Jurnal Penelitian dan Pengkajian Ilmu Pendidikan: e-Saintika
https://journal-center.litpam.com/index.php/e-Saintika/index

July 2020 Vol. 4, No. 2
e-ISSN: 2615-6881
pp. 248-258

Bukti yang Membuktikan dan Bukti yang Menjelaskan dalam Kelas Matematika

[1]Deni Hamdani, [1]J. Junaidi, [1]Dwi Novitasari, [1]Nilza Humaira Salsabila, [1]Ratna Yulis Tyaningsih

[1]Mathematics Education Department, Faculty of Teacher Training and Education, Universitas Mataram. Jl. Majapahit No. 62, Mataram, West Nusa Tenggara, 83115, Indonesia.
**Corresponding Author e-mail: deni.math@unram.ac.id*

Received: March 2020; Revised: June 2020; Published: July 2020

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan secara komprehensif perbedaan bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan berdasarkan pertimbangan implikasi kedua bukti tersebut sebagai dasar konstruksi penalaran dan bukti dalam matematika. Kajian dijalani dengan kegiatan menguraikan perbedaan spesifik antara keduanya serta memberikan contoh kasus kedua bukti, dan memberikan justifikasi atas pentingnya pengenalan kedua bukti dalam kelas matematika. Kedua bukti digambarkan dengan permasalahan konsep barisan bilangan ganjil. Bukti yang membuktikan hanya menunjukkan dengan menggunakan induksi matematis, sementara bukti yang menjelaskan menunjukkan dengan bukti Gauss, representasi geometrik bangun titik, dan garis zig-zag. Perbedaan antara keduanya tampak pada pemberian alasan yang berasal dari bukti itu sendiri. Hasil kajian mengindikasikan bahwa peran bukti dalam kelas matematika pada tingkat perguruan tinggi adalah membuktikan/meyakinkan, pada tingkat menengah atas adalah membuktikan dan menjelaskan, dan pada tingkat sekolah menengah pertama dan dasar peran utamanya adalah menjelaskan. Akibatnya bukti matematis tidak hanya membuktikan/menyakinkan, melainkan juga menjelaskan. Karenanya penting mempertimbangkan implikasi bukti dalam kurikulum matematika di sekolah, serta perlunya menyajikan bab materi kepada mahasiswa pendidikan matematika tidak hanya bukti yang membuktikan, melainkan juga bukti yang menjelaskan.

Kata kunci: Bukti yang Membuktikan, Bukti yang Menjelaskan

Proofs that Prove and Proofs that Explain in Mathematics Classroom

Abstract

The purpose of this study was to comprehensively describe the differences of the proofs that prove and proofs that explain based on the consideration of the implications of the two proofs as the basis for the construction reasoning and proofs in mathematics. The study was undertaken with the activity of describing the specific differences between the two and providing examples of cases of both proofs; and provide justification for the importance of introducing both proofs in mathematics classrooms. Both proofs are illustrated by the problem of the odd number sequence concept. Proofs that prove is only shown using mathematical induction, while proofs that explain shows with Gaussian proof, a geometric representation of point shape, and zigzag line. The difference between the two appears to be the reasoning that comes from the proof itself. The results of the study indicate that the role of proof in mathematics classes at the tertiary level is proving/convincing, at the senior secondary level it is proving and explaining, and at the junior and elementary school level its main role is explaining. As a result, mathematical proof does not only prove/convince, but also explain. It is therefore important to consider the implications of proof in the mathematics curriculum in schools, as well as the need to present chapter materials to mathematics education students not only proofs that prove but also proof that explain.

Key words: *Proofs that Prove, Proofs that Explain*

How to Cite: Hamdani, D., Junaidi, J., Novitasari, D., Salsabila, N., H., & Tyaningsih, R., Y. (2020). Bukti yang Membuktikan dan Bukti yang Menjelaskan dalam Kelas Matematika. *Jurnal Penelitian dan Pengkajian Ilmu Pendidikan: e-Saintika,* 4(2), 248-258. doi:https://doi.org/10.36312/e-saintika.v4i2.253

https://doi.org/10.36312/e-saintika.v4i2.253

PENDAHULUAN

Bukti adalah argumen logis yang diberikan sesuai dengan aturan sistem deduktif, dan digunakan sebagai pembenaran kebenaran pernyataan suatu teorema, serta merupakan bagian fundamental dari proses berpikir matematis (Devlin, 2003; Koshy, 2007; Dumas & McCarthy, 2015; Wikipedia contributors, 2020). Sebagai argumen yang menyakinkan, bukti adalah penjelasan lengkap yang diberikan ketika penjelasan lengkap lebih tepat daripada penjelasan tidak lengkap atau tidak ada penjelasan (Hersh, 1993). Bukti mungkin kurang meyakinkan ketika hanya terbukti valid berdasarkan bentuknya saja, tanpa memperhatikan isinya. Bukti harus berasal dari tempat yang spesifik dan dapat diterima, harus menyajikan argumen yang tidak cacat, dan harus mengarah pada hasil yang, bahkan tidak terduga, nampak pada refleksi untuk membuat masuk akal dalam konteks pengetahuan matematika lainnya (Hanna, 1990).

Bukti dinilai penting untuk memunculkan hubungan matematika daripada hanya untuk menunjukkan kebenaran hasilnya (Hanna, 2000). Karenanya peran bukti sebagai alat komunikasi, dan proses sosial yang memainkan bagian penting yang didukung oleh matematikawan tentang hasil baru, dan pendidik lebih menekankan pada konsep bukti sebagai "argumen yang meyakinkan."(Hanna, 1990). Sehingga pentingnya menciptakan situasi kelas dimana siswa menjadi sadar akan kompleksitas masalah dan perlunya menghasilkan "argumen yang valid" (Balacheff, 2017). Argument dapat dilihat sebagai bukti yang valid (Weber, 2008). Argumen yang dikatakan valid adalah argumen yang bentuknya valid, maksudnya jika pada masing-masing baris yang semua premisnya benar (baris kritis) kesimpulannya juga benar (Purwanto, 2015).

Kontribusi substansial (pemahaman) tentang didaktik bukti, seperti argument sebagai bukti yang valid (Weber, 2008). Argument yang dikatakan valid bergantung pada bentuk argumennya (Purwanto, 2015), sehingga perlunya menghasilkan argument yang valid (Balacheff, 2017), dan bukti dapat dilihat sebagai argument yang menyakinkan dan menjelaskan (Hanna, 1990), dan (Hersh, 1993), dinilai telah menawarkan cara baru yang spesifik dan menarik untuk mengajarkan bukti. Sebagai pembanding dari argumen yang harus valid dan menjelaskan, maka akan berguna untuk mendiskusi perbedaan eksplisit antara "bukti yang membuktikan" dan "bukti yang menjelaskan".

Bukti yang menjelaskan dan bukti yang membuktikan keduanya adalah bukti yang sah dan berfungsi dalam ukuran yang sama untuk menetapkan validitas pernyataan matematis. Keduanya terdiri dari pernyataan yang merupakan aksioma sendiri atau mengikuti dari pernyataan sebelumnya sebagai hasil dari penerapan aturan inferensi yang benar (Hanna, 1990). Perbedaan penting antara kedua jenis bukti ini, kembali menurut (Hanna, 1990) menyatakan bahwa *bukti yang membuktikan* hanya menunjukkan bahwa teorema itu benar; dan memberi alasan bukti saja. Sementara *bukti yang menjelaskan*, juga menunjukkan mengapa teorema itu benar; serta memberikan serangkaian alasan yang berasal dari fenomena itu sendiri. Selain (Hanna, 1990), ahli lain juga mengungkapkan bahwa bukti matematis harus meyakinkan dan menjelaskan (Hersh, 1993). *Bukti yang menjelaskan* adalah argumen yang menjelaskan, sering kali pada tingkat intuitif, mengapa hasilnya benar (Weber & Alcock, 2004; Weber, 2008).

Sebuah bukti yang membuktikan mungkin bergantung pada induksi matematika atau bahkan pada pertimbangan sintaksis saja. Tetapi bukti yang menjelaskan harus memberikan alasan berdasarkan ide-ide matematika yang terlibat, sifat-sifat matematika yang menyebabkan teorema yang ditegaskan itu benar (Hersh, 1993; Hanna, 1990; Hanna, 2000). Kebutuhan untuk memahami dan terutama menulis bukti dalam kuliah-kuliah matematika sangatlah penting (Morash, 1987). Bahkan NCTM (2000) dan Van de Walle et al. (2012) mengungkapkan bahwa kegiatan menulis bukti (pembutian) bertujuan untuk membantu dalam menentukan apakah dan mengapa jawaban kita logis, mengembangkan kebiasaan memberi argumen, dan menjadikan kegiatan menyelidiki sebagai bagian utuh dari setiap pemecahan masalah dan merupakan aktivitas yang dapat mengembangkan pemahaman konsep. Sementara Weber (2003) menjelaskan bahwa tujuan dari pembuktian adalah untuk: (1) menjelaskan, (2) sistemisasi, (3) komunikasi, (4) penemuan hasil baru, (5) pertimbangan suatu definisi, (6) mengembangkan intuisi, dan (7) menyediakan otonomi.

Dari beberapa perspektif ataupun epistemologis dari bukti, mulai dari bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan menurut Hanna (1990), bukti yang menyakinkan dan bukti yang menjelaskan menurut Hersh (1993), serta argumen dapat dilihat sebagai bukti yang valid (Weber, 2008), dan argumen yang valid adalah argumen yang bentuknya valid (Purwanto, 2015). Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan kepada mahasiswa, guru, atau pembaca lainnya apa yang membedakan antara bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan, kemudian mempertimbangkan implikasi penyampaian kedua bukti dalam kelas matematika di sekolah, mengingat standar proses dalam kelas matematika di sekolah menurut NCTM (2000) menuntut pentingnya mengembangkan proses mengkonstruksi penalaran dan bukti (*reasoning and proof*).

METODE

Makalah ini mengeksplorasi atau menguraikan perbedaan antara bukti yang membuktikan dan menjelaskan dalam kelas matematika di sekolah dan memberikan justifikasi atas pentingnya penyampaian/pengajaran kedua bukti dalam kelas matematika sekaligus memberikan contoh kasus yang terkait dengan bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan. Sehingga dari kegiatan kajian ini, dapat dikatakan sebagai kegiatan eksplorasi bukti yang masuk dalam kajian/telaah deskriptif eksploratif yan dimulai dengan kegiatan menguraikan perbedaan spesifik antara "bukti yang membuktikan" dan "bukti yang menjelaskan" serta memberikan contoh kasus kedua bukti; dan memberikan justifikasi teoritis atas pentingnya pengenalan kedua bukti dalam kelas matematika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kedua jenis bukti ini adalah bukti yang sah dan berfungsi sama dalam menetapkan validitas pernyataan matematis. Namun tidak untuk diajarkan atau disampaikan secara berbarengan/bersamaan, misalnya saja pada tingkat dasar SD-SMP bukti dapat disampaikan dalam perspektif bukti yang menjelaskan, tingkat menengah SMA bukti dapat disampaikan dalam perspektif menjelaskan dan membuktikan (induksi matematika kelas XI), dan tingkat lanjutan (perguruan tinggi) dalam perspektif membuktikan/menyakinkan. Hal yang sama sesuai dengan pendapat dari Hersh (1993) yang mengatakan bahwa bukti matematis dapat meyakinkan, dan dapat pula menjelaskan. Dalam penelitian matematika, peran utamanya adalah meyakinkan, dan ditingkat sekolah menengah atau sarjana, peran utamanya adalah menjelaskan.

Perbedaan penting antara kedua jenis bukti ini adalah *bukti yang membuktikan* hanya menunjukkan bahwa teorema itu benar; dan memberikan alasan bukti saja. Sementara *bukti yang menjelaskan*, juga menunjukkan mengapa teorema itu benar, sekaligus memberikan serangkaian alasan yang berasal dari fenomena itu sendiri atau argumen yang menjelaskan (Hanna, 1990; Hersh, 1993; Weber & Alcock, 2004; Weber, 2008). Uraian berikut memberikan contoh atau gambaran perbedaan antara bukti yang membuktikan dan bukti yang menjelaskan:

Buktikan bahwa jumlah n suku pertama bilangan ganjil positif $S(n)$, adalah sama dengan n^2 atau $S(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Bukti yang Membuktikan

Karena bukti yang membuktikan adalah bukti yang hanya menunjukkan bahwa teorema itu benar; atau dengan kata lainnya hanya memberikan alasan bukti saja (Hanna, 1990). Maka berikut ini akan dikenalkan bukti dengan induksi matematika sebagai bukti yang membuktikan.

Bukti dengan induksi matematika

Selain metode langsung (*direct proofs*), dan metode tak langsung (*indirect proofs*: *contrapositive proofs* dan *contradiction proof*) yang bersifat deduksi (kesimpulan yang bersifat khusus dari informasi-informasi bersifat umum). Dikenal juga metode induksi (kesimpulan yang bersifat umum dari informasi-informasi bersifat khusus). Bukti dengan metode induksi, dalam makalah ini dikenalkan sebagai contoh dari bukti yang membuktikan.

Misalkan akan dibuktikan bahwa $S(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ maka langkah yang dilakukan sebagai berikut:

Basis Induksi: Untuk $n = 1$, teorema benar

$$S(1) = 1^2 = 1$$

Langkah Induksi: Asumsikan benar untuk suatu $n = k$, maka

$$S(k) = 1 + 3 + 5 + .. + (2k - 1) = k^2$$

Karena $n = 1$ dan $n = k$ benar, maka $n = k + 1$juga benar, sehingga:

$$S(k + 1) = 1 + 3 + 5 + .. + (2k) = (k + 1)^2$$

Bukti:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + .. + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k + 1)^2$$

Berdasarkan tahap *basis induksi* dan *langkah induksi*,maka dapat disimpulkan bahwa *Benar* jumlah n pertama bilangan ganjil positif adalah n^2.

Hasil bukti di atas ini tentu saja merupakan bukti yang dapat diterima. Oleh karena telah menunjukkan bahwa pernyataan "jumlah n pertama bilangan ganjil positif adalah n^2" terbukti berdasarkan metode pembuktian induksi matematika. Induksi matematika adalah metode pembuktian yang kuat yang sering digunakan untuk menetapkan validitas pernyataan yang diberikan dalam hal bilangan asli. Meskipun kegunaannya terbatas pada konteks yang agak khusus ini, induksi matematika adalah alat yang sangat diperlukan di semua cabang matematika (Bartle & Sherbert, 2011). Prinsip induksi matematika menggunakan bilangan bulat positif oleh karena bilangan bulat positif memiliki sifat terurut dengan baik (*well-ordering* *property*) (Gilbert & Gilbert, 2009). Definisi sifat terurut dengan baik "setiap subhimpunan tak-kosong dari ℕ memiliki elemen terkecil. Untuk lebih detailnya, jika $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, maka $\exists\, m \in S$ sedemikian sehingga m$\leq k$, $\forall k \in S$ (Bartle & Sherbert, 2011).

Berbeda dengan Hanna (1990), bukti dengan menggunakan induksi matematika tidak jelas pada umumnya. Pernyataan ini menerangkan atas apa yang tidak dilakukan dengan metode induksi matematika adalah menunjukkan mengapa jumlah n suku pertama bilangan ganjil positif adalah n^2 atau karakteristik sifat dari jumlah n suku pertama bilangan ganjil positif menguatkan tanggung jawab atas nilai n^2. Permasalahan jumlah bilangan ganjil positif di atas hampir sama dengan permasalahan Gauss berikut, yang menggunakan sifat simetri (dari dua representasi penjumlahan yang berbeda) untuk menunjukkan mengapa pernyataan itu benar.

Bukti yang Menjelaskan

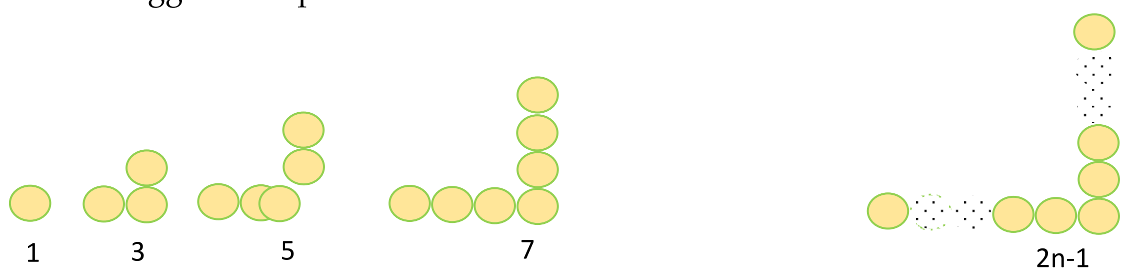
Selain menunjukkan mengapa teorema itu benar, bukti yang menjelaskan juga memberikan serangkaian alasan yang berasal dari fenomena itu sendiri (Hanna, 1990), dan sering kali pada tingkatan intuitif, mengapa hasilnya benar (Weber & Alcock, 2004). Berikut ini akan dikenalkan tiga contoh bukti yang menjelaskan, yakni:

1. **Bukti Gauss**

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$
$$\underline{S(n) = (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 1}$$
$$2S(n) = \underbrace{2n + 2n + 2n + \cdots + 2n}_{2n \text{ sebanyak } n \text{ kali}}$$
$$2S(n) = 2n(n)$$
$$2S(n) = 2n^2$$
$$S(n) = n^2$$

2. **Representasi geometrik "bangun titik"**

Bukti yang menjelaskan kedua dari pernyataan yang sama adalah representasi geometrik dari n suku pertama bilangan ganjil positif dengan *bangun titik* yang sama sekali tidak sama; ciri khasnya adalah pola geometris yang mendorong kebenaran pernyataan itu. Kita dapat mewakili jumlah dari n suku pertama bilangan ganjil positif menggunakan pola titik-titik berikut.



Gambar 1. Pola bilangan ganjil positif

Titik-titik yang sama di setiap suku membentuk sudut siku-siku
$S(n) = 1$ titik $+ 3$ titik $+ 5$ titik $+ \cdots + (2n-1)$titik
Dua jumlah tersebut $S(n) + S(n)$ memberikan hasil $2n$ titik sebanyak n kali. Karena itu:

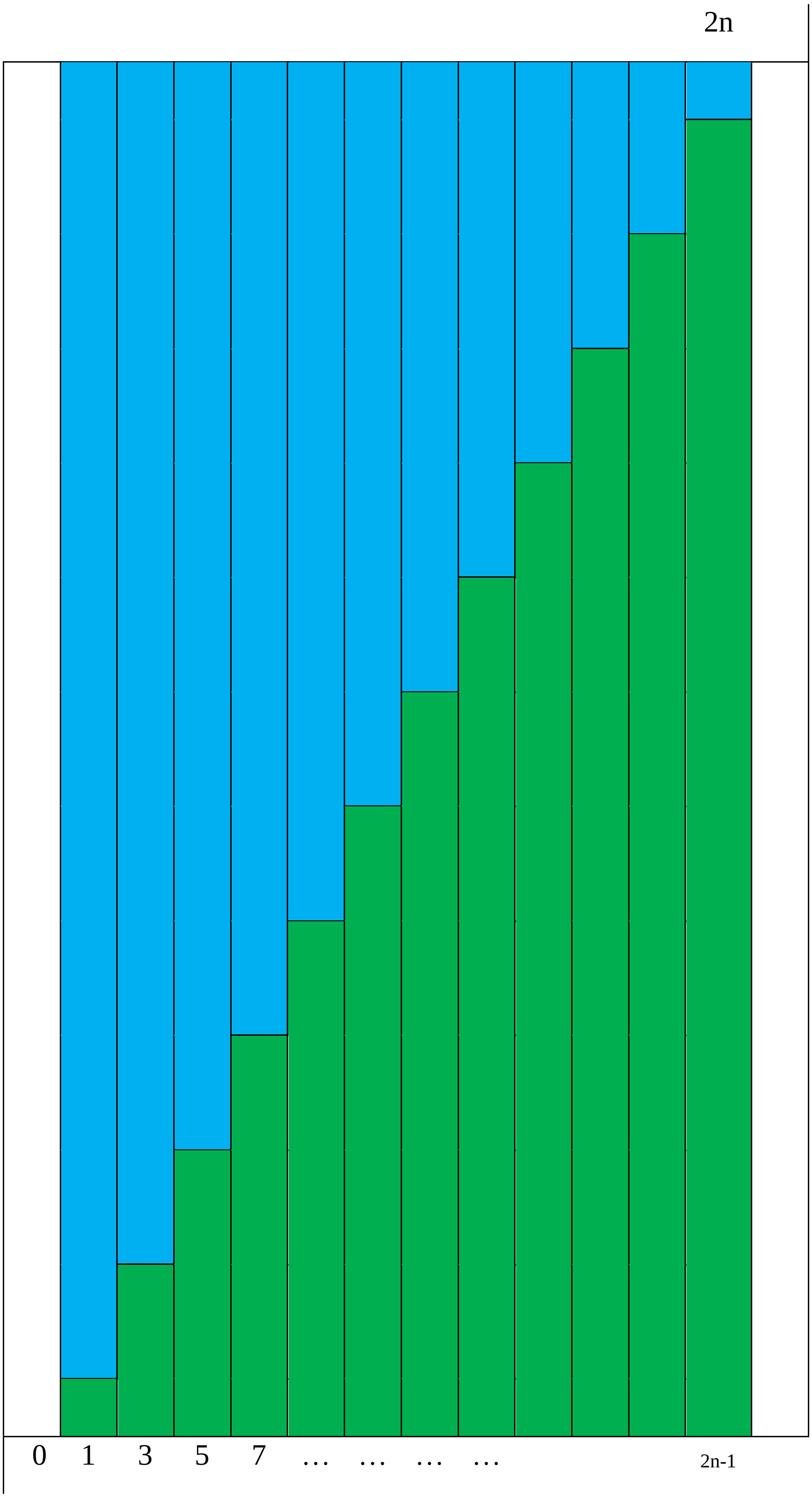
$$2S(n) = 2n + 2n + 2n + \cdots + 2n$$
$$2S(n) = 2n(n)$$
$$S(n) = n^2$$

3. Representasi geometrik "garis zig-zag"

Bukti yang menjelaskan lainnya adalah representasi jumlah n suku pertama bilangan ganjil positif dengan area berbentuk tangga berikut: persegi panjang dengan panjang sisinya n dan $2n$ dibagi garis zig-zag (hijau dan biru) (lihat Gambar 2).

Luas daerah (hijau dan biru) adalah $2n \times n$. Sehingga luas daerah bertangga hijau atau biru adalah n^2 atau luas daerah bertangga hijau atau biru

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = \frac{2n \times n}{2} = n^2$$



Gambar 2. Representasi jumlah n suku pertama bilangan ganjil positif

Baik bukti Gauss maupun representasi geometrik menunjukkan bahwa seseorang dapat mengadopsi pendekatan bukti yang menjelaskan untuk pengajaran bukti di kelas tanpa meninggalkan kriteria bukti matematika yang sah dan kembali bergantung pada intuisi saja. Yang harus dilakukan seseorang adalah mengganti suatu bukti, dari jenis yang tidak jelas, dengan bukti lain yang sama-sama sah yang memiliki kekuatan penjelas, kekuatan untuk mengeluarkan pesan matematika dalam sebuah teorema. Bukti yang hanya mengandalkan logika matematika tidak akan pernah bisa memberikan alasan yang jelas. Bukti-bukti semacam itu hanya melihat pada bentuk argument saja (Hanna, 1990; Hanna, 2000).

Fokus dari bukti yang menjelaskan jelas pada pemahaman, bukan pada mekanisme deduktif. Sehingga baiknya dalam pendidikan matematika kita harus lebih fokus sebanyak mungkin pada penjelasan matematika, baik yang menyoroti bagaimana mahasiswa menyelesaikan permasalahan bukti dari suatu teorema tentang ide-ide matematika penting yang mengarah pada kebenarannya, ataupun bagaimana ide-ide dalam struktur kognitif dapat mengkontruksi permasalahan bukti. Peran bukti dan pembuktian dalam matematika mengarahkan kita pada kebutuhan akan pengajaran bukti di kelas-kelas matematika. Menurut de Villiers (1990); Hanna (2000); dan Rav (1999) mengatakan peran sentral bukti dalam matematika adalah untuk: memvalidasi, menjelaskan, menemukan, sistemisasi hasil, penggabungan ke dalam kerangka kerja, dan menyampaikan pengetahuan matematika.

Lebih lanjut Hanna (2000) dan Thurston (1994) bukti dapat menunjukkan pernyataan matematika itu benar dengan asumsi aksioma tertentu, namun matematikawan lebih melihat kepada membangun kebenaran untuk mencari wawasan *mengapa*; bukti dapat memiliki kekuatan penjelas; dan melalui proses pembuktian, dapat menemukan hasil baru. Sehingga akhirnya, bukti mengkomunikasikan pengetahuan matematika dan menempatkan pengetahuan itu secara sistematis dalam suatu kerangka kerja. Selanjutnya Rav (1999) mengusulkan bahwa bukti adalah yang paling penting dalam matematika oleh karena bukti dapat menjadi alat, metode, dan strategi untuk memecahkan masalah. Oleh karena itu, salah satu kebutuhan mengajar bukti di kelas matematika adalah untuk mendukung pemahaman siswa.

Kegiatan menulis bukti (pembutian) bertujuan untuk membantu dalam menentukan apakah dan mengapa jawaban kita logis, melatih kebiasaan memberi argumen (penalaran deduktif), dan menjadikan kegiatan menyelidiki sebagai bagian utuh dari setiap pemecahan masalah dan merupakan aktivitas yang dapat mengembangkan pemahaman konsep (Balacheff, 1991; NCTM, 2000; Healy & Hoyles, 2000; Herbst, 2002; Kunimune et al., 2009; Van de Walle et al., 2012). Sementara, Weber (2003) menjelaskan bahwa tujuan dari pembuktian adalah untuk: (1) menjelaskan, (2) sistemisasi, (3) komunikasi, (4) penemuan hasil baru, (5) pertimbangan suatu definisi, (6) mengembangkan intuisi, dan (7) menyediakan otonomi.

Peran lain bukti dalam matematika adalah menjelaskan mengapa pernyataan matematika itu benar dengan asumsi tertentu (de Villiers, 1990; de Villiers, 2010; Weber, 2008). Bukti mengkomunikasikan pengetahuan matematika dan tempatnya dalam struktur yang terorganisir. Oleh karena itu, kebutuhan lain untuk mengajar bukti adalah untuk “menjelaskan” asal-usul dan hubungannya dengan pengetahuan matematika (Zaslavsky et al., 2012). Pengalaman siswa terhadap bukti (proof) dan pembuktian (proving) berbeda jelas dengan pengalaman matematikawan (akademisi) oleh karena tujuan mereka berbeda, yakni siswa di sekolah bahkan mahasiswa semester awal tidak terlibat dalam kegiatan pembuktian untuk menemukan hasil matematika baru (Herbst & Brach, 2006; Hilbert et al., 2008). Namun tujuannya adalah agar siswa memiliki pengalaman dalam penalaran yang mirip dengan yang dilakukan oleh matematikawan (akademisi); serta mempelajari bangunan pengetahuan matematika dan mendapatkan wawasan mengapa pernyataan itu benar. Di kelas matematika, bukti disajikan untuk mengajarkan kepada siswa proses berpikir logis dan berkomunikasi dan mungkin secara implisit memecahkan masalah sesuai dengan contoh (Herbst, 2002; Herbst & Brach, 2006).

Dari perspektif ini, di kelas matematika (sekolah) kegiatan membuktikan hanya dijadikan sebagai latihan dalam mengkonfirmasikan pernyataan dan teorema belajar yang tidak memiliki tujuan intelektual, oleh karena dalam situasi seperti ini siswa tidak sepenuhnya terlibat dalam upaya untuk mencari solusi untuk masalah matematika yang mereka hargai. Secara historis, bukti adalah alat retoris untuk meyakinkan orang lain bahwa pernyataan matematika itu benar (Harel & Sowder, 2007; Krantz, 2007). Untuk meyakinkan, bukti harus selaras dengan norma-norma (misalnya, bentuk penalaran, aturan logis inferensi, mode argumentasi dan mode representasi argumen) dari komunitas yang disajikan (Harel & Sowder, 2007; Siu, 2008; Stylianides, 2007). Bukti yang diajarkan di sekolah saat ini mengkomunikasikan bahwa bukti lebih kepada membangun kebenaran daripada memvalidasi pernyataan berdasarkan pada aksioma yang disepakati (Jahnke, 2010).

KESIMPULAN

Perbedaan antara kedua bukti ini adalah pada pemberian *alasan* yang berasal dari bukti itu sendiri atau argumen yang penjelas. Bukti matematis dapat meyakinkan/membuktikan, dan dapat pula menjelaskan. Kedua jenis bukti ini adalah bukti yang sah dan berfungsi sama dalam menetapkan validitas pernyataan matematis. Jika permasalahan bukti (pola bilangan: suku ke-n dan jumlah n suku pertama) disampaikan dalam perspektif bukti yang menjelaskan pada tingkat SD-SMP tidaklah masalah bahkan pada kenyataannya secara tidak sadar pendidik telah menyampaikannya, begitu pula pada tingkat menengah SMA konsep bukti dapat disampaikan dalam perspektif bukti yang menjelaskan dan bukti yang membuktikan (induksi matematika kelas XI); dan terakhir pada tingkat lanjutan (perguruan tinggi) harus disampaikan dalam perspektif bukti yang membuktikan/menyakinkan.

Peran bukti dalam kelas matematika pada tingkat perguruan tinggi adalah membuktikan/meyakinkan, pada tingkat menengah atas adalah membuktikan dan menjelaskan, dan di tingkat sekolah menengah pertama dan dasar peran utamanya adalah menjelaskan. Akibatnya bukti matematis tidak hanya membuktikan/menyakinkan, melainkan juga menjelaskan.

Siswa atau mahasiswa awal (mahasiswa yang masih teringat ingatan sekolah menengah), tidaklah seperti ahli matematika, sebelum belajar pentingnya mengenalkan berbagai topik matematika, sehingga tidak terlalu diberatkan dengan mekanisme deduktif. Tujuan dari memperkenalkan penggunaan bukti sebagai penjelas (bukti yang menjelaskan) adalah untuk lebih menekankan kepada pemahaman matematika, dan pemahaman membutuhkan daya tarik pengalaman matematika sebelumnya.

REKOMENDASI

Meneliti hambatan siswa atau mahasiswa dalam memahami, menggunakan bukti, dan menghargai bukti matematika sebagai konstruk matematika yang fundamental dan terarah. Mengidentifikasi proses kognitif siswa atau mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti yang menjelaskan sebagai alternatif dari bukti yang tidak menjelaskan (bukti yang hanya membuktikan). Serta mengeksplorasi aspek kognitif dan aspek pedagogis dari sebuah bukti.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penelitian ini tidak menerima hibah khusus dari agensi pendanaan mana pun di sektor publik, komersial, atau nirlaba.

REFERENSI

Balacheff, N. (1991). *The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof.* (Alan J. Bi, pp. 175–192). Kluwer Academic Publishers,Mathematics education library. hal-01550051. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2195-0_9

Balacheff, N. (2017). A study of students' proving processes at the junior high school level. *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education*, *December*, 284–297.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (Fourth Edi). John Wiley & Sons, Inc.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in Mathematics. *Pythagoras*.

de Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14

Devlin, K. (2003). Sets, Functions, and Logic: An Introduction to Abstract Mathematics. In *Sets, Functions, and Logic* (Third Edit). CRC Press.

Dumas, B. A., & McCarthy, J. E. (2015). Transition to Higher Mathematics: Structure and Proof (Second Edition). In *Creative Commons Attribu- tion, NonCommercial License*. https://doi.org/10.7936/K7Z899HJ

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2009). *Elements of Modern Algebra* (Seventh Ed, Issue 1). Brooks/Cole: Cengage Learning. https://doi.org/10.16309/j.cnki.issn.1007-1776.2003.03.004

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. https://doi.org/10.4324/9780203882009

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396–428. https://doi.org/10.2307/749651

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73–122. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2401_2

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 283–312. https://doi.org/10.1023/A:1020264906740

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/BF01273372

Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, *18*, 54–65. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.008

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_2

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications Second Edition* (Second). Elsevier Inc.

Krantz, S. G. (2007). The History and Concept of Mathematical Proof. In *The History and Concept of Mathematical Proof*.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2009). "Why do we have to prove this?" Fostering students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. *ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education*.

Morash, R. P. (1987). Bridge to abstract mathematics: Mathematical Proof and Structures. In *Choice Reviews Online* (Vol. 50, Issue 06). Random House, Inc. https://doi.org/10.5860/choice.50-3317

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. In *School Science and Mathematics*. The Council.

Purwanto. (2015). Argumen Valid. In *Pidato Pengukuhan Jabatan Guru Besar dalam Bidang Ilmu Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam disampaikan pada Sidang Terbuka Senat Universitas Negeri Malang tanggal 26 Oktober 2015* (pp. 1–27). Universitas Negeri Malang. http://library.um.ac.id/images/2015-Argumen-Valid- Prof-Drs-Purwanto-Ph.D.pdf

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*, 5–41. https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5

Siu, M. K. (2008). Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0087-y

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161–177. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1994-00502-6

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2012). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh Ed). Allyn & Bacon is an Imprint of Pearson.

Weber, K. (2003). Research Sampler 8: students' difficulties with proof. *The Mathematical Association of America: Online*, *1*, 1–8. http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 431–459.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1

Wikipedia contributors. (2020). *Theorem*. Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Theorem&oldid=944519294

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). Chapter 9 The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *G. Hanna and M. de Villiers (Eds.), Proof and Proving in Mathematics Education, New ICMI Study Series 15*, 215–230. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4