MULTI OBJECTIVE FUZZY LINEAR PROGRAMMING

M. Meftah Erryshady, Oni Soesanto, M. Ahsar Karim

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani. Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
Email: muse_me23@rocketmail.com

ABSTRACT

ABSTRACT. Linear programming is a general model that can be used in problem solving the allocation problem of limited resources optimally. The mathematics model of linear programming consists of two function: objective function and constraint function. Based on the number of objective functions, linear programming is divided into two types: Single Objective Linear Programming and Multi-Objective Linear Programming. Multi Objective Linear Programming which values are defined in the scope of fuzzy is called Multi Objective Fuzzy Linear Programming. To find the optimal solution of the problem, firstly it is divided into a linear program with single objective and solved using the simplex method. This research was carried out by using a literature study. The results of this study indicate that the optimal solution of Multi Objective Fuzzy Linear Programming will be decision variable (x), that are: $x_1, x_2, ..., x_n$ which its values if they are substituted into the constraint function, the results will be consistent with the limits of specified| resources, as well as if they are substituted into the objective function, then it will be obtained the optimal solution of all expected purposes.

Keywords: *Linear programming, multi objective linear programming, multi objective fuzzy linear programming.*

1. PENDAHULUAN

Program linier merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah mengalokasikan sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Program linier menggunakan model matematis. Sebutan linier berarti bahwa semua fungsi matematis yang disajikan dalam model ini haruslah fungsi-fungsi linier. Dalam program linier dikenal dua macam fungsi, yaitu fungsi tujuan (*objective function*) dan fungsi kendala (*constraint function*)[2]. Dalam kehidupan nyata terdapat permasalahan pengambilan keputusan dengan menerapkan program linier yang mempertimbangkan *Multi Objective*. Permasalahan yang *Multi Objective* harus dikombinasikan dalam beberapa cara untuk menjadikannya satu tujuan tunggal, sehingga dapat diselesaikan oleh metode penyelesaian program matematika tujuan tunggal. Metode *Multi Objective Fuzzy Linear Programming* bertujuan untuk mencapai beberapa obyektif dengan data-data *fuzzy* secara bersamaan[3]. Pada umumnya dalam *Multi Objective Linear Programming*, koefisien (dari fungsi tujuan dan kendala) serta nilai sisi kanan dari kendala diasumsikan sebagai nilai tegas (*crisp*). Pada banyak situasi, asumsi tersebut tidaklah benar-benar valid. Hal ini mungkin dikarenakan koefisien serta nilai tersebut tidak didefinisikan dengan baik diakibatkan kurangnya informasi data atau situasi sumber data yang tidak menentu. Untuk itulah dikenal pendefinisian nilai-nilai dalam ruang lingkup *fuzzy*.

2. METODE PENELITIAN

Adapun prosedur-prosedur yang digunakan dalam penelitian kali ini adalah menentukan solusi dari *Multi Objectives Fuzzy Linear Programming Problem*, dengan menyelesaikan MOFLPP sebagai *Linear Programming* bertujuan tunggal dengan hanya menggunakan satu fungsi tujuan dan abaikan yang lainnya, mencari solusi optimal dari model *Linear Programming*, dengan menggunakan metode simpleks, menentukan batas atas dan batas bawah untuk tujuan ke-*k* dari nilai yang diperoleh, menyusun model *fuzzy* awal dan mengubah model *fuzzy* menjadi model *crisp* (program linier konvensional).

3. TINJAUAN PUSTAKA

3.1 Teori Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *A* dikatakan *crisp* (tegas) jika sebarang anggota-anggota yang ada pada himpunan *A* tersebut dikenakan suatu fungsi, maka akan bernilai 1 yakni jika $a \in A$ maka fungsi *f(a)* = 1, namun jika $a \notin A$, maka nilai fungsi yang dikenakan pada *a* yaitu *f*(*a*) = 0. Nilai fungsi yang dikenakan pada sebarang anggota himpunan *A* dikatakan sebagai nilai keanggotaan. Jika pada himpunan *crisp*, hanya mempunyai 2 nilai keanggotaan yaitu 0 dan 1, maka pada himpunan *fuzzy*, nilai keanggotaan dari anggota-anggotanya tidak hanya 0 dan 1 saja tapi berada pada interval tertutup [0,1]. Dengan kata lain himpunan *A* dikatakan *fuzzy* apabila fungsi : $A \to [0,1]$ [5].

Definisi 3.1 [9]

Jika X merupakan himpunan semesta, maka himpunan fuzzy Ã subset dari X didefinisikan dengan fungsi keanggotaan: $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$

dimana untuk setiap $x \in X$ *dan* $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ *menyatakan derajat keanggotaan dari x pada Ã.*

3.2 *Triangular Fuzzy Number* (TFN)

Definisi 3.2 [1]

Triangular Fuzzy Number kiri yaitu $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_2)$ *dengan ketentuan* $a_2 > a_1$ *dapat diinterpretasikan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:*

$$\mu_A[x] = \begin{cases} 1 & x \geq a_2 \\ \dfrac{(x-a_1)}{(a_2-a_1)} & a_1 < x < a_2 \\ 0 & x \leq a_1 \end{cases} \quad \text{... (2)}$$

Definisi 3.3 [1]

Triangular Fuzzy Number kanan yaitu $\tilde{A} = (a_2, a_2, a_3)$ *dengan ketentuan* $a_3 > a_2$ *dapat diinterpretasikan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:*

$$\mu_A[x] = \begin{cases} 1 & x \le a_2 \\ \dfrac{(a_3 - x)}{(a_3 - a_2)} & a_2 < x < a_3 \\ 0 & x \ge a_3 \end{cases} \qquad \text{... (3)}$$

3.3 *Fuzzy Linear Programming*

Konsep dasar dari *linear programing problem* dapat dituliskan sebagai berikut:

Maksimalkan $\quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{cx}$

Fungsi kendala $\quad \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \ge 0$

dengan:

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad \text{... (4)}$$

Dalam model ini diasumsikan bahwa semua elemen matriks ***A***, ***b***, dan ***c*** adalah bilangan riil (*crisp*).

Pada *Fuzzy Linear Programming*, akan dicari suatu nilai z yang merupakan fungsi objektif yang akan dioptimasikan sedemikian hingga tunduk pada batasan-batasan yang dimodelkan dengan menggunakan himpunan *fuzzy*. Oleh karena itu, dimungkinkan beberapa koefisien dari masalah dalam fungsi tujuan (***c***), koefisien sisi kiri fungsi kendala (***A***) atau koefisien sisi kanan fungsi kendala (***b***) berupa bilangan *fuzzy*. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

Maksimalkan $\quad \boldsymbol{z} = \tilde{c}x$

Fungsi kendala $\quad \tilde{A}x \le \tilde{b}$

$\boldsymbol{x} \ge 0$

dimana:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix}, \ \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix}. \qquad \text{... (5)}$$

3.4 *Multi Objective Linear Programming*

Permasalahan yang mengharuskan untuk mengoptimalkan beberapa fungsi tujuan linier secara bersamaan berdasarkan sejumlah kendala linier yang diberikan disebut *Multi Objective Linear Programming Problem* dan dapat digeneralisasikan sebagai berikut:

Maksimalkan:
$$\left.\begin{array}{l} z_1(x) = c_{11}^1 x_1 + c_{12}^1 x_2 + \ldots + c_{1n}^1 x_n \\ z_2(x) = c_{21}^2 x_1 + c_{22}^2 x_2 + \ldots + c_{2n}^2 x_n \\ \cdots \\ z_r(x) = c_{m1}^r x_1 + c_{m2}^r x_2 + \ldots + c_{mn}^r x_n \end{array}\right\} \quad \ldots (6)$$

Fungsi kendala

$\boldsymbol{A}\, x \le \boldsymbol{b}$ dengan $x \ge 0$

dimana:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}, \boldsymbol{c_k} = \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \cdots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & \cdots & c_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}^r & c_{m2}^r & \cdots & c_{mn}^r \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

dengan **z** adalah vektor kolom berdimensi m, $\boldsymbol{c_k}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, $\boldsymbol{x}$ adalah vektor kolom berdimensi n, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, dan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor kolom berdimensi m.

3.5 *Multi Objective Fuzzy Linear Programming*

Berbeda dengan konsep dasar *linear programing problem*, untuk membantu pembuat keputusan agar benar-benar mampu mengoptimalkan fungsi tujuan dan memenuhi kendala yaitu dengan mempertimbangkan ketidaktepatan atau ketidakjelasan dari pembuat keputusan. Dengan kata lain, merubah *linear programing problem* ke dalam bentuk *fuzzy* berikut:

$\boldsymbol{c_k}\, \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z^l}$; $\boldsymbol{Ax} \preceq \boldsymbol{b}$ dimana $\mathbf{x} \ge 0$

Simbol "$\preceq$" menunjukkan versi *fuzzy* dari "$\le$" dan memiliki interpretasi linguistik "pada dasarnya lebih kecil dari atau sama dengan". Simbol "$\succeq$" menunjukkan versi *fuzzy* dari "$\ge$" dan memiliki interpretasi linguistik "pada dasarnya lebih besar dari atau sama dengan".

Fungsi objektif dan fungsi kendala akan simetris apabila diubah ke dalam bentuk sebagai berikut:

$-\boldsymbol{c_k}\, \boldsymbol{x} \preceq -\boldsymbol{z^l}$; $\boldsymbol{Ax} \preceq \boldsymbol{b}$ dimana $\boldsymbol{x} \ge 0$

dengan $-c_k = \begin{bmatrix} -c_{11}^1 & -c_{12}^1 & \cdots & -c_{1n}^1 \\ -c_{21}^2 & -c_{22}^2 & \cdots & -c_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_{m1}^r & -c_{m2}^r & \cdots & -c_{mn}^r \end{bmatrix}$, dan $k = 1, 2, .., r$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, -z_k^l = \begin{bmatrix} -z_1^l \\ -z_2^l \\ \vdots \\ -z_r^l \end{bmatrix}$$

dimana $-z_k^l$ adalah batas bawah dari fungsi tujuan *z*.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\ b_i^0 = \begin{bmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ \vdots \\ b_m^0 \end{bmatrix}$$

misal: $$B = \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \cdots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & \cdots & c_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}^r & c_{m2}^r & \cdots & c_{mn}^r \\ - & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} -z_1^l \\ -z_2^l \\ \vdots \\ -z_r^l \\ --- \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad ...(7)$$

sehingga: $B = \begin{bmatrix} -c_k \\ A \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} -z^l \\ b \end{bmatrix}$, dengan B dan b' adalah matriks sekat.

Untuk $$Bx = \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \cdots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^2 & c_{22}^2 & \cdots & c_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}^r & c_{m2}^r & \cdots & c_{mn}^r \\ - & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{11}^1 x_1 - c_{12}^1 x_2 - \ldots - c_{1n}^1 x_n \\ -c_{21}^2 x_1 - c_{22}^2 x_2 - \ldots - c_{2n}^2 x_n \\ \vdots \\ -c_{m1}^r x_1 - c_{m2}^r x_2 - \ldots - c_{mn}^r x_n \\ -------------- \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}, \qquad ...(8)$$

dengan kata lain Bx adalah matrik sekat, yaitu: $Bx = \begin{bmatrix} c_k x \\ Ax \end{bmatrix}$

sehingga dari (7) dan (8) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & Bx \preceq b' \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad . (9)$$

Untuk memperbaiki ketimpangan pertidaksamaan *fuzzy* $(Bx)_i \preceq b'_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$, dari pengambilan keputusan (*Decision Maker*) pertidaksamaan fuzzy $Bx \preceq b'$, dapat menggunakan fungsi keanggotaan linear berikut:

$$\mu_i((Bx)_i) = \begin{cases} 1 & ;\ (Bx)_i \le b'_i \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - b'_i}{b_i^0} & ;\ b'_i < (Bx)_i < b'_i + b_i^0 \\ 0 & ;\ (Bx)_i \ge b'_i + b_i^0 \end{cases}$$

$\mu_i((Bx)_i)$ dapat digambarkan sebagai derajat dimana $(Bx)_i$ memenuhi pertidaksamaan *fuzzy* $(Bx)_i \preceq b'_i$ (dimana $(Bx)_i$ menunjukkan baris ke-*i* dari *Bx* dan b'_i menunjukkan baris ke-*i* dari b', dengan *i* = 1,2,..,*m*) (Supriyanto, 2011).

di mana untuk setiap b_i^0 adalah konstanta untuk mengekspresikan toleransi yang dapat diterima dari ketimpangan pertidaksamaan ke-*i*. Diasumsikan bahwa fungsi keanggotaan ke-*i* harus 1 jika $(Bx)_i \preceq b'_i$, 0 jika $(Bx)_i \succeq b'_i + b_i^0$, dan antara 0 dan 1 jika $b'_i < (Bx)_i \le b'_i + b_i^0$.

Mengacu pada aturan *fuzzy decision* (Supriyanto, 2011), fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* untuk (9) adalah

$$\min_{i=0,\dots,m} \{\mu_i((Bx)_i)\}$$

yaitu nilai terkecil (minimal) dari nilai-nilai yang diperoleh dari fungsi keanggotaan $(Bx)_i$. Menemukan keputusan maksimum adalah untuk memilih x^* sedemikian sehingga.

$$\mu_D(x^*) = \max_{x\ge 0} \min_{i=0,\dots,m} \{\mu_i((Bx)_i)\}$$

$$\mu_D(x^*) = \max_{x\ge 0} \min_{i=0,\dots,m} \left\{1 - \frac{(Bx)_i - b'_i}{b_i^0}\right\}$$

$$\mu_D(x^*) = \max_{x\ge 0} \min_{i=0,\dots,m} \left\{\frac{b_i^0}{b_i^0} - \frac{(Bx)_i - b'_i}{b_i^0}\right\}$$

$$\mu_D(x^*) = \max_{x\ge 0} \min_{i=0,\dots,m} \left\{\frac{b_i^0 - (Bx)_i + b'_i}{b_i^0}\right\}$$

Dengan memperkenalkan variabel tambahan λ, dengan $\lambda = \min\{\mu_i((Bx)_i)\}$, dimana λ sesuai dasarnya dengan derajat keanggotaan *x* dalam keputusan himpunan *fuzzy* [10] . λ merupakan variabel ukuran (*measuring variable*) yang sesuai dengan fungsi keanggotaan dari keputusan *fuzzy* (*fuzzy decision*) , yang mencerminkan tingkat aspirasi/pemenuhan tujuan untuk sebuah sistem [3], permasalahan ini dapat diubah ke dalam bentuk pemrograman linier konvensional berikut:

maksimalkan $z = \lambda$

Fungsi kendala $\lambda \le \dfrac{b_i^0 - (Bx)_i + b'_i}{b_i^0}$

$$\Longleftrightarrow \lambda b_i^0 \le b_i^0 - (Bx)_i + b'_i$$

$$\Longleftrightarrow \lambda b_i^0 + (Bx)_i \le b'_i + b_i^0$$

$$x \geq 0$$

Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem (MOFLPP) secara garis besar menurut Jana & Roy (2004) dapat dibagi menjadi 2 macam, yaitu MOFLPP dengan nilai kanan pada fungsi kendala merupakan bilangan *fuzzy* dan MOFLPP dengan koefisien fungsi tujuan *fuzzy* dan fungsi kendala *fuzzy*. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas *Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem* dengan nilai kanan pada fungsi kendala merupakan bilangan *fuzzy*.

3.6 *Multi Objective Linear Programming Problem* (MOLPP) dengan Kendala *fuzzy*

Multi Objective Linear Programming Problem dengan kendala campuran secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

Maksimalkan $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j,$ ... (10)

Fungsi kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1, 2, ..., m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

Ketika nilai kanan dari fungsi kendala adalah *Triangular Fuzzy Number* (TFN) maka (10) menjadi:

Maksimalkan $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j$ ... (11)

Fungsi kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \preceq \tilde{b}_i,\ i = 1, 2, ..., m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

Akan berlaku beberapa asumsi sebagai berikut:

TFN kanan $\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$ dengan toleransi b_i^0 dimana $(b_i^0 > 0)$ untuk $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \preceq \tilde{b}_i;\ i = 1, 2, ..., m$

Sehingga (10) yang telah dilengkapi dengan toleransi dapat dituliskan sebagai berikut:

Maksimalkan $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j,\ k = 1, 2, \ldots, r$ ... (12)

Fungsi kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \succeq b_i + b_i^0,\ i = 1, 2, ..., m$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

(Jana & Roy, 2004)

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Permasalahan pengambilan keputusan yang berbentuk program linier bertujuan ganda atau *Multi Objective Linear Programming* secara umum dapat diformulasikan seperti pada persamaan (10) yaitu sebagai berikut:

Maksimalkan $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j , \quad k = 1, 2, \ldots, r$

Fungsi kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0, \; i = 1, 2, ..., m$

dengan koefisien *a*, *b*, dan *c* merupakan bilangan *crisp* atau tegas. Dengan kata lain data-data yang akan dimasukkan dalam persamaan haruslah angka yang *valid* sehingga tidak menimbulkan kesalahan dalam perhitungan dan menghasilkan solusi dari pengambilan keputusan yang optimal.

Mengganti bilangan *crisp* atau tegas menjadi bilangan *fuzzy* (dalam hal ini adalah *Triangular Fuzzy Number*) merupakan sebuah solusi mengatasi ketidakakuratan data tersebut. Merubah bilangan *crisp* atau tegas menjadi bilangan *fuzzy* dalam hal ini adalah menambahkan toleransi pada bilangan tersebut sehingga menjadi nilai keanggotaan segitiga *fuzzy (Triangular Fuzzy Number)*.

Permasalahan *Multi Objective Linear Programming* dengan koefisien *fuzzy* disebut juga *Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem* (MOFLPP). *Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem* (MOFLPP) dengan nilai kanan pada fungsi kendala merupakan bilangan *fuzzy* dapat dicari solusi optimalnya dengan terlebih dahulu menyelesaikannya sebagai *Linear Programming* konvensional bertujuan tunggal.

4.1 *Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem* Dengan Nilai Kanan Pada Fungsi Kendala Merupakan Bilangan *Fuzzy*

Rincian langkah-langkah untuk mencari solusi dari MOFLPP adalah sebagai berikut:

Algoritma

Langkah 1. menyelesaikan MOFLPP sebagai *Linear Programming* bertujuan tunggal dengan hanya menggunakan satu fungsi tujuan dan abaikan yang lainnya.

Maksimalkan: $z_1 = c_{11}^1 x_1 + c_{12}^1 x_2 + \ldots + c_{1n}^1 x_n$

Maksimalkan: $z_2 = c_{21}^2 x_1 + c_{22}^2 x_2 + \ldots + c_{2n}^2 x_n$

Fungsi Kendala:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\preceq \tilde{b}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\preceq \tilde{b}_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \quad \vdots \qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\preceq \tilde{b}_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

dengan $\tilde{b}_1 = (b_1, b_1, b_1 + b_1^0)$ $\quad \tilde{b}_m = (b_m, b_m, b_m + b_m^0)$

$\tilde{b}_2 = (b_2, b_2, b_2 + b_2^0)$

Untuk bisa dicari solusinya terlebih dahulu MOFLPP akan diuraikan menjadi *Linear Programming* bertujuan tunggal, yaitu sebagai berikut:

Maksimalkan: $z_1 = c_{11}^1 x_1 + c_{12}^1 x_2 + \ldots + c_{1n}^1 x_n$

Fungsi Kendala:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

Maksimalkan: $z_1 = c_{11}^1 x_1 + c_{12}^1 x_2 + \ldots + c_{1n}^1 x_n$

Fungsi Kendala:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 + b_1^0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 + b_2^0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m + b_m^0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

Maksimalkan: $z_2 = c_{21}^2 x_1 + c_{22}^2 x_2 + \ldots + c_{2n}^2 x_n$

Fungsi Kendala:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

Maksimalkan: $z_2 = c_{21}^2 x_1 + c_{22}^2 x_2 + \ldots + c_{2n}^2 x_n$

Fungsi Kendala:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 + b_1^0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 + b_2^0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m + b_m^0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

Langkah 2. mencari solusi optimal dari model *Linear Programming* menggunakan metode simpleks.

Langkah 3. menentukan batas atas dan batas bawah untuk tujuan ke-*k* dari nilai yang diperoleh pada langkah 2.

$z_k^l = \min\{z_k(x_1^{k.s}, x_2^{k.s}, \ldots, x_n^{k.s})\}$ dengan $s = 1, 2$

$z_k^u = \text{maks}\{z_k(x_1^{k.s}, x_2^{k.s}, \ldots, x_n^{k.s})\}$ dengan $s = 1, 2$

Langkah 4. menyusun model *fuzzy* awal.

$$\begin{aligned} -c_{11}^1 x_1 - c_{12}^1 x_2 - \ldots - c_{1n}^1 x_n &\preceq -z_1^l \\ -c_{21}^2 x_1 - c_{22}^2 x_2 - \ldots - c_{2n}^2 x_n &\preceq -z_2^l \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$-c_{m1}^{k}x_1 - c_{m2}^{k}x_2 - \ldots - c_{mn}^{k}x_n \preceq -z_k^{l}$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \preceq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \preceq b_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \preceq b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Langkah 5. mengubah model *fuzzy* menjadi model *crisp* (program linier konvensional).

Maksimalkan $z = \lambda$

Fungsi kendala
$$c_{11}^{1}x_1 + c_{12}^{1}x_2 + \ldots + c_{1n}^{1}x_n + \lambda(z_1^u - z_1^l) \leq z_1^u$$
$$c_{21}^{2}x_1 + c_{22}^{2}x_2 + \ldots + c_{2n}^{2}x_n + \lambda(z_2^u - z_2^l) \leq z_2^u$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$c_{m1}^{k}x_1 + c_{m2}^{k}x_2 + \ldots + c_{mn}^{k}x_n + \lambda(z_k^u - z_k^l) \leq z_k^u$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \lambda b_1^0 \geq b_1 + b_1^0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \lambda b_2^0 \leq b_2 + b_2^0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \lambda b_m^0 \leq b_m + b_m^0$$
$$0 \leq \lambda \leq 1,\ \ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

4.2 Contoh Permasalahan

Minimalkan $z_1 = 3500x_1 + 40000x_2 + 5800x_3 + 4000x_4$

Minimalkan $z_2 = 24.46x_1 + 7.95x_2 + 1.8x_3 + 30.4x_4$

Kendala
$$11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \succeq (20, 60, 60),$$
$$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \succeq (4, 18, 18),$$
$$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \succeq (20, 30, 30),$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

Langkah 1. mencari solusi dari permasalahan di atas. Pertama-tama permasalahan dipecah menjadi 4 sub permasalahan, yaitu sebagai berikut:

Minimalkan $z_{11} = 3500x_1 + 40000x_2 + 5800x_3 + 4000x_4$

Kendala
$$11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \geq 60,$$
$$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \geq 18,$$
$$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \geq 30,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

Minimalkan $z_{12} = 3500x_1 + 40000x_2 + 5800x_3 + 4000x_4$

Kendala $11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \geq 20,$
$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \geq 4,$
$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \geq 20,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

Minimalkan $z_{21} = 24.46x_1 + 7.95x_2 + 1.8x_3 + 30.4x_4$
Kendala $11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \geq 60,$
$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \geq 18,$
$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \geq 30,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

Minimalkan $z_{22} = 24.46x_1 + 7.95x_2 + 1.8x_3 + 30.4x_4$
Kendala $11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \geq 20,$
$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \geq 4,$
$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \geq 20,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

Langkah 2. mencari solusi optimal dari sub permasalahan. Dari perhitungan dengan menggunakan simpleks diperoleh hasil perhitungan sub permasalahan, yaitu sebagai berikut:
sub permasalahan (12)
$x^{1.1} = (x_1^{1.1}, x_2^{1.1}, x_3^{1.1}, x_4^{1.1}) = (0;0;0;3.5108), z_{1.1}(x^{1.1}) = 14043.3,$
sub permasalahan (13)
$x^{1.2} = (x_1^{1.2}, x_2^{1.2}, x_3^{1.2}, x_4^{1.2}) = (0;0;0;1.1703), z_{1.2}(x^{1.2}) = 4681.1,$
sub permasalahan (14)
$x^{2.1} = (x_1^{2.1}, x_2^{2.1}, x_3^{2.1}, x_4^{2.1}) = (0;2.2866;1.1079;0), z_{2.1}(x^{2.1}) = 20.17,$
sub permasalahan (15)
$x^{2.2} = (x_1^{2.2}, x_2^{2.2}, x_3^{2.2}, x_4^{2.2}) = (0;1.5244;0.2184;0), z_{2.2}(x^{2.2}) = 12.51,$

Langkah 3. Mencari nilai batas atas (z_k^u) dan batas bawah (z_k^l) dari fungsi objektif ke-4 sub permasalahan pada langkah 2.

$$z_1^l = \min\left\{z_1(x^{1.1}), z_1(x^{1.2}), z_1(x^{2.1}), z_1(x^{2.2})\right\}$$
$$= \min\{14043.3; 4681.1; 97889.82; 62242.72\} = 4681.1$$
$$z_1^u = \max\left\{z_1(x^{1.1}), z_1(x^{1.2}), z_1(x^{2.1}), z_1(x^{2.2})\right\}$$
$$= \max\{14043.3; 4681.1; 97889.82; 62242.72\} = 97889.82$$

$$z_2^l = \min\left\{z_2(x^{1.1}), z_2(x^{1.2}), z_2(x^{2.1}), z_2(x^{2.2})\right\}$$

$$= \min\{106.7283; 35.57712; 20.17269; 12.51\} = 12.51$$

$$z_2^u = \max\left\{z_2(x^{1.1}), z_2(x^{1.2}), z_2(x^{2.1}), z_2(x^{2.2})\right\}$$

$$= \max\{106.7283; 35.57712; 20.17269; 12.51\} = 106.7283$$

Langkah 4. menyusun model *fuzzy* awal:

$$3500x_1 + 40000x_2 + 5800x_3 + 4000x_4 \preceq 97889.82$$

$$24.46x_1 + 7.95x_2 + 1.8x_3 + 30.4x_4 \preceq 106.7283$$

$$11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 \succeq 20,$$

$$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 \succeq 4,$$

$$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 \succeq 20,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$$

Langkah 5. mengubah model *fuzzy* menjadi model *crisp* (program linier konvensional) yang dirumuskan sebagai berikut:

Maksimalkan $z = \lambda$

Fungsi Kendala

$$3500x_1 + 40000x_2 + 5800x_3 + 4000x_4 + 93208.72\lambda \leq 97889.82$$

$$24.46x_1 + 7.95x_2 + 1.8x_3 + 30.4x_4 + 94.2183\lambda \leq 106.7283$$

$$11.35x_1 + 71.45x_2 + 22.65x_3 + 17.09x_4 + 40\lambda \geq 60,$$

$$12.15x_1 + 0.42x_2 + 15.38x_3 + 9.44x_4 + 14\lambda \geq 18,$$

$$28.62x_1 + 13.12x_2 + 23.77x_4 + 10\lambda \geq 30,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Model *Linear Programming* di atas dapat dicari solusi optimalnya dengan menggunakan metode simpleks.

5. KESIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa untuk mencari solusi dari *Multi Objective Fuzzy Linear Programming Problem* (MOLPP) dengan kendala *fuzzy* terlebih dahulu akan diselesaikan sebagai *Linear Programming* bertujuan tunggal. Dari solusi-solusi fungsi tujuan yang diperoleh kemudian dapat ditentukan nilai batas atas dan batas bawah. Nilai batas atas dan batas bawah ini sebagai acuan untuk menyusun model *fuzzy* awal. Model *fuzzy* selanjutnya akan dirubah menjadi model *crisp* (program linier konvensional) dan dengan metode simplek dapat dicari solusi optimalnya. Dari contoh permasalahan dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan *Multi Objective Fuzzy Linear Programming* dapat dicari solusi optimal dari beberapa fungsi tujuan sekaligus. Solusi optimal dalam hal ini adalah diperolehnya nilai-nilai variabel keputusan yaitu $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ yang jika disubstitusikan ke dalam fungsi kendala hasilnya sesuai dengan batasan jumlah sumber daya yang ditetapkan, sekaligus apabila di substitusikan ke dalam fungsi tujuan hasilnya akan diperoleh solusi paling optimal untuk tujuan-tujuan yang diharapkan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Eghbali, et. al., 2012. Optimizing human diet problem based on price and taste using multi-objective fuzzy linear programming approach. *International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications.*

[2]. Jana. B. dan Roy, Tapan Kumar. 2004. *Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model*. Deemed University. India.

[3]. Kahraman, Cengiz. 2008. *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making Theory and Applications*. Turki. Springer.

[4]. Kusumadewi. S. dan Purnomo, Hari. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[5]. Sahuri, A. 2007. *Menyelesaikan Model Masalah Diet Dengan Metode Grafik Dan Metode Simpleks*. Universitas Islam Negeri Malang Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Malang.

[6]. Sipayung, E. T., 2011. *Aplikasi Multi Objective Fuzzy Linear Programming Dalam Masalah Perencanaan Persediaan Produksi*. Universitas Sumatera Utara Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Medan.

[7]. Supriyanto. 2011. *Fuzzy Multi-Objective Linear Programming and Simulation Approach to the Development of Valid and Realistic Master Production Schedule*. Universität Duisburg-Essen.

[8]. Winston, L. W. 1994. *Operation Research: Applications and Algorithms*. Indiana University. Duxbury Press.

[9]. Zadeh, L.A. 1978. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy sets and systems*, 1, 3-28.