DIMENSI METRIK HASIL OPERASI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP ($p_n \odot k_m$) DAN GRAF SIKEL DENGAN GRAF LINTASAN ($C_n \odot mP_2$)

Petrus Fendiyanto
Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mulawarman
Email: *petrus@fkip.unmul.ac.id*

ABSTRAK

Graf merupakan suatu (V, E) dengan V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan *edge*, yaitu pasangan simpul dari V. Jika G adalah graf terhubung, jarak antara dua simpul u dan v di G dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek di antara keduanya. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_3\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v pada V(G), representasi dari v terhadap W dinotasikan $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$ untuk setiap simpul v pada V(G) berbeda, maka W disebut himpunan *resolving* dari V(G). Jika r(v|W) untuk setiap simpul v ∈ V(G) berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari V(G). Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan dim(G). Operasi korona pada dua buah graf G dan H, dinotasikan dengan G ⊙ H, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari salinan p-simpul graf G untuk setiap simpul di H_i. Jika G adalah graf hasil ($p_n \odot k_m$), maka dim(G) = $n(m - 1)$ dan jika G adalah grah hasil ($C_n \odot mP_2$), maka dim(G) = nm.

Kata kunci: Dimensi Metrik, *Resolving Set*, Operasi Korona

ABSTRACT

A graph ia an (V, E) with V to set of vertices and E to set of edges, a pair of vertices of V. If G is a connected graph, the distance between two vertices u and v in G donated by $d(u,v)$. It is shortest path lenth between u and v. The order set $W = \{w_1, w_2, \dots, w_3\}$ of vertices in the graph connected G and vertices v on V(G), the representation of v with W dented $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$ for each node v on V(G) of different, then resolving set of V(G). If r(v|W) for each node v ∈ V(G) different then the distinguishing set of $V(G)$. The set of distinguishing minimum cardinalities called the minimum distinguishing set (metric basis), and the cardinality of the metric base called the metric dimension of G denoted dim(G). Corona operation on two graph G and H, denoted G ⊙ H, are defined as graph obtained from copie of the p-node graph G for each node in H_i. If G of the result graph ($p_n \odot k_m$) then dim(G) = $n\ (m-1)$ and G of the result graph ($C_n \odot mP_2$) then dim(G) = nm.

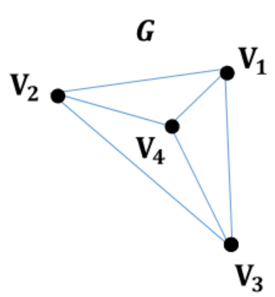
Keywords: Metrik Dimension, Resolving Set, Corona Operation

PENDAHULUAN

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966, kajian tentang dimensi metrik menjadi sebuah *complete problem*, artinya tidak mudah untuk mendapatkan dimensi metrik dari suatu graf bentuk tertentu. Oleh karenanya, untuk mendapatkan dimensi metrik bentuk graf tertentu ataupun kelas tertentu dilakukan analisis dari subkelas terlebih dahulu agar lebih mudah mencari dimensi metrik dari graf secara umum. Untuk simpul u dan v dalam graf terhubung G, jarak d(u, v) adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut W = (w_1, w_2, w_3, …, w_k) dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v pada G, adalah vektor-k (pasangan k-*tuple*), r(v|W) = $d((v,w1), d(v,w2), d(v,w3), \dots, d(v,wk))$ menunjukkan representasi dari v pada W. Himpunan W dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika simpul-simpul G mempunyai representasi berbeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan dim(G).

Pada tahun 2009, Johanes melakukan penelitian tentang dimensi metrik dari pengembangan graf kincir dengan pola k_1 + mk_n. Dari analisis yang telah dilakukan diperoleh dim(G) = m(n-1) dnegan n ≥ 3 dan m ≥ 2. Selanjutnya, pada tahun 2011 Hindayani mengembangkannya dan mengkaji penelitian pada graf k_r + mk_s, dengan m, r, s ∈ N diperoleh dim(G) = m + (r – 2) untuk m ≥ 2, s = 1 dan dim(G) = (s – 1) m + (r – 1) untuk m, s ≥ 2. Sedangkan Septiana dan Budi mengkaji penelitian dimensi metrik pada graf lintasan, graf lengkap, graf sikel, graf bintang, dan graf bipartite lengkap pada tahun 2013. Dari analisis yang telah dilakukan diperoleh dimensi metrik G adalah 1 jika dan hanya jika G graf lintasan, graf lengkap K_n dengan n titik dan n ≥ 2 maka dim(K_n) = n – 1, graf sikel C_n dengan n titik dan n ≥ 3 maka dim(C_n) = 2, graf bintang $K_{1, n-1}$ dengan n titik dan n ≥ 3 maka dim($K_{1, n-1}$) = n – 1, dan dimensi metrik G = $K_{s, t}$, G = $K_s + \overline{K_t}$ dan G = K_s + (K_1 ∪ K_t) adalah n – 2.

Dipilih dua simpul yaitu $W_2 = \{v_1, v_2\}$ sebagai himpunan pembeda, maka representasi setiap simpul pada G terhadap W_2 adalah $r(v_1|W_2) = (0, 1)$, $r(v_2|W_2) = (1,0)$,



Gambar 1. Graf lengkap K_4

$r(v_3|W_2) = (1, 1)$, $r(v_4|W_2) = (1, 1)$. Karena ada v_3, v_4 dan $v_3 \neq v_4$ tetapi $r(v_3|W_2) = (1, 1) = (v_4|W_2)$ maka W dengan kardina-litas 2 bukan himpunan pembeda sehingga dim(G) $\neq$ 2. Dipilih $W_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka representasi setiap simpul pada G terhadap W_3 adalah $r(v_1, W_3) = (0, 1, 1)$, $r(v_2, W_3) = (1, 0, 1)$, $r(v_3, W_3) = (1, 1, 0)$, $r(v_4, W_3) = (1, 1, 1)$. Karena setiap u, v ∈ V(G), u ≠ v dan $r(u|W_3) \neq r(v|W_3)$ maka W dengan kardinalitas 3 adalah himpunan pembeda. Kemudian dipilih $W_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ maka representasi setiap simpul pada G terhadap W_4 adalah $r(v_1|W_4) = (0, 1, 1, 1)$, $r(v_2|W_4) = (1, 0, 1, 1)$, $r(v_3|W_4) = (1, 1, 0, 1)$, $r(v_4|W_4) = (1, 1, 1, 0)$. Karena setiap u, v ∈ V(G), u ≠ v dan $r(u|W_4) \neq r(v|W_4)$ maka W dengan kardinalitas 4 adalah himpunan pembeda. Sesuai dengan definisi dimensi metrik yaitu kardinalitas minimum dari himpunan pembeda, sehingga diperoleh kardinalitas 3 dan 4 maka dim(G) = 3.

Operasi graf korona yaitu apabila diberikan graf G dan H. Graf G mempunyai n buah simpul, maka korona didefinisikan sebagai graf dengan

$V(G \circ H) = V(G) \cup \bigcup_{i \in G} V(H_i)$

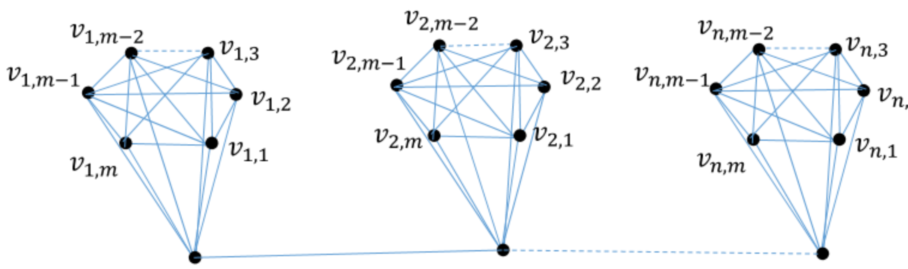
$(G \circ H) = E(G) \cup \bigcup_{i \in G} (E(H_i) \cup \{i\, u_i | u_i \in v(H_i)\})$

dengan $H_i \cong H$ untuk semua $i \in v(G)$.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Dimensi Metrik Pada Hasil Korona Graf Lintasan Dan Graf Lengkap ($P_n \odot K_m$)

Untuk membedakan dua graf hasil korona, graf lintasan disebut sebagai graf P_n dengan himpunan simpul $V(Pn) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan graf lengkap disebut K_m dengan himpunan simpul $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Gambar 2 merupakan bentuk umum dari graf $P_n \odot K_m$. Dari kontruksi yang telah dilakukan diperoleh pola (tabel 1).



Gambar 2. Graf $P_n \odot K_m$

Tabel 1. Pola bilangan dimensi metrik graf $P_n \odot K_m$

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	⋯	K_m
P_1	1	2	3	4	5	⋯	m
P_2	1	2	4	6	8	⋯	$2m-2$
P_3	2	3	6	9	12	⋯	$3m-3$
P_4	2	4	8	12	16	⋯	$4m-4$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
P_n	2	n	$2n$	$3n$	$4n$	⋯	$mn-n$

Berdasarkan dari kontruksi dimensi metrik graf $P_n \odot K_m$ dan menganalisa karakteristik graf hasil korona dari graf lengkap, diperoleh kesimpulan pada teorema di bawah ini.

Teorema 1

Misalkan P_n adalah graf lintasan order n dan K_m graf lengkap order m maka

$$\dim (P_n \odot K_m) = n\,(m-1)$$

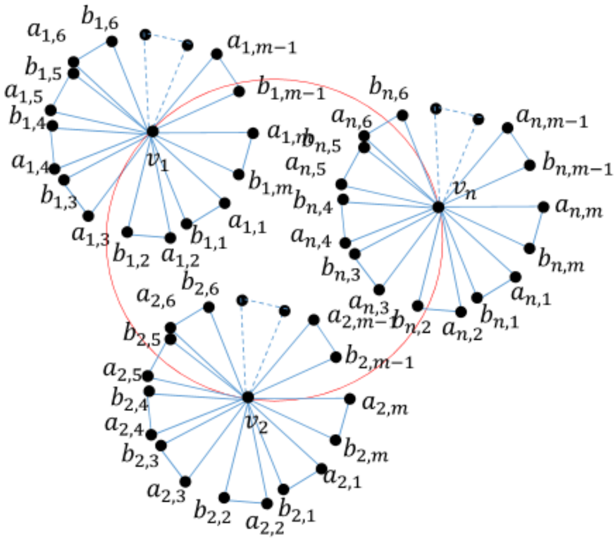
dengan $n \geq 2$, $m \geq 2$

Bukti:

Himpunan simpul dalam graf korona korona $P_n \odot K_m$ adalah $V\,(P_n \odot K_m) = V(P_n) \cup \cup_{i \in v(P_n)} V(K_m)$. Untuk membedakan dua graf hasil operasi korona, graf lintasan disebut graf P_n, dengan himpunan simpul $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ dan graf lengkap disebut sebagai graf K_m, dengan himpunan simpul $V(K_m) = \{v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, \cdots, v_{m,i}\}$. Sehingga notasi hasil operasi korona kedua graf yaitu $V(P_n \odot K_m) = \{\cup_i \cup \{v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}, \cdots, v_{m,i}\}\}$ dengan $1 \leq i \leq n$. Jika untuk setiap simpul $v_a, v_b \in K_m$ dengan simpul $u_i \in P_n$ maka diketahui bahwa $d(v_a, v_i) = d(v_b, v_i) = 1$. Sehingga himpunan pembeda merupakan simpul-simpul dari graf lengkap K_m, untuk itu diperlukan sebanyak $m-1$ simpul sebagai himpunan pembeda. Terdapat sejumlah n subgraf $K_{m,i}$ dalam graf $P_n \odot K_m$ maka kardinalitas minimum himpunan pembeda graf $P_n \odot K_m$ adalah $n(m-1)$ atau $\dim(P_n \odot K_m) \leq n(m-1)$. Apabila direduksi simpul v_1, mengakibatkan $r(v_1|W) = r(v_m|W)$, sehingga $n(m-1) \leq \dim(P_n \odot K_m) \leq n(m-1)$. Dengan demikian $\dim(P_n \odot K_m) = n(m-1)$.

B. Dimensi Metrik Pada Hasil Korona Graf Sikel Dan Graf Lintasan ($C_n \odot mP_2$)

Untuk membedakan dua graf operasi korona graf sikel disebut sebagai graf C_n dengan himpunan simpul $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan graf lintasan dengan orde 2 disebut P_2 dengan simpul $V(P_2) = \{a_1, b_1\}$. Gambar 3 merupakan bentuk umum dari graf $C_n \odot mP_2$. Berdasarkan dari kontruksi dimensi metrik graf $C_n \odot mP_2$ dan menganalisa karakteristik graf hasil korona



Gambar 3. Graf $C_n \odot mP_2$

dari graf sikel dan graf lengkap pada orde 2, diperoleh kesimpulan pada teorema di bawah ini.

Teorema 2

Misalkan C_n adalah graf lintasan order n dan P_2 adalah graf lintasan dengan order 2, maka

$$\dim (C_n \odot mP_2) = nm$$

dengan n, m ∈ N dan $m \geq 2$

Bukti:

Untuk memperoleh minimum resolving set dari graf $C_n \odot mP_2$, maka di ambil satu simpul dari setiap mP_2 untuk $m \geq 2$. Hal tersebut dilakukan karena jika diambil kedua simpul dari mP_2 atau tidak diambil kedua-duanya, maka akan menghasilkan representasi yang sama. Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $C_n \odot mP_2$, maka dicari batas atas dan batas bawah terlebih dahulu.

a. Batas atas

Simpul dari mP_2 diambil salah satu simpulnya untuk menjadi himpunan terurut yaitu W = $\{a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{n,m-1}\}$, sehingga representasi jarak berbeda terhadap setiap titik pada graf $C_n \odot mP_2$. Dengan demikian W merupakan *resolving set* tetapi belum tentu basis metrik, maka terdapat kardinalitas yang lebih minimum. Jadi berlaku batas atas dim $(C_n \odot mP_2) \leq nm$.

b. Batas bawah

Jika kardinalitas |W| = nm – 1 dengan W = $\{a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{n,m-1}\}$, maka terdapat simpul a_{nm} atau simpul b_{nm} yang bukan anggota himpunan W. Dengan demikian pasti ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama yaitu $r(a_{nm}|W) = r(b_{nm}|W)$. Jelas W bukan resolving set dari graf $C_n \odot mP_2$. Jadi, batas bawah dari dim($C_n \odot mP_2$) adalah $|W| \geq nm$ atau dim$(C_n \odot mP_2) \geq nm$.

Karena batas atas dan batas bawah dari dim($C_n \odot mP_2$) adalah nm ≤ dim(G) ≤ nm, maka dim$(C_n \odot mP_2)$ = nm, dengan $n, m \in N$ dan $m \geq 2$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan sebelumnya maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika G adalah graf hasil $P_n \odot K_m$ dengan n ≥ 2, m ≥ 2 maka dim(G) = $n(m - 1)$.
2. Jika G adalah graf hasil $C_n \odot mP_2$ dengan $n, m \in N$ dan $m \geq 2$, maka dim(G) = nm.

DAFTAR PUSTAKA

Darmaji. (2011). *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Bandung: Disertasi, Program studi matematika ITB.

G. Chartrand, Linda Eroh, Mark A. Johnson, O.R Oellermann. (2000). *Resolvability in Graph and The Metric Dimension of a Graph*. Discrete Applied Mathematics.

G. Chartrand, Erwin D, Johns G, dan Zhang P. (2003). *Boundary vertices in Graph*. Discrete Applied Mathematics.

Hindayani. (2011). *Dimensi Metrik Graf k_r + mk_s*. Malang: Tugas Akhir, Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim.

H. Iswadi, E. T Baskoro, R, Simanjuntak, A.N.M Salman. 2012. *The Metric Dimention of Graph with Pendant Edge*. Bandung: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam ITB.

Johanes, P. 2009. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graf kincir Dengan*

Pola k_1 + mk_n. Surabaya: Tugas Akhir, Jurusan Matematika ITS.

Septiana dan Budi. (2013). *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. Surabaya: Tugas Akhir, Jurusan Matematika Universitas Negeri Surabaya.