



Solusi Persamaan Dirac untuk Fermion dengan Model Potensial Penghalang Medan Elektromagnetik

Arista Romadani^{*)}, Erika Rani

Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, Indonesia, 65144

^{*)}Email korespondensi : arista.romadani@uin-malang.ac.id

DOI: <https://doi.org/10.20527/flux.v17i2.8105>

Submitted: 11 Maret 2020; Accepted: 08 Juni 2020

ABSTRACT– The solution of the Dirac equation in the presence of the electromagnetic field on the one-dimensional barrier potential is studied. The energy spectrum and the eigenfunction of the Dirac equation obtained by solving the Dirac equation and we introduced annihilation and creation operators for the Hamiltonian has an identical form in the harmonic oscillator. Regions I and III separated by a potential barrier characterized by the gap energy with the eigenfunctions as a sinusoidal function, and region II has the form of an exponent function. We found the eigenfunction involved positive and negative energy moves exponentially when passed through a barrier.

KEYWORDS : Barrier; Dirac; Eigenfunctions; Electromagnetic; Hamiltonian.

PENDAHULUAN

Semenjak kemunculannya pada tahun 2005, penelitian tentang *graphene* saat ini sudah sangat maju dan berkembang pesat bahkan sudah banyak diaplikasikan untuk produk-produk seperti baterai, material cerdas dan lain-lain. Tidak hanya fisikawan eksperimental yang terus melakukan penelitian dan mengembangkan *graphene* tetapi juga mendorong para fisikawan teoritik ikut terlibat dalam memberikan perhatian khusus terhadap pengembangan material tersebut. Hal ini dikarenakan struktur alamiah dan perilaku *graphene* tersusun dari atom-atom secara yang mikroskopis menunjukkan bahwa adanya bukti-bukti fenomena partikel relativistik seperti anomali kuantum efek Hall (Gusynin & Sharapov, 2005; Novoselov et al., 2005; Titheridge, 1985), serta penerapan elektrodinamika kuantum pada *graphene* (Katsnelson & Novoselov, 2007). Selain itu, karakteristik partikel relativistik *graphene* dimodelkan sebagai partikel fermion dalam potensial penghalang 2-dimensi dikenal sebagai fenomena Klein tunneling yang pertama kali dirumuskan oleh seorang fisikawan Swedia

Oskar Klein pada tahun 1929 (Katsnelson et al., 2006; Bai & Zhang, 2007; Zeb et al., 2008). Selain itu, penelitian *graphene* sudah sejak lama dikembangkan dalam ranah elektrodinamika kuantum (Klein, 1927; Calogeracos & Dombey, 1999; Itzykson & Zuber, 1926).

Dalam fisika kuantum kita mengenal istilah penerowongan yang menggambarkan bagaimana sebuah partikel kadang-kadang dapat melewati sebuah penghalang yang pada keadaan normalnya akan menghalangi mereka. Semakin lebar penghalang, maka semakin kecil kemungkinan sebuah partikel dapat melewati penghalang tersebut. Namun demikian, hal ini ternyata tidak berlaku bagi sebuah elektron yang bergerak dalam *graphene*. Dalam beberapa situasi, elektron dalam *graphene* bahkan dapat melintasi penghalang ini begitu saja seolah-olah penghalang itu tidak ada sama sekali (Jellal et al., 2014; Mekkaoui et al., 2015).

Pada penelitian ini dimodelkan secara teoritis bagaimana penggambaran partikel fermion dalam pengaruh medan elektromagnetik dengan penghalang energi gap

t' yang digambarkan dengan persamaan Dirac. Berangkat dari penelitian sebelumnya yang mengkaji kasus potensial penghalang dua dimensi dalam pengaruh medan magnet (Choubabi et al., 2010), maka dalam penelitian ini diperluas untuk kasus potensial penghalang satu dimensi dalam pengaruh medan magnet dan medan listrik (elektromagnetik) konstan pada Hamiltoniannya. Selanjutnya, mencari wakilan fungsi eigenspinor sebagai solusi persamaan Dirac secara analitik dan menentukan spektrum energinya untuk kasus potensial penghalang satu dimensi.

METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini dilakukan secara analitik dengan mengkonstruksi model matematis dan memperoleh penyelesaian yang merepresentasikan kasus potensial penghalang satu dimensi dari partikel fermion dalam pengaruh medan elektromagnetik.

Perilaku partikel fermion lebih lanjut dikaji melalui persamaan Dirac dengan beberapa tahapan. Pertama, memperumum bentuk Hamiltonian dalam pengaruh medan elektromagnetik dengan menambahkan wakilan suku medan listrik dan magnet pada bentuk Hamiltoniannya. Kedua, memodelkan sistem potensial penghalang satu dimensi dari partikel fermion dengan potensial penghalang tertentu dan mencari penyelesaiannya dengan pendekatan kasus osilator harmonik. Dalam kasus ini model potensial, terbagi menjadi 3 daerah dimana daerah I dan III tanpa potensial penghalang sementara daerah II dengan potensial penghalang sebesar energi gap t' . Terakhir, dari persamaan Dirac tersebut diperoleh solusi eigenspinor sebagai fungsi eigennya dan representasi spektrum energi sebagai nilai eigen.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Persamaan Dirac

Persamaan Dirac untuk partikel fermion dengan massa m adalah

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}_B \psi \quad (1)$$

\mathcal{H}_B merupakan Hamiltonian Dirac. Secara umum dapat dituliskan sebagai (Bhattacharya,

2007)

$$\mathcal{H}_B = c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (2)$$

dengan $p = -i\hbar\nabla$ adalah operator momentum dari fermion bermuatan serta α dan β konstanta yang memenuhi hubungan antikomutasi $\alpha^2 = \beta^2 = 1$. Jika Persamaan (2) disubstitusikan ke Persamaan (1) dan mengalikan kedua ruas dengan $\beta/\hbar c$ maka diperoleh

$$\frac{i\beta}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\alpha\beta \cdot \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi \quad (3)$$

kita definisikan nilai γ yaitu

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \alpha_i \beta$$

dengan relasi (James D Bjorken, 1964)

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga Persamaan (3) dituliskan sebagai

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) yang dikenal sebagai persamaan Dirac.

B. Persamaan Dirac dalam Medan Elektromagnetik

Pengaruh medan elektromagnetik pada persamaan Dirac mensyaratkan transformasi $p \rightarrow p - \frac{e}{c}A$ dan $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi$, dengan $A_\mu = (\phi, -A)$ dan $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$ (Kleinert, 2016). Bentuk Persamaan Dirac (1) mengikuti transformasi tersebut adalah

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) - \alpha_i c \left(p - \frac{e}{c}A \right) - \beta mc^2 \right] \psi = 0 \quad (5)$$

dengan $p = -i\hbar\nabla$ operator momentum fermion bermuatan yang bergerak dalam pengaruh medan eksternal potensial elektromagnetik. Secara umum pada limit tertentu solusi fungsi gelombang ψ yang memenuhi Persamaan (5) adalah

$$\psi = u_1(p)e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} + u_2(p)e^{\frac{-i(px-Et)}{\hbar}}$$

kedua suku solusi di atas (eksponensial positif dan negatif) terkait dengan solusi partikel (eksponensial positif) dan anti-partikel (eksponensial negatif). Kita tinjau solusi sederhana untuk partikel fermion (eksponensial positif), dari Persamaan (5) diperoleh

$$\left[c\alpha \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A \right) + \beta mc^2 + e\phi \right] \psi = E\psi \quad (6)$$

dengan $\psi = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ dinyatakan dalam bentuk spinor-4. Persamaan (6) dituliskan dalam bentuk matrik

$$\begin{pmatrix} e\phi + mc^2 & c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right) \\ c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right) & e\phi - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (7)$$

dengan v dan w terdiri dari dua komponen vektor yang menggambarkan dua partikel yang memiliki keadaan spin up dan spin down. $E' = E - mc^2$ merupakan energi elektron pada level di atas energi diam. Secara eksplisit dari Persamaan (7) diperoleh relasi

$$e\phi v + c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)w = E'v \quad (8)$$

$$c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)v + (e\phi - 2mc^2)w = E'w. \quad (9)$$

dari Persamaan (9) diperoleh juga kaitan fungsi eigen spinor v dan w yaitu

$$w = \frac{1}{E_+ + mc^2 - e\phi} c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)v \quad (10)$$

dengan $E_{\pm} = E' \pm mc^2$. Dengan langkah yang sama dari Persamaan (8) diperoleh

$$v = \frac{1}{E_- + mc^2 - e\phi} c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)w \quad (11)$$

selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (10) ke Persamaan (11) dan $E' = E - mc^2$ diperoleh

$$(E - mc^2 - e\phi) = \frac{1}{E_+ + mc^2 - e\phi} \times \left[c\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right) \right]^2 \quad (12)$$

Persamaan (12) dalam bentuk relativistik ($mc^2 \gg e\phi$), untuk bentuk non-relativistik diperoleh dengan asumsi $mc^2 \ll e\phi$.

Sementara itu suku kedua pada Persamaan (12) menghasilkan

$$\left[\sigma\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right) \right]^2 = \left(p - \frac{e}{c}A \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \sigma B$$

sehingga diperoleh

$$E' = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c}A \right)^2 - \mu B + e\phi \quad (13)$$

dengan $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$ adalah momen magnetik Bohr (Kleinert, 2016). Kita ambil nilai gauge Landau $A = B(0, x, 0)$ sehingga

$$\sigma\left(p - \frac{e}{c}A\right) = \begin{pmatrix} p_3 & p_- - \frac{e}{c}Bx \\ p_+ + \frac{e}{c}Bx & -p_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

dengan $p_{\pm} = p_1 \pm ip_2$. Dari Persamaan (11)

dan (14) diperoleh bentuk spinor dari

$$v = \begin{pmatrix} \frac{cp_3}{E_- + mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_+ + eBx}{E_- + mc^2 - e\phi} \end{pmatrix} \quad (15)$$

untuk $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan

$$v = \begin{pmatrix} \frac{cp_- - eBx}{E_- + mc^2 - e\phi} \\ -cp_3 \\ E_- + mc^2 - e\phi \end{pmatrix} \quad (16)$$

untuk $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bentuk fungsi eigen untuk energi negatif adalah

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_3}{E_- + mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_+ + eBx}{E_- + mc^2 - e\phi} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{cp_- - eBx}{E_- + mc^2 - e\phi} \\ -cp_3 \\ E_- + mc^2 - e\phi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

dengan metode yang sama bentuk fungsi eigen untuk energi positif adalah

$$w = \begin{pmatrix} \frac{cp_3}{E_+ + mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_+ + eBx}{E_+ + mc^2 - e\phi} \end{pmatrix} \quad (19)$$

untuk $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan

$$w = \begin{pmatrix} \frac{cp_- - eBx}{E_+ - mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_3}{E_+ - mc^2 - e\phi} \end{pmatrix} \quad (20)$$

untuk $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sehingga

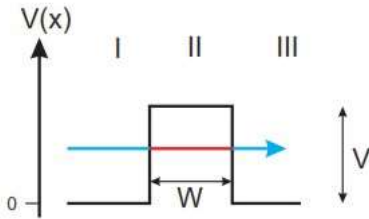
$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{cp_- - eBx}{E_+ - mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_3}{E_+ - mc^2 - e\phi} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{cp_+ + eBx}{E_+ + mc^2 - e\phi} \\ \frac{cp_+ + eBx}{E_+ + mc^2 - e\phi} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

C. Model Potensial Penghalang Satu Dimensi

Pada bagian ini akan dikaji solusi persamaan Dirac terhadap partikel fermion

dalam pengaruh medan elektromagnetik untuk model potensial penghalang satu dimensi. Sebelumnya sudah dikaji perilaku partikel fermion hanya dalam pengaruh medan magnet saja (Choubabi et al., 2010), namun pada bahasan kali ini akan diperluas pengaruh medan elektromagnetik dari sumbu medan magnet maupun medan listrik secara khusus kemudian akan dicari solusi fungsi gelombang untuk model penghalang.



Gambar 1 potensial penghalang satu dimensi

Dalam kasus ini kita bagi menjadi 3 daerah bagian yaitu daerah I, II, dan III dimana partikel I dan III memiliki sifat yang hampir sama (lihat Gambar 1). Perbedaan dari bentuk Hamiltonian daerah II dibandingkan dengan daerah I dan III adalah perbedaan potensial.

Daerah I dan III

Pada pembahasan di daerah I dan III merujuk pada penelitian sebelumnya (Jellal et al., 2012). Hamiltonian dari fermion berspin nol pada daerah I dan III dengan pengaruh medan elektromagnetik dinyatakan sebagai

$$H_D^{(1)} = v_f \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + \sigma_2 e E x_2 + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_3 \quad (23)$$

dengan $v_f \approx 10^6$ m/s yang dikenal sebagai kecepatan Fermi, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ adalah matrik Pauli, dan μ_B adalah magneton Bohr. Anggap potensial vektor dalam gauge Landau adalah $A(x_1, x_2) = (Bx_2, 0)$, komponen momentum konjugat $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ sehingga Persamaan (23) dalam bentuk matriks

$$H_D^{(1)} = v_f \begin{pmatrix} 0 & p_1 - ip_2 - \frac{eBx_2}{c} - \frac{ieEx_2}{v_f} \\ p_1 + ip_2 - \frac{eBx_2}{c} + \frac{ieEx_2}{v_f} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_3$$

dengan mengatur $\xi = 1 + \frac{ieE}{v_f B}$ dan $\bar{\xi} = 1 - \frac{ieE}{v_f B}$ maka

$$H_D^{(1)} = v_f \begin{pmatrix} 0 & p_1 - ip_2 - \frac{\hbar}{l_B^2} \xi x_2 \\ p_1 + ip_2 - \frac{\hbar}{l_B^2} \bar{\xi} x_2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_3 \quad (25)$$

dimana $l_B^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ adalah panjang magnetik.

Untuk mendiagonalisasi Persamaan (25) perlu dikenalkan operator anihilasi dan kreasi yaitu

$$a = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}} \left(ip_1 - p_2 - i \frac{\hbar}{l_B^2} \xi x_2 \right) \quad (26)$$

$$a^\dagger = \frac{l_B}{\hbar\sqrt{2}} \left(-ip_1 - p_2 + i \frac{\hbar}{l_B^2} \bar{\xi} x_2 \right)$$

kedua operator tersebut memenuhi aturan komutasi sehingga Persamaan (25) diubah menjadi bentuk matrik

$$H_D^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} g \mu_B B & i \hbar \omega_k a^\dagger \\ -i \hbar \omega_k a & -\frac{1}{2} g \mu_B B \end{pmatrix} \quad (27)$$

$\omega_k = \sqrt{2} \frac{v_f}{l_B}$ merupakan frekuensi siklotron. Hamiltonian pada Persamaan (27) memenuhi relasi

$$H_D^{(1)} \psi = \epsilon \psi \quad (28)$$

dengan pemisahan variabel $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_2) e^{ik_1 x_1}$ dimana $\varphi(x_2)$ merupakan fungsi eigen spinor

$$\varphi(x_2) = \begin{pmatrix} |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Dari Persamaan (27) dan (28) maka diperoleh kaitan

$$i \hbar \omega_k a^\dagger |\varphi_2\rangle = \left(\epsilon - \frac{1}{2} g \mu_B B \right) |\varphi_1\rangle \quad (29)$$

$$-i \hbar \omega_k a |\varphi_1\rangle = \left(\epsilon + \frac{1}{2} g \mu_B B \right) |\varphi_2\rangle$$

Jika $|\varphi_2\rangle$ disubstitusikan ke $|\varphi_1\rangle$ maka

$$\left[\epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} g \mu_B B \right)^2 - \hbar^2 \omega_k^2 a^\dagger a \right] |\varphi_1\rangle = 0$$

dengan nilai energi yang bentuknya seperti osilator harmonik memenuhi (Griffiths, 2005)

$$\epsilon_{n\pm} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g \mu_B B \right)^2 + n \hbar^2 \omega_k^2}, \quad (30)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

nilai eigennya berupa energi positif dan energi positif. Fungsi eigen u untuk energi positif adalah

$$|\varphi_1^+\rangle = |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (31)$$

substitusikan Persamaan (26) ke (31) maka

$$|\varphi_1^+\rangle = |n\rangle = \left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^n \frac{(-ip_1 - p_2 + i\frac{\hbar}{l_B^2}\bar{\xi}x_2)^n}{\sqrt{2^n n!}} |0\rangle \quad (32)$$

dari Persamaan (29) diperoleh

$$|\varphi_2^+\rangle = -\frac{i\hbar\omega_k a}{\left(\epsilon_+ + \frac{1}{2}g\mu_B B\right)} |n\rangle \quad (33)$$

selanjutnya Persamaan (26) dan (31) disubstitusikan ke Persamaan (33) diperoleh fungsi eigen

$$|\varphi_2^+\rangle = -i \sqrt{\frac{\left(\epsilon_+ - \frac{1}{2}g\mu_B B\right)}{\left(\epsilon_+ + \frac{1}{2}g\mu_B B\right)}} |n-1\rangle \quad (34)$$

atau dalam fungsi eigen spinor

$$|\varphi_n^+\rangle = \begin{pmatrix} u_n^+ |n\rangle \\ -iu_n^- |n-1\rangle \end{pmatrix} \quad (35)$$

dengan nilai u_n^\pm sebagai

$$u_n^\pm = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\frac{1}{4}g\mu_B B}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}g\mu_B B\right)^2 + n\hbar^2\omega_k^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

Untuk nilai energi negatif (30) dengan pendekatan yang sama diperoleh fungsi eigen

$$|\varphi_n^-\rangle = \begin{pmatrix} iu_n^+ |n+1\rangle \\ u_n^- |n\rangle \end{pmatrix} \quad (37)$$

sehingga solusi fungsi eigen untuk daerah I dan III

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u_n^+ |n\rangle \\ -iu_n^- |n-1\rangle \\ iu_n^+ |n+1\rangle \\ u_n^- |n\rangle \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1}. \quad (38)$$

Daerah II

Daerah 2 kita identifikasikan dari partikel fermion dengan potensial penghalang t' (memiliki energi gap t') dalam pengaruh medan elektromagnetik. Bentuk Hamiltoniannya dengan memperumum Hamiltonian pada daerah 1 yaitu Persamaan (23) sehingga diperoleh

$$H_D^{(2)} = v_f \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + \sigma_2 e E x_2 + t' \sigma_3 + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_3 \quad (39)$$

bentuk matriks Persamaan (39)

$$H_D^{(2)} = v_f \begin{pmatrix} t' & p_1 - ip_2 - \frac{e B x_2}{c} - \frac{i e E x_2}{v_f} \\ p_1 + ip_2 - \frac{e B x_2}{c} + \frac{i e E x_2}{v_f} & -t' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_3 \quad (40)$$

dengan cara yang semisal dengan sebelumnya selanjutnya Persamaan (40) didiagonalisasi dengan menggunakan operator anihilasi dan kreasi dan selanjutnya diperoleh matrik sebagai berikut

$$H_D^{(2)} = \begin{pmatrix} t' + \frac{1}{2} g \mu_B B & i \hbar \omega_k a^\dagger \\ -i \hbar \omega_k a & t' - \frac{1}{2} g \mu_B B \end{pmatrix} \quad (41)$$

Hamiltonian Persamaan (41) memenuhi relasi

$$H_D^{(2)} \psi = (\epsilon - V) \psi \quad (42)$$

solusi yang mungkin adalah

$$\psi(x_1, x_2) = \phi(x_2) e^{q_1 x_1}$$

dengan

$$\phi(x_2) = \begin{pmatrix} |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Dari Persamaan (41) dan (42) diperoleh relasi

$$\begin{aligned} i \hbar \omega_k a^\dagger |\varphi_2\rangle &= \left(\epsilon' - t' - \frac{1}{2} g \mu_B B \right) |\varphi_1\rangle \\ -i \hbar \omega_k a |\varphi_1\rangle &= \left(\epsilon' - t' + \frac{1}{2} g \mu_B B \right) |\varphi_2\rangle \end{aligned} \quad (43)$$

dengan $\epsilon' = \epsilon - V$. Dari Persamaan (43), $|\varphi_2\rangle$ disubstitusikan ke $|\varphi_1\rangle$ menjadi

$$\left[(\epsilon' - t')^2 - \left(\frac{1}{2} g \mu_B B \right)^2 - \hbar^2 \omega_k^2 a^\dagger a \right] |\varphi_1\rangle = 0$$

atau

$$\begin{aligned} \epsilon'_{n\pm} &= t' \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g \mu_B B \right)^2 + n \hbar^2 \omega_k^2} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

merupakan spektrum energi dari nilai eigen yang memiliki bentuk seperti osilator harmonic (Griffiths, 2005). Oleh karena itu bentuk fungsi eigen sebagai berikut

$$\begin{aligned} |\varphi_1^+\rangle &= |n\rangle \\ &= \left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^n \frac{(-ip_1 - p_2 + i\frac{\hbar}{l_B^2}\bar{\xi}x_2)^n}{\sqrt{2^n n!}} |0\rangle \end{aligned} \quad (45)$$

dan

$$\begin{aligned} |\varphi_2^+\rangle &= -\frac{i\hbar\omega_k a}{\left(\epsilon' + t' + \frac{1}{2}g\mu_B B\right)} |n\rangle \\ |\varphi_2^+\rangle &= -i \sqrt{\frac{\left(\epsilon' - t' - \frac{1}{2}g\mu_B B\right)}{\left(\epsilon' + t' + \frac{1}{2}g\mu_B B\right)}} |n-1\rangle. \end{aligned} \quad (46)$$

Fungsi eigen spinor untuk energi positif (44) adalah

$$|\varphi_n^+\rangle = \begin{pmatrix} v_n^+ |n\rangle \\ -i v_n^+ |n-1\rangle \end{pmatrix} \quad (47)$$

dengan nilai v_n^\pm adalah

$$v_n^\pm = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{t' + \frac{1}{4}g\mu_B B}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}g\mu_B B\right)^2 + n\hbar^2\omega_k^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

sementara untuk energi negatif dengan pendekatan yang sama diperoleh fungsi eigen spinor yaitu

$$|\varphi_n^-\rangle = \begin{pmatrix} iv_n^+ |n+1\rangle \\ v_n^- |n\rangle \end{pmatrix} \quad (49)$$

sehingga solusi fungsi eigen untuk daerah II adalah

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} v_n^+ |n\rangle \\ -iv_n^+ |n-1\rangle \\ iv_n^+ |n+1\rangle \\ v_n^- |n\rangle \end{pmatrix} e^{q_1 x_1}. \quad (50)$$

KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah berhasil diformulasikan solusi dari persamaan Dirac yang menggambarkan perilaku partikel fermion yang diwakili fungsi eigen dan spektrum energi sebagai nilai eigen.

Penyelesaian pada daerah I dan III dengan memperkenalkan operator anihilasi dan kreasi seperti pada kasus osilator harmonik telah menghasilkan spektrum energi sebagai nilai eigen pada Persamaan (31). Nilai spektrum energi bernilai positif dan negatif dengan fungsi eigen yang ditunjukkan pada Persamaan (39). Pada daerah II spectrum energy yang dihasilkan juga bernilai positif dan negatif ditunjukkan Persamaan (46) dengan fungsi eigennya seperti pada Persamaan (52).

Daerah 1 dan 3 jika dibandingkan dengan daerah 2 memiliki perbedaan yaitu bentuk spektrum energi pada daerah 2 memiliki bentuk yang lebih umum dan jika diaproksimasikan dengan menghilangkan penghalang ($t' \approx 0$) maka akan didapati nilai spektrum energi mirip dengan daerah 1 dan 3. Selain itu, bentuk fungsi eigen pada daerah 1 dan 3 memiliki bentuk sinusoidal sedangkan pada daerah 2 bentuknya eksponensial imajiner.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah membantu

dalam penyusunan naskah artikel ini khususnya Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LP2M) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dan Direktorat Pendidikan Tinggi Keagamaan Islam Direktorat Jenderal Pendidikan Islam Kementerian Agama Republik Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- Bai, C., & Zhang, X. (2007). Klein paradox and resonant tunneling in a graphene superlattice. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, 76(7), 1–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.075430>
- Bhattacharya, K. (2007). *Solution of the Dirac equation in presence of an uniform magnetic field*. <http://arxiv.org/abs/0705.4275>
- Calogeracos, A., & Dombey, N. (1999). History and physics of the Klein paradox. *Contemporary Physics*, 40(5), 313–321. <https://doi.org/10.1080/001075199181387>
- Choubabi, E. B., El Bouziani, M., & Jellal, A. (2010). Tunneling for Dirac fermions in constant magnetic field. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 7(6), 909–931. <https://doi.org/10.1142/S0219887810004622>
- Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics. Instructor's Solution Manual*. 468. <https://books.google.com/books?id=BsvAQAAIAAJ&pgis=1>
- Gusynin, V. P., & Sharapov, S. G. (2005). Unconventional integer quantum hall effect in graphene. *Physical Review Letters*, 95(14), 1–4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.146801>
- Itzykson, & Zuber. (1926). *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill.
- James D Bjorken, S. D. D. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*.
- Jellal, A., El Mouhafid, A., & Daoud, M. (2012). Massless Dirac fermions in an electromagnetic field. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2012(1). <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2012/01/P01021>

- Jellal, A., Mekkaoui, M., Choubabi, E. B., & Bahlouli, H. (2014). Tunneling of massive Dirac fermions in graphene through time-periodic potential. *European Physical Journal B*, 87(6), 0–19. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2014-41096-3>
- Katsnelson, M. I., & Novoselov, K. S. (2007). Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. *Solid State Communications*, 143(1–2), 3–13. <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2007.02.043>
- Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S., & Geim, A. K. (2006). Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics*, 2(9), 620–625. <https://doi.org/10.1038/nphys384>
- Klein, B. O. (1927). *Electrodynamics and wave mechanics from the standpoint of the correspondence principle*. 41.
- Kleinert, H. (2016). Relativistic Particles and Fields in External Electromagnetic Potential. *Particles and Quantum Fields*, 2, 436–473. https://doi.org/10.1142/9789814740913_0006
- Mekkaoui, M., Choubabi, E. B., Jellal, A., & Bahlouli, H. (2015). *Transmissions in Graphene through Double Barriers and Periodic Potential*. 0–17. <http://arxiv.org/abs/1503.01247>
- Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Katsnelson, M. I., Grigorieva, I. V., Dubonos, S. V., & Firsov, A. A. (2005). Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature*, 438(7065), 197–200. <https://doi.org/10.1038/nature04233>
- Titheridge, E. (1985). $h = h^2 = (H / fc) / (fc)$. *October*, 20(2), 247–256.
- Zeb, M. A., Sabeeh, K., & Tahir, M. (2008). Chiral tunneling through a time-periodic potential in monolayer graphene. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, 78(16), 1–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.165420>