Jurnal Matematika Murni dan Terapan "*εpsilon*"
Vol. 07, No.01, (2013), Hal. 1 – 12

SIFAT P-KONVEKS PADA RUANG FUNGSI MUSIELAK-ORLICZ TYPE BOCHNER

Yulia Romadiastri

Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Walisongo Semarang
Email: astri_hlm@yahoo.co.id

Abstract. In this paper, we described about Musielak-Orlicz function spaces of Bochner type. It has been obtained that Musielak-Orlicz function space $L_\phi(\mu, X)$ of Bochner type becomes a Banach space. It is described also about P-convexity of Musielak-Orlicz function space $L_\phi(\mu, X)$ of Bochner type. It is proved that the Musielak-Orlicz function space $L_\phi(\mu, X)$ of Bochner type is P-convex if and only if both spaces L_ϕ and X are P-convex.

Keywords : Musielak-Orlicz function, Musielak-Orlicz function space of Bochner type, and p-Convex

1. Pendahuluan

Ruang Orlicz diperkenalkan pertama kali pada tahun 1931 oleh W. Orlicz. Teori ruang Orlicz mempunyai peranan yang sangat penting dan telah banyak diterapkan ke dalam berbagai cabang matematika, salah satunya pada masalah *Optimal Control*. Pengembangan dan penyempurnaan dari ruang Orlicz sendiri juga mngalami kemajuan yang sangat pesat, salah satunya adalah Musielak dan Orlicz yang mengembangkan suatu ruang fungsi yang dibangkitkan oleh modular yang mempunyai sifat konveks. Dalam hal ini, $\widetilde{I}_\phi(f) = \int_T \phi\left(t, \|f(t)\|_X\right) d\mu$ yang merupakan modular konveks membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz type Bochner

$$L_\phi(\mu, X) = \left\{ f \in L^0(T, X) : \|f(\cdot)\|_X \in L_\phi \right\},$$

yang juga merupakan ruang Banach.

Sifat kekonvekan pada ruang Banach dan sifat refleksif juga telah banyak dikembangkan oleh banyak matematikawan. Ye Yining, He Miaohong dan R.

Pluciennik (1991) di dalam tulisannya yang berjudul "*P-convexity and reflexivity of Orlicz spaces*" menyatakan bahwa sifat refleksif dan sifat P-konveks pada ruang Orlicz adalah ekuivalen. Hal yang sama juga terjadi pada ruang fungsi Musielak-Orlicz maupun ruang barisan Musielak-Orlicz.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Pengertian Dasar

Definisi 2.1. *Suatu himpunan X tak kosong disebut* ***ruang linier (ruang vektor)*** *atas lapangan $\mathbb{R}$ jika memenuhi*

L1. $(X, +)$ *merupakan grup abelian*

L2. Untuk $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $\alpha x \in X$ dan
$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$
$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
$1x = x$ *dengan 1 merupakan elemen satuan pada* $\mathbb{R}$

Definisi 2.2. *Diberikan ruang linier X. Fungsi $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ disebut* ***norma*** *jika*

B1. $\|x\| \geq 0$ *untk setiap $x \in X$*
$\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika $x = 0$*

B2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$*

B3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *untuk setiap $x, y \in X$*

Ruang linier X yang dilengkapi dengan suatu norma $\| \cdot \|$ disebut ruang bernorma dan dilambangkan dengan $(X, \| \cdot \|)$. Selanjutnya, jika normanya sudah tertentu, maka ruang bernorma cukup ditulis X saja. Setiap ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang metrik terhadap $d(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$. Pada pembahasan selanjutnya, ukuran dan integral yang digunakan adalah ukuran dan integral Lebesgue, kecuali disebutkan lain.

Definisi 2.3. *Diberikan ruang bernorma $(X, \| \cdot \|)$.*

(i). Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan ***konvergen*** *ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x dinotasikankan dengan $\|x_n - x\| \to 0$, untuk $n \to \infty$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

(ii). Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan ***terbatas*** *jika terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|x_n\| \leq M$ untuk setiap bilangan asli n.*

(iii). Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ *disebut barisan* ***Cauchy*** *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *dengan sifat untuk setiap dua bilangan asli* $m.n \geq n_0$ *berlaku* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Teorema 2.4. *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$. *Jika barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *konvergen maka* $\{x_n\}$ *merupakan barisan cauchy.*

Teorema 2.5. *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$. *Jika barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *barisan cauchy maka* $\{x_n\}$ *terbatas.*

Akibat 2.6. *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$. *Jika barisan* $\{x_n\} \subseteq X$ *konvergen maka* $\{x_n\}$ *terbatas.*

Definisi 2.7. *Ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$ *dikatakan* ***lengkap*** *jika setiap barisan cauchy di dalam* X *konvergen. Sedangkan ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|)$ *disebut* ***ruang Banach*** *jika* $(X, \|\cdot\|)$ *lengkap.*

2.2. Ruang Lebesgue

Definisi 2.8. *Diberikan himpunan* $T \neq \emptyset$ *dan himpunan kuasa* T, *ditulis* 2^T, *didefinisikan* $2^T = \{A : A \subset T\}$. *Keluarga himpunan* $\Sigma \subset 2^T$ *disebut* ***aljabar himpunan*** *jika*

1. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
2. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

Selanjutnya, $\Sigma \subset 2^T$ *disebut* ***aljabar-***σ *jika*

1. Σ *aljabar, dan*
2. $A_1, A_2 \ldots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i}^{\infty} A_i \in \Sigma$

Definisi 2.9. *Diberikan* $f : T \to \mathbb{R}^*$ *fungsi terukur-*μ. *Fungsi* f *dikatakan* ***terintegral Lebesgue terhadap ukuran-***$\boldsymbol{\mu}$ *(atau dikatakan* ***terintegral-***$\boldsymbol{\mu}$*), jika terdapat barisan fungsi sederhana* $\{f_n\}$ *sehingga* $f_n(x) \to f(x)$, *h.d. pada* $x \in T$ *dan untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* n *sehingga* $\int_T |f_i(x) - f_j(x)|\, \mu(dx) < \varepsilon$ *untuk setiap* $i, j \geq n$. *Selanjutnya, nilai hingga dari* $\lim_{n\to\infty} \int_T f_n(x)\mu(dx)$ *disebut* ***integral Lebesgue*** *dari fungsi* f *dan dinotasikan dengan* $\int_T f(x)\mu(dx)$ *atau* $\int_T f d\mu$.

Diberikan himpunan terukur X. Koleksi semua fungsi terukur-μ dari X ke $\mathbb{R}^*$ dinotasikan dengan $M(X)$. Dengan menggunakan sifat-sifat terukur, dapat ditunjukkan bahwa $M(X)$ merupakan ruang linear. Untuk $1 \leq p < \infty$, didefinisikan $L^p(X) = \{f \in M(X) \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$. Dengan kata lain, $L^p(X)$ merupakan koleksi semua fungsi terukur $f \in M(X)$, sehingga $|f|^p$ terintegral-μ pada X.

Diberikan fungsi f bernilai riil diperluas pada himpunan terukur X. Bilangan real M dikatakan **batas essensial** untuk fungsi f jika $|f(x)| \leq M$ $h.d$ pada X. Fungsi f dikatakan **terbatas essensial** jika f mempunyai batas essensial. Dengan kata lain, fungsi f terbatas essensial pada X jika f terbatas, kecuali pada himpunan dengan ukuran nol. Selanjutnya, **supremum essensial** f pada E didefinisikan sebagai
$esssup\{|f(x)| : x \in X\} = M \Leftrightarrow \exists A \subset X, \mu(A) = 0 \ni \sup\{|f(x)| : x \in X - A\} = M$. Himpunan semua fungsi terukur yang terbatas essensial pada X didefinisikan sebagai $L^\infty(X)$, dengan $L^\infty(X) = \{f : esssup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty\}$ Dapat ditunjukkan bahwa $L^p(X)$ dengan $1 \leq p < \infty$, merupakan ruang linear. Ruang $L^p(X)$, dengan $1 \leq p < \infty$ disebut **ruang Lebesgue Umum**.

2.3. Ruang Bermodular

Definisi 2.10. *Diberikan sebarang ruang linier T atas lapangan $\mathbb{R}$. Fungsi non negatif $\rho : T \to [0, \infty)$ disebut **modular** pada T jika untuk setiap $x, y \in T$ berlaku:*

(M1) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(M2) $\rho(-x) = \rho(x)$

(M3) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *jika* $\alpha, \beta \in [0, 1]$ *dengan* $\alpha + \beta = 1$

*Ruang linier T yang dilengkapi dengan suatu modular disebut **ruang modular** dan dilambangkan dengan (T, ρ)*

Suatu $B \subseteq Y$, dengan Y ruang linier, disebut **himpunan konveks** jika untuk setiap $x, y \in B$ dan $\alpha, \beta \in [0, 1]$ dengan $\alpha + \beta = 1$, berlaku $\alpha x + \beta y \in B$. Fungsi $f : B \to \mathbb{R}$ dikatakan **konveks**, jika B konveks dan untuk setiap $x, y \in B$ dan $\alpha, \beta \in [0, 1]$ dengan $\alpha + \beta = 1$, berlaku $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$. Selanjutnya, modular ρ dikatakan memenuhi sifat konveks jika ρ merupakan fungsi konveks. Pada pembahasan selanjutnya, yang dimaksud modular adalah modular yang memenuhi sifat konveks, kecuali bila dinyatakan lain.

Teorema 2.11. *(i) Jika $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ dengan $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ maka $\rho(\alpha_1 x) \leq \rho(\alpha_2 x)$ untuk setiap $x \in X$.*

(ii) Jika $\rho(x) < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = \theta$

3. Ruang Fungsi Musielak-Orlicz type Bochner

3.1. Ruang Fungsi Musielak-Orlicz type Bochner

Definisi 3.1. *Diberikan sebarang ruang linier T. Fungsi $\phi : T \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ disebut **fungsi Musielak - Orlicz** jika:*

1. *$\phi(t,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ untuk setiap $t \in T$*
2. *$\phi(t,-u) = \phi(t,u)$*
3. *$\phi(t,\cdot)$ fungsi kontinu*
4. *$\phi(t,\cdot)$ tak naik pada $(0,\infty)$*
5. *$\phi(\cdot,u)$ terukur untuk setiap $u \in \mathbb{R}$*
6. *$\phi(t,\cdot)$ konveks*
7. *$\frac{\phi(t,u)}{u} \to 0$ jika $u \to 0$ pada T*

Untuk fungsi Musielak-Orlicz ϕ, didefinisikan fungsi $I_\phi : L^0 \to [0,\infty)$ dengan $I_\phi(f) = \int\limits_T \phi\left(t, f(t)\right) d\mu$ untuk setiap $f \in L^0$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi I_ϕ merupakan modular konveks. Kemudian, didefinisikan ruang fungsi Musielak-Orlicz L_ϕ, dengan

$$L_\phi = \left\{ f \in L^0 : I_\phi(cf) < \infty \text{ untuk suatu } c > 0 \right\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa ruang fungsi Musielak-Orlicz L_ϕ merupakan ruang linear. Fungsi Musielak-Orlicz ϕ dan ψ dikatakan saling berkomplemen jika $|xy| \le \phi(x) + \psi(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, untuk setiap fungsi Musielak-Orlicz ϕ , didefinisikan fungsi $\phi^* : T \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$, dengan $\phi^*(t,v) = \sup\limits_{u>0} \{u|v| - \phi(t,u)\}$, untuk setiap $v \in \mathbb{R}$ dan $t \in T$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi ϕ^* juga merupakan fungsi Musielak-Orlicz.

Definisi 3.2. *Fungsi Musielak - Orlicz ϕ dikatakan memenuhi **kondisi-$\boldsymbol{\Delta_2}$** , ditulis $\phi \in \Delta_2$, jika terdapat konstanta $k > 0$ dan $u_0 \ge 0$ sehingga $\phi(t, 2u) \le k\phi(t,u)$, untuk setiap $t \in T$ dan $u \ge u_0$.*

Selanjutnya, didefinisikan suatu fungsi $\widetilde{I}_\phi : L^0(T,X) \to (0,\infty)$, dengan

$$\widetilde{I}_\phi(f) = \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X) d\mu \text{ untuk setiap } f \in L^0(T,X)$$

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi $\widetilde{I}_\phi$ merupakan modular. Untuk fungsi Musielak-Orlicz ϕ, didefinisikan $L_\phi(\mu,X) = \{f \in L^0(T,X) : \|f(\cdot)\|_X \in L_\phi\}$. Dapat ditunjukkan bahwa $L_\phi(\mu,X)$ merupakan ruang linear. Didefinisikan $\|\cdot\| : L_\phi(\mu,X) \to \mathbb{R}$, dengan $\|f\| = \left\|\|f(\cdot)\|_X\right\|_\phi$, untuk setiap $f \in L_\phi(\mu,X)$. Dapat ditunjukkan bahwa $(L_\phi(\mu,X), \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Teorema 3.3. *Ruang bernorma $(L_\phi(\mu,X), \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach.*

Selanjutnya, ruang fungsi $(L_\phi(\mu,X), \|\cdot\|)$ disebut ruang fungsi Musielak - Orlicz type Bochner.

3.2. Sifat P-konveks pada Ruang Fungsi Musielak-Orlicz Type Bochner

Definisi 3.4. *Diberikan ruang bernorma* $(X, \|\cdot\|_X)$. *Himpunan* $S(X) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ *disebut* ***luasan dengan pusat O*** *dan himpunan* $S(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ *disebut* ***bola satuan tertutup***.

Definisi 3.5. *Ruang Banach* X *disebut* ***refleksif*** *jika untuk suatu* $\varepsilon > 0$ *terdapat* δ *sehingga* $\|x - y\| < \varepsilon$, *untuk* $x, y \in U(X)$ *dengan* $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta$.

Definisi 3.6. *Ruang linear bernorma* X *dikatakan* ***P-konveks***, *jika terdapat* $\varepsilon > 0$ *dan* $n \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S(X)$, *berlaku* $\min\limits_{i \neq j, i,j \leq n} \|x_i - x_j\|_X \leq 2(1-\varepsilon)$.

Lemma 3.7. *Ruang Banach* X *P-konveks jika dan hanya jika terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *dan* $\delta > 0$ *sehingga untuk setiap* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X - \{0\}$ *terdapat bilangan bulat* i_0, j_0 *sehingga berlaku*

$$\left\|\frac{x_{i_0} - x_{j_0}}{2}\right\|_X \leq \frac{\|x_{i_0}\|_X + \|x_{j_0}\|_X}{2}\left(1 - \frac{2\delta_0 \min\{\|x_{i_0}\|_X, \|x_{j_0}\|_X\}}{\|x_{i_0}\|_X + \|x_{j_0}\|_0}\right)$$

Teorema 3.8. *Untuk setiap fungsi Musielak-Orlicz* ϕ *berlaku, jika* $\phi^* \in \delta_2$ *maka untuk sebarang* $a > 1$ *terdapat* $\xi > 1$ *sehingga* $\phi\left(t, \frac{\xi}{a}u\right) \leq \frac{\xi^{-1}}{a}\phi(t,u)$ *untuk setiap* $u \in \mathbb{R}, t \in T$.

Lemma 3.9. *Diketahui* ϕ *dan* ϕ^* *memenuhi kondisi* Δ_2. *Untuk setiap* $\varepsilon \in (0,1)$ *terdapat fungsi terukur* $h_\varepsilon : T \to \mathbb{R}^+$ *dengan* $I_\phi(h_\varepsilon) < \varepsilon$, *bilangan* $a(\varepsilon) \in (0,1)$ *dan* $\gamma = \gamma(a(\varepsilon)) \in (0,1)$ *sedemikian sehingga* μ *untuk h.d.* $t \in T$ *berlaku* $\phi\left(t, \frac{v}{2}\right) \leq \frac{1-\gamma}{2}|\phi(t,u) + \phi(t,v)|$ *untuk setiap* $u \geq h_\varepsilon(t)$ *dan* $\left|\frac{v}{u}\right| < a$.

Lemma 3.10. *Jika* $\phi \in \Delta_2$, *maka untuk setiap* $\varepsilon \in (0,1)$ *terdapat barisan tak naik dari himpunan-himpunan terukur yang berukuran hingga* $\{B_m^\alpha\}$, *sehingga* $\mu\left(T - \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m^\alpha\right) = 0$ *dan untuk setiap* $m \in \mathbb{N}$ *terdapat* $k_m^\alpha > 2$ *sehingga* $\phi(t, 2u) \leq k_m^\alpha \phi(t,u)$ *untuk* μ *h.d.,* $t \in B_m^\alpha$ *dan untuk setiap* $u \geq \alpha f(t)$, *dimana* f *dari kondisi* Δ_2.

Lemma 3.11. *Jika* $\phi \in \Delta_2$, *maka untuk setiap* $\varepsilon \in (0,1)$ *terdapat fungsi terukur* $g_\varepsilon : T \to \mathbb{R}^+$ *dan* $k_\varepsilon > 2$ *sehingga* $I_\varepsilon(g_\varepsilon) < \varepsilon$ *dan* $\phi(t, 2u) \leq k_\varepsilon \phi(t,u)$ *untuk* μ *h.d.,* $t \in T$, *dan* $u \geq g_\varepsilon(t)$.

Teorema 3.12. *Jika ruang Banach* X *P-konveks, maka* X *refleksif.*

Teorema 3.13. *Diketahui* ϕ *fungsi Musielak-Orlicz dan* X *ruang Banach. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(a). $L_\phi(\mu, X)$ *P-konveks*

(b). L_ϕ *dan* X *P-Konveks*

(c). L_ϕ *refleksif dan* X *P-Konveks*

(d). X P-konveks, $\phi \in \Delta_2$ dan $\phi^* \in \Delta_2$

Bukti. $(a) \Rightarrow (b)$ Diketahui $L_\phi(\mu, X)$ P-konveks. Karena ruang L_ϕ dan X *embedded isometrically* terhadap $L_\phi(\mu, X)$ dan sifat P-konveks juga berlaku pada subruang, maka diperoleh L_ϕ dan X P-konveks.

$(b) \Rightarrow (c)$ Diketahui L_ϕ dan X P-konveks. Menurut teorema 3.12, diperoleh L_ϕ refleksif.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sifat refleksif pada ruang fungsi Musielak-Orlicz L_ϕ ekuivalen dengan $\phi \in \Delta_2$ dan $\phi^2 \in \Delta_2$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Diketahui X P-konveks, $\phi \in \Delta_2$ dan $\phi^* \in \Delta$. Dapat dipilih $n_0 \in \mathbb{N}$. Kemudian, untuk setiap $t \in T$ didefinisikan $f(t) = \max\left\{h_{\frac{1}{4n_0}}(t), g_{\frac{1}{4n_0}}(t)\right\}$, dimana fungsi $h_{\frac{1}{4n_0}}$ dan $g_{\frac{1}{4n_0}}$ adalah fungsi terukur dengan $\varepsilon = \frac{1}{4n_0}$. Akibatnya, $I_\phi(f) < \frac{1}{2n_0}$. Dipilih $\alpha = a$. Karena $\phi \in \Delta_2$ maka diperoleh $I_\phi\left(\frac{1}{\alpha}f\right) < \infty$. Dipilih himpunan $B^a_{m_0}$ sehingga memenuhi $\int\limits_{T\setminus B^a_{m_0}} \phi\left(t, \frac{f(t)}{a}\right) d\mu < \frac{1}{2n_0}$. Dipilih $l \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{a} \leq 2^l$. Terdapat bilangan $k^a_{m_0} > 2$ sehingga $\phi\left(t, \frac{1}{a}v\right) \leq \left(k^a_{m_0}\right)^l \phi(t, v)$ untuk μ h.d $t \in B^a_{m_0}$, ketika $v \geq af(t)$. Kemudian, dipilih $\frac{v}{a} = u$ dan $\frac{1}{\left(k^a_{m_0}\right)^l} = \beta(a, m_0) = \beta_{m_0}$. Diperoleh $\phi(t, au) \geq \beta_{m_0}\phi(t, u)$, untuk μ-h.d $t \in B^a_{m_0}$, dan untuk setiap $u \geq f(t)$. Selanjutnya, didapat $\phi\left(t, \frac{1}{a}v\right) \leq (k_\varepsilon)^l\phi(t, v)$ untuk μ-h.d $t \in T$, dan $v \geq f(t)$, dimana $k_\varepsilon = k_{\frac{1}{4n_0}}$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\phi(t, au) \geq \beta\phi(t, u)$, untuk μ-h.d $t \in T$,dan untuk setiap $u \geq \frac{f(t)}{a}$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa terdapat bilangan $r_1 \in (0, 1)$ sehingga untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ anggota ruang Banach X dan untuk $\mu h.d.t \in T$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} \phi\left(t, \left\|\frac{x_i - x_j}{2}\right\|_X\right) \leq \frac{n_0 - 1}{2} r_1 \sum_{i=1}^{n_0} \phi(t, \|x_i\|_X),$$

dengan $T_M = \left\{t \in T : \max\limits_{1 \leq 1 \leq n_0} \{\|x_i\|_X\} \geq \frac{f(t)}{a}\right\}$.

Diambil $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Misal k adalah indeks sehingga $\|x_k\|_X = \max_{1\leq i\leq n_0}\{\|x_i\|_X\}$.

I. Dimisalkan terdapat $i_i \in \{1, 2, 3 \ldots, n_0\}\setminus\{k\}$ sehingga $\frac{\|x_{i_1}\|_X}{\|x_k\|_X} < a$. Karena $\|x_k\| \geq \frac{f(t)}{a} > f(t)$ untuk $\mu, h.d.t \in T_M$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \phi\left(t, \left\|\frac{x_{i_1} - x_k}{2}\right\|_X\right) &\leq \phi\left(t, \frac{\|x_{i_1}\|_X + \|x_k\|_X}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \gamma)\left(\phi\left(t, \|x_{i_1}\|_X\right) + \phi\left(t, \|x_k\|_X\right)\right). \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat kekonveksan dari $\phi(t, \dot{)}$ untuk $\mu - h.d.t \in T$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|\frac{x_i-x_j}{2}\|_X) &\le \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X)-\frac{\gamma}{2}(\phi\left(t,\|x_{i_1}\|_X\right) \\
&\quad +\phi\left(t,\|x_k\|_X\right) \\
&\le \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X)- \\
&\quad \frac{\gamma}{2n_0}\left(\phi\left(n_0\phi\left(t,\|x_k\|_X\right)\right)\right) \\
&\le \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X)-\frac{\gamma}{2n_0}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) \\
&= \frac{n_0-1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{n_0(n_0-1)}\right)\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) \\
&\quad \text{untuk } \mu-h.d.t\in T_M
\end{aligned}
$$

II. Diasumsikan bahwa untuk semua $i\neq k$ berlaku $\frac{\|x_{i_1}\|_X}{\|x_k\|_X}\ge a$. Maka $\|x_i\|>0$, untuk setiap $i\neq k$. Dapat diambil i_0,j_0. Dan diasumsikan bahwa $a<\frac{\|x_{i_1}\|_X}{\|x_{j_0}\|_X}\le\frac{1}{a}$. Di lain pihak, dipunyai

$$
a>\frac{\|x_{i_1}\|_X}{\|x_{j_0}\|_X}\ge\frac{\min\{\|x_{i_0}\|_X,\|x_{j_0}\|_X\}}{\max\{\|x_{i_0}\|_X,\|x_{j_0}\|_X\}}\ge\frac{\min\{\|x_{i_0}\|_X,\|x_{j_0}\|_X\}}{\|x_k\|_X}
$$

Sehingga kontradiksi. Selanjutnya, diperoleh

$$
\left\|\frac{x_{i_0}-x_{j_0}}{2}\right\|_X\le\left(1-\frac{2\delta a}{1+a}\frac{\|x_{i_0}\|_X+\|x_{j_0}\|_X}{2}\right).
$$

Berdasarkan sifat kekonveksan dari $\phi(t,\dot{)}$ untuk $\mu-h.d.t\in T$, diperoleh

$$
\phi\left(t,\left\|\frac{x_{i_0}-x_{j_0}}{2}\right\|_X\right)\le\frac{1}{2}(1-\alpha)\left(\phi(t,\|x_{i_0}\|_X)+\phi(t,\|x_{j_0}\|_X)\right)
$$

dengan $\alpha = \frac{2\delta a}{1+a} \in (0,1)$. Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}\phi\left(t, \left\|\frac{x_i - x_j}{2}\right\|_X\right) &\leq \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) - \frac{\alpha}{2}\phi\left(t,\|x_{i_0}\|_X\right) \\
&\quad -\frac{\alpha}{2}\phi\left(t,\|x_{j_0}\|_X\right) \\
&\leq \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) - \alpha\phi\left(t, a\|x_k\|_X\right) \\
&\leq \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) - \frac{\alpha\beta}{n_0}\left(n_0\phi\left(\|x_k\|_X\right)\right) \\
&\leq \frac{n_0-1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) - \frac{\alpha\beta}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) \\
&= \frac{n_0-1}{2}\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{n_0(n_0-1)}\right)\sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X) \\
&\quad \text{untuk } \mu.h.d.t \in T_M
\end{aligned}$$

Didefinisikan $r_1 = \max\left\{1 - \frac{\gamma}{n_0(n_0-1)}, 1 - \frac{2\alpha\beta}{n_0(n_0-1)}\right\}$. Maka dapat ditentukan bilangan $r_2 \in (0,1)$ sehingga berlaku $\sum\limits_{i=1}^{n_0}\sum\limits_{i=1}^{n_0}\phi\left(t, \left\|\frac{x_i-x_j}{2}\right\|_X\right) \leq \frac{n_0-1}{2}r_2\sum\limits_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|x_i\|_X)$ untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ anggota ruang Banach X dan untuk $\mu - h.d.t \in B^a_{m_0}$ memenuhi $\max\limits_{1\leq i\leq n_0}\{\|x_i\|_X\} \geq f(t)$. Maka terbukti benar dengan

$$r_2 = \max\left\{1 - \frac{\gamma}{n_0(n_0-1)}, 1 - \frac{2\alpha\beta_{m_0}}{n_0(n_0-1)}\right\}.$$

Diambil $f_1, f_2, \ldots, f_{n_0} \in S(L_\phi(\mu, X))$ dan didefinisikan

$$E = \{t \in T : \sum_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|f_i(t)\|_X)\} \geq n_0\phi(t, f(t))$$

Jelas bahwa $\max\limits_{1\leq i\leq n_0}\{\|f_i(t)\|_X\} \geq f(t)$ untuk setiap $t \in E$. Selanjutnya himpunan E dibagi menjadi dua himpunan bagian berikut: $E_1 = \{t \in T : \max\limits_{1\leq i\leq n_0}\{\|f_i(t)\|_X\} \geq \frac{f(t)}{a}\}$, dan $E_2 = \{t \in T : \max\limits_{1\leq i\leq n_0}\{\|f_i(t)\|_X\} < \frac{f(t)}{a}\}$. Didefinisikan himpunan E_{21} dan E_{22} sebagai berikut $E_{21} = E_2 \cap B^a_{m_0}$, dan $E_{22} = E_2 \backslash B^a_{m_0}$. Diperoleh, $\sum\limits_{i=1}^{n_0}\sum\limits_{i=1}^{n_0}\phi\left(t, \left\|\frac{f_i(t)-f_j(t)}{2}\right\|_X\right) \leq \frac{1}{n_0}\begin{pmatrix} n_0 \\ 2 \end{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n_0}\phi(t,\|f_i(t)\|_X)$, untuk μ-h.d. $t \in E_1 \cup E_2$, dengan $r = \max\{r_1, r_2\}$. Jelas bahwa $r \in (0,1)$. Selanjutnya, dari definisi himpunan

E dan fungsi f, diperoleh $\sum\limits_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{T\setminus E}) < \frac{1}{2}$. Diambil $t \in E_{22}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{E_{22}}) &= \sum_{i=1}^{n_0} \int_{E_2\setminus B^a_{m_0}} \phi(t, \|f_i(t)\|_X) d\mu \\
&\leq \int_{E_2\setminus B^a_{m_0}} n_0\phi(t, \max_{1\leq i\leq n_0} \|f_i(t)\|_X) \\
&< \int_{E_2\setminus B^a_{m_0}} n_0\phi\left(t, \frac{f(t)}{a}\right) d\mu \\
&\leq \int_{T\setminus B^a_{m_0}} n_0\phi\left(t, \frac{f(t)}{a}\right) d\mu < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\sum\limits_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{T\setminus(E_1\cup E_{21})}) = \sum\limits_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{T\setminus E}) + \sum\limits_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{E_{22}}) < 1$. Karena $\|f_i\| = 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $\phi \in \Delta_2$, maka $\widetilde{I}_\phi(f_i) = 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n_0$. Akibatnya, $\sum\limits_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi(f_i\chi_{E_1\cup E_{21}}) \geq n_0 - 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(\frac{1}{2}(f_i - f_j)\right) &= \sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(\frac{1}{2}(f_i - f_j)\chi_{T\setminus(E_1\cup E_{21})}\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(\frac{1}{2}(f_i - f_j)\chi_{E_1\cup E_{21}}\right) \\
&\leq \frac{1}{n_0}\binom{n_0}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\chi_{T\setminus(E_1\cup E_{21})}\right) \\
&\quad + \frac{r}{n_0}\binom{n_0}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\chi_{E_1\cup E_{21}}\right) \\
&\leq \frac{1}{n_0}\binom{n_0}{2} \left[\sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\right) - \sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\chi_{E_1\cup E_{21}}\right)\right] \\
&\quad + \frac{r}{n_0}\binom{n_0}{2} \sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\chi_{E_1\cup E_{21}}\right) \\
&= \binom{n_0}{2}\left[1 - \frac{1-r}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} \widetilde{I}_\phi\left(f_i\chi_{E_1\cup E_{21}}\right)\right] \\
&\leq \binom{n_0}{2}\left(1 - \frac{(1-r)(n_0-1)}{n_0}\right) \leq \binom{n_0}{2}(1-p) \\
&\quad \text{dengan } p = \frac{1-r}{2}.
\end{aligned}$$

Jadi, terdapat $i_1, j_1 \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ sehingga $\widetilde{I}_\phi\left(\frac{1}{2}(f_{i_1} - f_{j_1})\right) \leq 1 - p$. Akibatnya, karena $\phi \in \Delta_2$, diperoleh $\left\|\frac{1}{2}(f_{i_1} - f_{j_1})\right\| \leq (1-q)p$, dengan $0 < q(p) < 1$. Diperoleh bahwa ruang $L_\phi(\mu, X)$ P-konveks. $\square$

4. Penutup

Di dalam pembahasan telah dibuktikan bahwa $I_\phi = \int_T \phi(t, f(t))d\mu$ merupakan modular konveks. Modular ini membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz $L_\phi = \{f \in L^0 : I_\phi(cf) < \infty \text{ untuk } c > 0\}$. Selanjutnya, untuk setiap fungsi Musielak - Orlicz ϕ, didefinisikan fungsi $\phi^*(t,v) = \sup\limits_{u>0}\{u|v| - \phi(t,u)\}$, yang juga merupakan fungsi Musielak-Orlicz dan fungsi ϕ^* disebut fungsi komplemen dari ϕ. Selanjutnya telah ditunjukkan pula bahwa $\widetilde{I}_\phi = \int_T \phi(t, \|f(t)\|_X)d\mu$ merupakan modular. Modular ini membangkitkan ruang fungsi Musielak-Orlicz type Bochner $L_\phi(\mu, X) = \{f \in L^0(T, X) : \|f(\dot{})\|_X \in L_\phi\}$. Lebih lanjut, $L_\phi(\mu, X)$ merupakan ruang Banach terhadap $\|f\| = \|\|f(\dot{})\|_X\|_\phi$ untuk setiap $f \in L_\phi(\mu, X)$. Dalam kaitannya dengan sifat P-konveks, ditemukan bahwa ruang fungsi Musielak-Orlicz $L_\phi(\mu, X)$ type Bochner P-konveks jika dan hanya jika ruang L_ϕ dan X keduanya P-konveks. Selanjutnya, juga diperoleh bahwa sifat refleksifitas pada ruang $L_\phi(\mu, X)$ ekuivalen dengan sifat P-konveks.

Daftar Pustaka

[1] Giesy, Daniel P., 1966, *On a Convexity Condition in Normed Linear Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 125 No. 1, 114-146, AMS.

[2] Hudzik, H.,Kaminska, A, Kurc, W., 1987, *Uniformly non-ln Musielak-Orlicz Spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 35, 7-8, 441-448

[3] Hudzik, H. and Chen, S., 1988, *On Some Convexities of Orlicz and Orlicz-Bochner Spaces*, Comment. Math., Univ. Carolinae 029 No. 1, 13-29.

[4] Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1998, *P-convexity of Musielak-Orlicz Function Spaces of Bochner Type*, Revista Matematica Complutense Vol. 11 No. 1.

[5] Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1995, *On P-convex Musielak-Orlicz Spaces*, Comment. Math., Univ . Carolinae 36, 655-672.

[6] Kolwicz, P. and Pluciennik, R., *P-convexity of Bochner-Orlicz Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc.,

[7] Kolwicz, P. and Pluciennik, R., 1997, *P-convexity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces of Bochner Type*, Collect. Math.,

[8] Orlicz, W, 1992, *Linear Functional Analysis*, World Scientific, London.

[9] Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, MacMillan Publishing Company, New York.

[10] Suparno, 2008, *Ruang Bermodular Orlicz*, Tesis, Yogyakarta.