_2), fungsi efek perpindahan predasinya adalah:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n} = \frac{x_1^n}{x_1^n + x_2^n} \text{ dan } g(x_1, x_2) = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = \frac{x_1^n}{x_1^n + x_2^n} \quad \ldots(1)$$

dalam kasus ini digunakan *n=1*, artinya efek dari pertahanan *prey* masih sederhana sehingga untuk *n=1* diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 \rho_{21} x_2 - \frac{\beta_1 x_2^2 y}{x_1 + x_2} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 - \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_1 \rho_{12} x_1 - \frac{\beta_2 x_1^2 y}{x_1 + x_2} \\ \frac{dy}{dt} &= \left(-\mu + \frac{\delta_1 \beta_1 x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{\delta_2 \beta_2 {x_1}^2}{x_1 + x_2}\right) y \end{aligned} \quad \ldots(2)$$

dengan (x_1) dan (x_2) merupakan populasi *prey* di habitat 1 dan di habitat 2, sedangkan y merupakan populasi predator yang diperbolehkan untuk memilih memangsa (x_1) ataupun (x_2). Pada populasi *prey* tersedia makanan berlimpah, sehingga tidak terjadi kompetisi antar *prey* tetapi populasi *prey* di dua habitat diperbolehkan untuk saling berpindah, dan populasi *prey* memiliki pertahanan kelompok yang kuat ketika jumlah populasinya lebih banyak.

α_i = Laju pertumbuhan *prey* di habitat i tanpa adanya *predator*, dimana $i = 1,2$.
ε_i = Pertahanan kelompok ketika perpindahan *prey* di habitat i, dimana $i = 1,2$.
ρ_{ij} = Peluang suksesnya perpindahan *prey* dari habitat i ke j atau sebaliknya.
β_i = Interaksi antar *predator prey* di habitat i, dimana $i = 1,2$.
δ_i = Laju konversi *predator* ketika memangsa *prey* di habitat i, dimana $i = 1,2$.
μ = Tingkat kematian *predator*.

Semua parameter yang digunakan dalam memodelkan sistem efek perpindahan predasi bernilai positif.

3.2 Titik Ekuilibrium Model Efek Perpindahan Predasi

Berdasarkan Perko, L. 1991, titik ekuilibrium pada model dapat ditentukan jika memenuhi kondisi $\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0,$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Sehingga pada model efek perpindahan predasi dapat diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu:

i. $E_1 = (0,0,0)$, dengan artian sistem tidak memuat *predator* maupun *prey* (populasi punah).

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 29-35

ii. $E_2 = \left(\frac{\mu\bar{x}(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{\mu(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{((\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x}+\varepsilon_2\rho_{21})(\bar{x}+1)}{\beta_1}\right)$ untuk mewakili populasi *predator* memangsa *prey* di habitat 1 dan $E_2 = \left(\frac{\mu\bar{x}(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{\mu(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{((\alpha_2-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\rho_{12}\bar{x})(\bar{x}+1)}{\bar{x}^2\beta_2}\right)$ untuk mewakili populasi *predator* memangsa *prey* di habitat 2. Karena dalam sistem hanya terdapat satu populasi *predator* maka nilai $\hat{y}$ di dua kondisi tersebut harus disamakan, sehingga titik ekuilibrium E_2 menjadi:
$E_2 = \left(\frac{\mu\bar{x}(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{\mu(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \left(\frac{((\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x}+\varepsilon_2\rho_{21})(\bar{x}+1)}{\beta_1} = \frac{((\alpha_2-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\rho_{12}\bar{x})(\bar{x}+1)}{\bar{x}^2\beta_2}\right)\right).$

3.3 Analisa Kestabilan Titik Ekuilibrium Pada Model Efek Perpindahan Predasi

i. Menentukan jenis kestabilan di titik $E_1 = (0{,}0{,}0)$, yaitu dengan cara perturbasi dengan memisalkan $x_1 = \hat{x}_1 + u$, $x_2 = \hat{x}_2 + v$, dan $y = \hat{y} + w$, dan disubsitusi ke sistem persamaan (3.2) dengan u, v, w merupakan parameter yang sangat kecil dan dapat diabaikan, sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} (\alpha_1-\varepsilon_1) & \varepsilon_2\rho_{21} & 0 \\ \varepsilon_1\rho_{12} & (\alpha_2-\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \qquad \ldots(3)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian adalah:

$$((\alpha_1-\varepsilon_1)-\lambda)((\alpha_2-\varepsilon_2)-\lambda)(-\mu-\lambda) - (\varepsilon_2\rho_{21})(\varepsilon_1\rho_{12})(-\mu-\lambda) = 0 \qquad \ldots(4)$$

model efek perpindahan predasi di titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik jika memenuhi kondisi $\alpha_1 < \varepsilon_1$, $\alpha_2 < \varepsilon_2$, dan $(\alpha_1-\varepsilon_1)(\alpha_2-\varepsilon_2) > (\varepsilon_2\rho_{21})(\varepsilon_1\rho_{12})$.

ii. Menentukan kestabilan di titik ekuilibrium E_2 dengan menggunakan linierisasi sistem diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} A^* & -\frac{x_1}{x_2}A^* & C^* \\ -\frac{x_2}{x_1}E^* & E^* & F^* \\ G^* & H^* & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(5)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (5) adalah:

$$(A^*-\lambda)(E^*-\lambda)(-\lambda) - \frac{x_1}{x_2}A^*F^*G^* - \frac{x_2}{x_1}E^*C^*H^* + \frac{x_1}{x_2}A^*\frac{x_2}{x_1}E^*\lambda$$
$$-((A^*-\lambda)F^*H^* - (E^*-\lambda)C^*G^* = 0 \qquad \ldots(6)$$

dengan

$$A^* = \frac{1}{(\bar{x}+1)}(2(\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x} + (\alpha_1-\varepsilon_1) + \varepsilon_2\rho_{21}), \quad C^* = -\frac{\beta_1\mu}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}$$
$$E^* = \frac{(\alpha_2-\varepsilon_2)\bar{x} + 2(\alpha_2-\varepsilon_2) + \varepsilon_1\rho_{12}\bar{x}}{(\bar{x}+1)}, \quad F^* = -\frac{\beta_2\mu\bar{x}^2}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}$$
$$G^* = \frac{1}{(\bar{x}+1)}\left[(\delta_2 + \frac{2\delta_2}{\bar{x}})\big((\alpha_2-\varepsilon_2) + \varepsilon_1\rho_{12}\bar{x}\big) - \delta_1\big((\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x} + \varepsilon_2\rho_{21}\big)\right],$$
$$H^* = \frac{1}{(\bar{x}+1)}\left[2\delta_1\big((\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x} + \varepsilon_2\rho_{21}\big)(\mu\bar{x}+\mu) - \delta_2\mu\big((\alpha_2-\varepsilon_2) + \varepsilon_1\rho_{12}\bar{x}\big)\right]$$

Persamaan (6) dapat disederhanakan dengan:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \qquad \ldots(7)$$

dengan

$a_0 = 1, \quad a_1 = -(A^* + E^*), \quad a_2 = -(F^*H^* + C^*G^*),$

$a_3 = \left(\frac{x_1}{x_2}A^*F^*G^* + \frac{x_2}{x_1}E^*C^*H^* + A^*F^*H^* + E^*C^*G^*\right)$

Jika memenuhi kondisi $\alpha_1 < \varepsilon_1, \alpha_2 < \varepsilon_2$, dan $(\alpha_1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 - \varepsilon_2) > (\varepsilon_2\rho_{21})(\varepsilon_1\rho_{12})$ maka $A^* < 0, C^* > 0, E^* < 0, F^* > 0, G^* > 0, H^* > 0$ sehingga a_1, a_2 dan a_3 bernilai positif, $a_1a_2 > a_3$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz (Gantmacher, 1959) kestabilan pada titik ekuilibrium ini stabil asimtotik.

3.4 Analisa Bifurkasi

Kuznetsov, Y.A. 1998 memaparkan berbagai analisa Bifurkasi, salah satunya bifurkasi Hopf. Analisis Bifurkasi Hopf pada Sistem persamaan (2) dengan mengambil $\delta_{1,2}$ sebagai parameter Bifurkasi. Titik ekuilibrium E_2 merupakan titik ekuilibrium nonhiperbolik jika $a_1a_2 = a_3$, sehingga persamaan karakteristik (7) memiliki sepasang akar imajiner murni jika dan hanya jika untuk nilai $\delta_{1,2} = \overline{\delta_{1,2}}$ dengan kata lain terdapat $\overline{\delta_{1,2}}$ sedemikian sehingga mengakibatkan $a_1a_2 = a_3$. Oleh karena itu hanya ada satu nilai $\delta_{1,2}$ yang mengalami Bifurkasi Hopf.

Jadi persamaan karakteristik (3.7) untuk $\delta_{1,2} = \overline{\delta_{1,2}}$:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Dengan $a_0 = 1$ dan $a_1a_2 = a_3$, sehingga diperoleh:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_1a_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + a_2)(\lambda + a_1) = 0 \quad \ldots(8)$$

Akar-akar karakteristinya:

$$\lambda_1 = i\sqrt{a_2}, \lambda_2 = -i\sqrt{a_2}, \text{ dan } \lambda_3 = -a_1 \quad \ldots(9)$$

bentuk akar-akar karakteristik secara umum:

$$\lambda_1(\delta_{1,2}) = u(\delta_{1,2}) + iv(\delta_{1,2}), \lambda_2(\delta_{1,2}) = u(\delta_{1,2}) - iv(\delta_{1,2}), \text{dan } \lambda_3(\delta_{1,2}) = -a_1(\delta_{1,2}) \quad \ldots(10)$$

Bifurkasi Hopf terjadi jika syarat tranversal terpenuhi yaitu:

$$Re\left(\frac{d\lambda_1}{d_{\delta_{1,2}}}\right)_{\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}} \neq 0 \quad \ldots(11)$$

dan analisa terjadinya Bifurkasi Hopf pada model efek perpidahan predasi ini, dengan menyelidiki sepasang akar-akar karakteristik yang bernilai imajiner, sebagai berikut

a) Untuk $\lambda_1(\delta_{1,2}) = u(\delta_{1,2}) + iv(\delta_{1,2})$,

Nilai $\lambda_1(\delta_{1,2})$ disubstitusi ke persamaan (8) dan menentukan laju perubahan terhadap $\delta_{1,2}$ serta mensubsitusi $u(\delta_{1,2}) = 0$ untuk mendapatkan titik Bifurkasi sehingga diperoleh:

$$R(\delta_{1,2})u'(\delta_{1,2}) - S(\delta_{1,2})v'(\delta_{1,2}) + T(\delta_{1,2}) = 0$$
$$S(\delta_{1,2})u'(\delta_{1,2}) + R(\delta_{1,2})v'(\delta_{1,2}) + U(\delta_{1,2}) = 0 \quad \ldots(12)$$

dengan,

$$R = -3\bar{v}^2 + a_2(\delta_{1,2}), S = 2a_1(\delta_{1,2})\bar{v}, T = -a_1{}'\bar{v}^2 + a_3{}', \text{dan } U = a_2{}'\bar{v} \quad \ldots(13)$$

Diferensial total $f(\lambda(\delta_{1,2}), \delta_{1,2})$ diperoleh dengan mengeliminasi sistem persamaan (12) sehingga diperoleh:

$$u'(\delta_{1,2}) = Re\left(\frac{d\lambda_1}{d_{\delta_{1,2}}}\right)_{\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}} = -\frac{(SU+RT)}{(R^2+S^2)} \quad \ldots(14)$$

Jika $SU + RT \neq 0$ pada kondisi $\delta_{1,2} = \overline{\delta_{1,2}}$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 29-35

Dari persamaan (13) diperoleh:

$$SU+RT=(2a_1(\delta_{1,2})a_2{}'-3a_3{}')\bar{v}^2+a_2(\delta_{1,2})a_3{}' \qquad \ldots(15)$$

dengan $a_1{}'=\frac{da_1}{d\delta_{1,2}}=0$, $a_2{}'=\frac{da_2}{d\delta_{1,2}}$ dan $a_3{}'=\frac{da_3}{d\delta_{1,2}}$

selanjutnya subsitusi nilai a_1 dan a_2 ke persamaan (15) diperoleh:

$$SU+RT=(A^*+E^*)\left(\frac{d}{d\delta_{1,2}}(F^*H^*)+\frac{d}{d\delta_{1,2}}(C^*G^*)\right)(\bar{v}^2+F^*H^*+C^*G^*) \qquad \ldots(16)$$

b) Untuk $\lambda_2(\delta_{1,2})=u(\delta_{1,2})-iv(\delta_{1,2})$,

Persamaan $\lambda_2(\delta_{1,2})$ disubstitusi ke persamaan (8) dengan $u(\delta_{1,2})=0$ dan menentukan laju perubahan terhadap $\delta_{1,2}$ sehingga diperoleh:

$$R(\delta_{1,2})u'(\delta_{1,2})+S(\delta_{1,2})v'(\delta_{1,2})+T(\delta_{1,2})=0$$
$$-S(\delta_{1,2})u'(\delta_{1,2})-R(\delta_{1,2})v'(\delta_{1,2})-U(\delta_{1,2})=0 \qquad \ldots(17)$$

dengan,

$$R=3\bar{v}^2+a_2(\delta_{1,2}),\ S=2a_1(\delta_{1,2})\bar{v},\ T=a_1{}'\bar{v}^2+a_3{}',\ \text{dan } U=a_2{}'\bar{v} \qquad \ldots(18)$$

Diferensial total $f(\lambda(\delta_{1,2}),\delta_{1,2})$ diperoleh dengan mengeliminasi sistem persamaan (17) sehingga diperoleh:

$$u'(\delta_{1,2})=Re\left(\frac{d\lambda_1}{d_{\delta_{1,2}}}\right)_{\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}}=-\frac{(SU+RT)}{(R^2+S^2)} \qquad \ldots(19)$$

Jika $SU+RT\neq 0$ pada kondisi $\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}$

Dari persamaan (18) diperoleh:

$$SU+RT=(2a_1(\delta_{1,2})a_2{}'+3a_3{}')\bar{v}^2+a_2(\delta_{1,2})a_3{}' \qquad \ldots(20)$$

dengan $a_1{}'=\frac{da_1}{d\delta_{1,2}}=0$, $a_2{}'=\frac{da_2}{d\delta_{1,2}}$ dan $a_3{}'=\frac{da_3}{d\delta_{1,2}}$

selanjutnya subsitusi nilai a_1 dan a_2 ke persamaan (20) diperoleh:

$$SU+RT=(A^*+E^*)\left(\frac{d}{d\delta_{1,2}}(F^*H^*)+\frac{d}{d\delta_{1,2}}(C^*G^*)\right)(-5\bar{v}^2+F^*H^*+C^*G^*)$$

Persamaan (14) yang merupakan syarat transversal terjadinya Bifurkasi Hopf akan terbukti jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

i. $(A^*+E^*)\neq 0$

ii. $\left(\beta_2\bar{x}^2\frac{dH^*}{d\delta_1}+\beta_1\frac{d}{d\delta_1}G^*\right)\neq 0$ maka,
$\bar{x}^2\neq\frac{\beta_1\frac{d}{d\delta_1}G^*}{\beta_2\frac{d}{d\delta_1}H^*}$,

iii. $\left(\frac{\beta_1\mu}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)^2}\right)\neq 0$ dengan $\bar{x}^2\neq\frac{\beta_1\delta_1}{\beta_2\delta_2}$

iv. $\left(\bar{v}^2+\frac{\beta_2\mu\bar{x}^2}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}H^*+\frac{\beta_1\mu}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}G^*\right)\neq 0$

Persamaan (19) yang merupakan syarat transversal terjadinya Bifurkasi Hopf akan terbukti jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

i. $(A^*+E^*)\neq 0$

ii. $\left(\beta_2\bar{x}^2\frac{dH^*}{d\delta_1}+\beta_1\frac{d}{d\delta_1}G^*\right)\neq 0$ maka,
$\bar{x}^2\neq\frac{\beta_1\frac{d}{d\delta_1}G^*}{\beta_2\frac{d}{d\delta_1}H^*}$,

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 29-35

iii. $\left(\frac{\beta_1\mu}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)^2}\right) \neq 0$ dengan $\bar{x}^2 \neq \frac{\beta_1\delta_1}{\beta_2\delta_2}$

iv. $\left(-5\bar{v}^2 + \frac{\beta_2\mu\bar{x}^2}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}H^* + \frac{\beta_1\mu}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}G^*\right) \neq 0$

Jadi titik ekuilibrium E_2 mengalami Bifurkasi Hopf.

4 KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model efek perpindahan predasi dapat dituliskan sebagai berikut:
$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 - \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2\rho_{21}x_2 - \frac{\beta_1 {x_2}^2 y}{x_1+x_2}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha_2 x_2 - \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_1\rho_{12}x_1 - \frac{\beta_2 {x_1}^2 y}{x_1+x_2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(-\mu + \frac{\delta_1\beta_1 {x_2}^2}{x_1+x_2} + \frac{\delta_2\beta_2 {x_1}^2}{x_1+x_2}\right)y$$
2. Titik ekuilibrium Model efek perpindahan predasi yaitu: $E_1 = (0,0,0)$ dan
$$E_2 = \left(\frac{\mu\bar{x}(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \frac{\mu(\bar{x}+1)}{(\delta_1\beta_1+\delta_2\beta_2\bar{x}^2)}, \left[\frac{\left((\alpha_1-\varepsilon_1)\bar{x}+\varepsilon_2\rho_{21}\right)(\bar{x}+1)}{\beta_1} = \frac{\left((\alpha_2-\varepsilon_2)+\varepsilon_1\rho_{12}\bar{x}\right)(\bar{x}+1)}{\bar{x}^2\beta_2}\right]\right)$$
3. Analisa kestabilan lokal di titik ekuilibrium E_1 bersifat stabil asimtotik, sedangkan E_2 akan stabil
4. Analisa Bifurkasi Hopf dengan $\delta_{1,2}$ sebagai parameter Bifurkasi Hopf terjadi di titik ekuilibrium E_2 dengan terpenuhinya syarat transversal yaitu:
   i. Untuk $\lambda_1(\delta_{1,2}) = u(\delta_{1,2}) + iv(\delta_{1,2})$:
   $$Re\left(\frac{d\lambda_1}{d_{\delta_{1,2}}}\right)_{\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}} \neq -\frac{(2a_1a_2{}'-3a_3{}')\bar{v}_1{}^2+a_2a_3{}'}{(4a_1{}^2-6a_2)\bar{v}_1{}^2+a_2{}^2+9\bar{v}_1{}^4}$$
   ii. Untuk $\lambda_1(\delta_{1,2}) = u(\delta_{1,2}) - iv(\delta_{1,2})$:
   $$Re\left(\frac{d\lambda_1}{d_{\delta_{1,2}}}\right)_{\delta_{1,2}=\overline{\delta_{1,2}}} \neq -\frac{(2a_1a_2{}'+3a_3{}')\bar{v}_2{}^2+a_2a_3{}'}{(6a_2-4a_1{}^2)\bar{v}_2{}^2+a_2{}^2+9\bar{v}_2{}^4}$$
5. Peneliti selanjutnya diharapkan dapat membuat simulasi model untuk kestabilan kedua titik ekuilibrium dan terjadinya Bifurkasi Hopf.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bhatt, B, S. Q, J, A, Khan. and R, P, Jaju. 1999. Switching effect of predation on large size prey species exhibiting group defense *Journal of Differential Equations and Control Processer*. Neva.

Gantmacher, F. R. 1959. The Theory Of Matrices. Chelsea Publishing Company. New York.

Khan,Q, J, A. Bhatt, B, S. and R, P, Jaju. 1998. Switching Model with Two Habitats and a Predator Involving Group Defence. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. **5**: 212-223.

Kuznetsov, Y.A. 1998. *Element of Applied Bifurcation Theory*. Second Edition.Springer – Verlag. New York. USA.

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 29-35

Perko, L. 1991. Differential Equations and Dynamical Systems. *Texts in Applied Mathematics* Vol 7. Springer – Verlag. New York. USA.

Rakhmawaty, Y.,Yulida,Y.,Faisal. 2017. *Model Mangsa Pemangsa dengan Mangsa yang Terinfeksi*. Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Terapannya I. Hal 42-48. Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat.

Tansky, Mumay. 1978. *Switching Effect In Prey-Predator System*. Kyoto Jepang.