JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Vol. 01 No. 02. Mei 2016.
ISSN: 2527-3159 *E-ISSN: 2527-3167*

ANALISA KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKTIF DI RUANG METRIK LENGKAP DENGAN MEMANFAATKAN JARAK-W

Malahayati

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
e-mail: malahayati_01@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini mengkaji tentang sifat titik tetap pada jarak-w diruang metrik lengkap. Di dalam penelitian ini diberikan pula suatu contoh penggunaan sifat titik tetap berdasarkan sifat yang telah dibahas.

Kata kunci: Ruang metrik lengkap, jarak-w, titik tetap

1. Pendahuluan

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis. Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Imran ayat 191 berikut:

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

Artinya :

"(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka" (QS. Al-Imran: 191).

Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika yang melatih cara berpikir secara sistematis, logis, analis, kritis, maka di dalam matematika terdapat satu bidang yang dalam mempelajarinya dituntut untuk berfikir secara analitis, yaitu bidang analisis. Analisis merupakan cabang matematika yang berkembang dari kalkulus. Topik yang dibahas dalam analisis diantaranya adalah teori titik tetap (*Fixed Point Theory*).

Titik tetap mempunyai peranan yang penting dalam analisis fungsional. Banyak masalah matematis yang dapat dipecahkan dengan menggunakan prinsip titik tetap. Beberapa diantaranya adalah masalah persamaan linear, persamaan diferensial biasa, persamaan integral, dan persamaan diferensial parsial. Eksistensi titik tetap (*fixed point*) untuk suatu fungsi telah banyak dikaji

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

oleh para ahli sebagai salah satu metode menyelesaikan problem matematika.

Pada tahun 1922, sebuah karya yang terkenal dan dihargai dalam bidang teori titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang metrik lengkap, berhasil dibuktikan oleh Banach yang kemudian disebut dengan teori titik tetap Banach. Hasil dari pembuktian tersebut telah menjadi aset penting untuk matematika terapan, karena aplikasi dari teori tersebut berperan besar pada berbagai cabang ilmu matematika yang meliputi persamaan diferensial, persamaan integral, dan bidang ilmu matematika lainnya, terutama yang melibatkan logika pemrograman dan teknik elektronik. Teori titik tetap itu sendiri merupakan gabungan yang menarik dari analisis, topologi, dan geometri. Selama 50 tahun terakhir teori titik tetap diakui sangat maju dan penting sebagai alat dalam studi fenomena nonlinier. Secara khusus teknik titik tetap telah diterapkan pada berbagai bidang seperti: biologi, kimia, ekonomi, teori permainan, dan fisika

Teorema titik tetap Banach telah menarik banyak peneliti untuk terlibat dalam mempelajari dan mengeksplorasi teorema tersebut untuk mendapatkan hasil yang baru dalam pemetaan kontraktif menggunakan berbagai kondisi. Pada tahun 1996 W.Takahashi memperkenalkan teori titik tetap di ruang metrik dengan terlebih dahulu mendefinisikan sebuah jarak, yang selanjutnya disebut *w-distance* (jarak-w). Teori tersebut telah menarik banyak peneliti untuk terlibat dalam mempelajari dan mengeksplorasi lebih jauh lagi, diantaranya Razani, dkk (2009) telah meneliti sifat titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang bertipe integral dengan memanfaatkan jarak-w. Selain itu Lakzian,dkk (2009) telah meneliti sifat titik tetap dalam ruang metrik *cone* dengan memanfaatkan jarak-w.

Berdasarkan teori yang diperkenalkan oleh Takahashi dan beberapa hasil penelitian terdahulu tersebut, menarik untuk diteliti lebih lanjut mengenai sifat titik tetap di ruang metrik lengkap dengan memanfaatkan jarak-w pada suatu pemetaan kontraktif.

2. Teori Dasar

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pengertian dasar dan sifat yang merupakan konsep awal untuk dipahami agar mudah mengikuti pembahasan selanjutnya. Pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang disajikan diadopsi dari beberapa literatur yang disebutkan pada daftar pustaka.

Berikut ini, diberikan beberapa teori dasar diawali dengan membahas konsep fungsi semikontinu, yang sangat diperlukan dalam pembahasan pada bagian selanjutnya. Fungsi – fungsi yang dibicarakan bernilai real dan didefinisikan pada E, dengan E himpunan bagian dari ruang metrik. Sebelumnya disepakati terlebih dahulu bahwa setiap pengambilan infimum dan supremum dari suatu himpunan pada bagian ini, himpunan yang dimaksud merupakan himpunan bagian dari $\overline{\boldsymbol{R}}$, dengan $\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dalam mendefinisikan fungsi semikontinu diperlukan konsep limit atas dan limit bawah, oleh karena itu pada sub bab ini dimulai dengan menjelaskan konsep limit atas dan limit bawah beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.1 *Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada E dan $x_0 \in E$.*

1) *Limit atas (upper limit) fungsi f ketika x mendekati x_0 ditulis dengan $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ dan didefinisikan*
$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x) = \inf\{M_\varepsilon(f, x_0) : \varepsilon > 0\},$$
dengan $M_\varepsilon(f, x_0) = \sup\{f(x) : x \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\}$.
2) *Limit bawah (lower limit) fungsi f ketika x mendekati x_0 ditulis dengan $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ dan didefinisikan*
$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup\{m_\varepsilon(f, x_0) : \varepsilon > 0\},$$
dengan $m_\varepsilon(f, x_0) = \inf\{f(x) : x \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\}$.

Pada Definisi diatas, nilai limitnya selalu ada dan dapat bernilai berhingga, $+\infty$, atau $-\infty$. Selanjutnya diberikan definisi fungsi semikontinu.

Definisi 2.2 *Diberikan fungsi* f *yang didefinisikan pada* E *dan* $x_0 \in E$.

1) *Fungsi* f *dikatakan semikontinu atas (**upper semicontinuous**) di* x_0 *apabila* $f(x_0) = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$. *Selanjutnya, fungsi* f *dikatakan semikontinu atas pada* E *apabila fungsi* f *semikontinu atas disetiap* $x_0 \in E$.
2) *Fungsi* f *dikatakan semikontinu bawah (**lower semicontinuous**) di* x_0 *apabila* $f(x_0) = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$. *Selanjutnya, fungsi* f *dikatakan semikontinu bawah pada* E *apabila fungsi* f *semikontinu bawah disetiap* $x_0 \in E$.
3) *Fungsi yang semikontinu atas atau semikontinu bawah dinamakan fungsi semikontinu.*

Selanjutnya akan diberikan definisi tentang jarak-w pada ruang metrik

Definisi 2.3 (Mohanta 2011:134) *Diberikan ruang metrik* (X, d), *fungsi* $p : X \times X \to [0,\infty)$ *dikatakan* jarak-*w pada X apabila memenuhi:*

1. $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$;
2. $p(x,\cdot) : X \to [0,\infty)$ *merupakan fungsi lower semicontinous (LSC), apabila untuk setiap* $x \in X$ *dan* $y_n \to y$ *di* X *maka* $p(x,y) \leq lim\, inf_n\, p(x,y_n)$;
3. *untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga* $p(z,x) \leq \delta$ *dan* $p(z,y) \leq \delta$ *berlaku* $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Untuk mempermudah memahami lebih lanjut tentang jarak-*w* perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.4 (Razani, dkk 2009:114) *Diberikan* $X = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ *dan* x_n *merupakan barisan turun, jika fungsi* $d : X \times X \to [0,\infty)$ *didefinisikan sebagai berikut: jika* $x \neq y$ *maka* $d(x,y) = x + y$ *dan apabila* $x = y$ *maka* $d(x,y) = 0$, *dengan d adalah metrik atas X dan* (X, d) *adalah ruang metrik, selanjutnya didefinisikan* $p(x,y) = y$, *untuk setiap* $x, y \in X$, *maka fungsi p adalah* jarak-*w*.

Bukti :

(i) Ambil sebarang $x, y, z \in X$
Akan ditunjukan bahwa
$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$.
Karena $x, y, z \in X$ maka berlaku
$$p(x,y) = y \leq p(x,z) + p(z,y)$$
Sehingga terbukti bahwa apabila untuk sebarang *x,y,z∈X* berlaku $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$.

(ii) Ambil sebarang $x \in X$
akan ditunjukan bahwa fungsi
$p(x,\ \cdot) : x \to [0,\infty)$ merupakan fungs*i Lower Semicontinous (LSC).*
Fungsi $p(x,\ \cdot) : x \to [0,\infty)$ dikatakan *LSC* jika memenuhi
$$p(x,y) \leq liminf_{\mathrm{n}}\, p(x,y_n) .$$
Ambil sebarang $x, y \in X$.
Perhatikan bahwa :
$$\lim inf_{\mathrm{n}}\, p(x,y_n) \leq \lim inf_{\mathrm{n}}(p(x,y) + p(y,y_n)) = \lim inf_{\mathrm{n}}(y + y_n) = y + liminf_{\mathrm{n}}\, y_n$$
diperoleh :
$$p(x,y) = y \leq y + liminf_{\mathrm{n}}\, y_n$$
Sehingga terbukti bahwa :
$$p(x,y) \leq lim\, inf_n\, p(x,y_n)$$
Dengan demikian terbukti benar bahwa $p(x,\ \cdot)$ adalah fungsi *lower semicontinous* .

(iii) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$,
dengan $p(z,x) \leq \delta$ dan $p(z,y) \leq \delta$,
karena $x, y, z \in X$ maka berlaku
$p(z,x) = x \leq \delta$ dan $p(z,y) = y \leq \delta$.
Sehingga diperoleh :
$$d(x,y) = x + y \leq \delta + \delta = 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ISSN: 2527-3159 ***E-ISSN: 2527-3167***

Jadi terbukti bahwa apabila terdapat sebarang ε > 0 dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ dengan $p(z,x) \leq \delta$ dan $p(z,y) \leq \delta$, berlaku $d(x,z) \leq \varepsilon$. Karena p memenuhi kondisi jarak-*w*, sehingga terbukti bahwa p adalah jarak-*w* pada himpunan *X*.■

Selanjutnya akan diberikan dua himpunan yang akan digunakan untuk membuktikan lemma-lemma penunjang dalam membuktikan sifat titik tetap untuk jarak-*w* pada ruang metrik. Berikut ini adalah himpunan-himpunannya.

Definisi 2.5 (Razani 2009:114) *Diberikan sebuah himpunan yang berisikan fungsi kontinu kanan yang tidak turun katakan φ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\varphi(\varepsilon) > 0$. Berikut adalah himpunannya,*

$$\Phi = \{\varphi | \varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)\}$$

Selanjutnya diberikan sebuah himpunan yang berisikan fungsi kontinu kanan yang tidak turun katakan ψ dan untuk setiap $t > 0$ berlaku $\psi(t) < t$. Berikut himpunannya,

$$\Psi = \{\psi | \psi: [0,\infty) \to [0,\infty)\}$$

Perhatikan contoh berikut, agar mempermudah dalam *memahami* himpunan di atas.

Contoh 2.6 (Razani 2009:115): Diberikan barisan non-negatif $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan yang turun tegas, konvergen ke 0 dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $c_{n-1}a_n > a_{n+1}$ dengan $0 < c_{n-1} < 1$, didefinisikan fungsi,

$$\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$$

dengan definisi fungsi sebagai berikut :

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ c_n t, & a_{n+1} \leq t < a_n \\ c_0, & t \geq a_1 \end{cases}$$

Maka ψ adalah anggota Ψ.

Bukti:
Akan ditunjukan bahwa $\psi \in \Psi$, artinya akan ditunjukan ψ adalah barisan tidak turun, kontinu kanan dan untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\psi(t) < t\ .$$

a. Akan ditunjukan ψ adalah barisan tidak turun, artinya akan ditunjukan bahwa apabila $t_1 < t_2$ maka $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$.
Ambil sebarang t_1 dan t_2 dengan $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ dan untuk $t_1, t_2 > 0$ $t_1 = a_{n+1}$ dan $t_2 = a_{n+2}$, menggunakan kontraposisinya maka akan ditunjukan bahwa apabila $\psi(t_1) > \psi(t_2)$ maka $t_1 \geq t_2$,
perhatikan bahwa, berdasarkan definisi fungsi $\psi(t)$ di atas, diperoleh

$$\psi(t_1) > \psi(t_2)$$
$$c_n t_1 > c_n t_2$$
$$\Leftrightarrow\ c_n a_{n+1} > c_n a_{n+2}$$

karena $0 < c_n < 1$ maka

$$a_{n+1} > c_n\, a_{n+1}$$

Sehingga diperoleh,

$$a_{n+1} > c_n\, a_{n+1} > a_{n+2}$$

maka

$a_{n+1} > a_{n+2} \Leftrightarrow\ t_1 > t_2$

Jadi terbukti bahwa $t_1 \geq t_2$, sehingga bernilai sama dengan apabila $t_1 < t_2$ maka $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$.

b. fungsi ψ kontinu kanan, sebab :
1. $\psi(0) = 0$
2. $\lim_{t\to 0^+} \psi(t) = \lim_{t\to 0^+} c_n t$
$= c_n \lim_{t\to 0^+} t = c_n . 0 = 0$
3. $\lim_{t\to 0^+} \psi(t) = \psi(0) = 0$

sehingga terbukti bahwa ψ kontinu kanan.

c. Akan ditunjukan bahwa $\psi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$
ambil sebarang $t > 0$,
1. Jika $a_{n+1} \leq t < a_n$, dan $0 < c_n < 1$ maka
$$\psi(t) = c_n t < t$$
2. Jika $t \geq a_1$, dan $0 < c_n < 1$ maka,
$$\psi(t) = c_0 t < t$$

Sehingga terbukti bahwa $\psi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$.

ISSN: 2527-3159 *E-ISSN: 2527-3167*

Berdasarkan dari pembuktian (a),(b),(c) maka benar bahwa $\psi \in \Psi$. ∎

Kemudian diberikan beberapa lemma yang akan digunakan untuk membuktikan sifat titik tetap pada jarak-w di ruang metrik.

Lemma 2.7 (Razani 2009:115) Jika $\psi \in \Psi$ maka $\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(t) = 0$ untuk setiap $t > 0$.

Bukti: Diketahui $\psi \in \Psi$, ambil sebarang barisan pada Ψ yaitu $\psi^{(n)} \in \Psi$. Dengan demikian berlaku bahwa:
$\psi^{(1)} \in \Psi \Rightarrow$ fungsi kontinu kanan, tidak turun untuk setiap $t > 0$ berlaku $\psi^{(1)}(t) < t$
$\psi^{(2)} \in \Psi \Rightarrow$ fungsi kontinu kanan, tidak turun untuk setiap $t > 0$ berlaku $\psi^{(2)}(t) < t$
⋮
$\psi^{(n)} \in \Psi \Rightarrow$ fungsi kontinu kanan, tidak turun untuk setiap $t > 0$ berlaku $\psi^{(n)}(t) < t$
Sehingga diperoleh $\psi^{(n)} \in \Psi$. Selanjutnya ambil sebarang $t > 0$, $\{\psi^{(n)}(t)\}$ adalah barisan bilangan non-negatif yang turun. Andaikan $\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(t) \neq 0$ sehingga terdapat $\alpha \geq 0$, sehingga $\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(t) = \alpha$, karena $\psi \in \Psi$ maka ψ kontinu kanan, oleh karena itu $\psi^{n+1}(t) \to \psi(\alpha)$ untuk $n \to \infty$. Dengan demikian $\psi(\alpha) = \alpha$. Ingat kembali bahwa $\{\psi^{(n)}(t)\}$ adalah barisan bilangan non-negatif yang turun maka:
$$\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(t) = \inf\{\psi^{(n)}(t) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$
Sehingga terbukti bahwa $\alpha = 0$. ∎

Lemma 2.8 (Razani 2009:115) *Jika* $\varphi \in \Phi$, $\{a_n\} \subset [0,\infty)$ *dan* $lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = 0$ *maka* $lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

Bukti :
Andaikan $\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0$ sehingga terdapat $\varepsilon > 0$ dan $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ berlaku
$$a_{n_k} \geq \varepsilon > 0 ,$$
karena $\varphi \in \Phi$ berarti $\varphi(\varepsilon) > 0$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, oleh karena itu diperoleh
$$a_{n_k} \geq \varphi(\varepsilon) > 0$$
Sehingga berlaku juga
$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \geq \varphi(\varepsilon) > 0$
Selanjutnya diperoleh $\lim_n \varphi(a_n) > 0$, sehingga diperoleh $\lim_n \varphi(a_n) \neq 0$. Dan ini kontrakdiksi dengan yang diketahui bahwa $\lim_n \varphi(a_n) = 0$, sehingga terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.
∎

Lemma 2.9 (Razani 2009:115) Diberikan ruang metrik (X, d) dan p adalah jarak-w pada X, apabila $\{x_n\}$ adalah barisan di X sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = 0$ maka $x = y$, selanjutnya jika $p(z, x) = p(z, y) = 0$ maka $x = y$

Bukti : Ambil sebarang $\varepsilon > 0$,
karena $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0$ sehingga terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $p(x_n, x) < \delta$ untuk setiap $n \geq n_1$,

karena $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = 0$ sehingga terdapat $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $p(x_n, y) < \delta$ untuk setiap $n \geq n_2$.

Dipilih $n_0 = \min\{n_1, n_2\}$. Sehingga $p(x_n, x) < \delta$ dan $p(x_n, y) < \delta$ untuk setiap $n \geq n_0$, karena p adalah jarak-w maka berdasarkan definisi jarak-w bagian (3) sehingga diperoleh $d(x, y) < \varepsilon$, karena berlaku untuk sebarang ε didapat $d(x, y) = 0$ dan
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Selanjutnya diketahui $p(z, x) = 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} p(z, x) = 0$ dan diketahui $p(z, y) = 0$ maka $\lim_{n\to\infty} p(z, y) = 0$, oleh karena itu berdasarkan lemma yang telah dibuktikan di atas maka berlaku $x = y$.
Jadi terbukti bahwa apabila $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = 0$ maka $x = y$, selanjutnya jika $p(z, x) = p(z, y) = 0$ maka $x = y$. ∎

Lemma 2.10 (Razani 2009:115) Diberikan ruang metrik (X,d) dan p adalah jarak-w pada X . Diketahui $\{x_n\}$ adalah barisan di X dan

$\{\alpha_n\}$ adalah barisan di $[0,\infty)$, dengan $\{\alpha_n\}$ konvergen ke 0 sedemikian sehingga apabila terdapat $p(x_n, x_m) < \alpha_n$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti : Akan ditunjukan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Berikut akan ditunjukan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $p(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Diketahui bahwa $p(x_n, x_m) < \alpha_n$, dan karena $\{\alpha_n\}$ konvergen ke 0 maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\alpha_n < \varepsilon$, selanjutnya karena $p(x_n, x_m) < \alpha_n$ perhatikan bahwa :

$$p(x_n, x_m) < \alpha_n < \varepsilon$$

Oleh karena itu diperoleh :

$$p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dengan demikian terbukti bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. ■

3. Pembahasana

Pada bagian ini akan dibuktikan sifat ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang metrik lengkap dengan memanfaatkan jarak-w. Setelah pengertian jarak-*w* pada Ruang metrik diberikan, selanjutnya akan dibahas sifat titik tetap pada jarak-*w* di ruang metrik lengkap dan diakhiri dengan diberikan contoh.

Teorema 3.1.(Razani, 2009:115) *Diberikan p adalah* jarak-*w pada ruang metrik lengkap* (X, d)*, dengan* $\varphi \in \Phi$ *dan* $\psi \in \Psi$*. Diketahui* $S: X \to X$ *adalah* (φ, ψ, p) *– pemetaan kontraksi pada* X *untuk setiap* $x, y \in X$ *berlaku:*

$$\varphi\Big(p\big(S(x), S(y)\big)\Big) \leq \psi\Big(\varphi\big(p(x, y)\big)\Big) \qquad *)$$

Maka S *mempunyai titik tetap tunggal pada* X*, selanjutnya* $lim_n S^n x$ *adalah titik tetap* S *untuk setiap* $x \in X$.

Bukti :
Teorema ini akan menunjukan bahwa S mempunyai titik tetap, selanjutnya akan ditunjukan ketunggalan titik tetap di S. Untuk menunjukan bahwa S mempunyai titik tetap maka terlebih dahulu akan ditunjukan bahwa

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

Ambil sebarang $x \in X$ *(fix)*, dibentuk $x_{n+1} = S(x_n)$ dengan $x_0 = x$. Diambil sebarang barisan pada Ψ yaitu $\{\psi^{(n)}\} = \Big\{\psi^n\Big(\varphi\big(p(x_0, x_1)\big)\Big)\Big\}$, oleh karena itu berdasarkan Lemma 2.7 berlaku:

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi^n\Big(\varphi\big(p(x_0, x_1)\big)\Big) = 0$$

dengan kata lain $\psi^n\Big(\varphi\big(p(x_0, x_1)\big)\Big) < \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\begin{aligned} \varphi p\big(S(x_{n-1}), S(x_n)\big) &= \varphi p(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \psi \varphi p(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \psi^2 \varphi p(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\leq \psi^3 \varphi p(x_{n-3}, x_{n-2}) \leq \cdots \\ &\leq \psi^n \varphi p(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh $\lim_{n\to\infty} \varphi p(x_n, x_{n+1}) = 0$ selanjutnya berdasarkan Lemma 2.8 diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$$

Menggunakan cara yang sama diperoleh,

$$\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, x_n) = 0$$

Kemudian akan ditunjukan bahwa

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

Andaikan $\lim_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) \neq 0$ artinya terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ ada $m, n > k$ sehingga

$$p(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

oleh karena itu dipilih $\varepsilon > 0$,
diambil $\{m_k\}_{k=1}^n$, dan $\{n_k\}_{k=1}^n$ dengan $m_k > n_k$ sedemikian sehingga

$$p(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \varphi p(x_n, x_{n+1}) = 0$ artinya terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ untuk setiap $n_k > k_0$ maka:

$$p\big(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\big) < \varepsilon$$

JURNAL MATEMATIKA "MANTIK"
Vol. 01 No. 02. Mei 2016.
ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

untuk $n_k > k_0$ dengan demikian maka $m_k \neq n_{k+1}$. Asumsikan bahwa m_k adalah minimal index yang mengakibatkan

$$p(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon$$

Misalkan $h \in \{n_{k+1}, \dots, m_k - 1\}$ sehingga $p\left(x_{n_k}, x_h\right) < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq p\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\\ &\leq p\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right) + p(x_{m_k-1}, x_{m_k})\\ &< \varepsilon + p\left(x_{m_k-1}, x_{m_k}\right)\end{aligned}$$

jadi untuk $k \to \infty$ maka $\lim_{k\to\infty} p\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) = 0$. Hal tersebut kontradisi dengan (3.8) sehingga benar bahwa $p\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) < \varepsilon$.

Kemudian dipilih kembali m_{k+1} dan n_{k+1} sehingga untuk $m_{k+1} > n_{k+1}$ maka

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \sup p\left(x_{n_{k+1}}, x_{m_{k+1}}\right) \neq 0$$

maka untuk $r \to \infty$ terdapat $\{k_r\}_{r=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga :

$$p(x_{n_{k_r}+1}, x_{m_{k_r}+1}) \to \eta \geq \varepsilon,$$

Karena $\psi \in \Psi$ dan $\varphi \in \Phi$, sehingga

$$\begin{aligned}&p\left(x_{n_{k_r}+1}, x_{m_{k_r}+1}\right)\\ &\leq \varphi\left(p\left(x_{n_{k_r}+1}, x_{m_{k_r}+1}\right)\right)\\ &\qquad\leq \psi\left(\varphi\left(p\left(x_{n_{k_r}}, x_{m_{k_r}}\right)\right)\right)\\ &\leq \psi^2\left(\varphi\left(p\left(x_{n_{k_r}-1}, x_{m_{k_r}-1}\right)\right)\right)\\ &\leq \cdots\\ &\leq \psi^n\left(\varphi\left(p\left(x_{n_{k_r}-n}, x_{m_{k_r}-n}\right)\right)\right) < \varepsilon\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas maka diperoleh

$$p\left(x_{n_{k_r}+1}, x_{m_{k_r}+1}\right) < \varepsilon$$

sehingga kita dapatkan :

$$\sup\ p\left(x_{n_{k}+1}, x_{m_{k}+1}\right) < \varepsilon$$

terjadi kontradiksi. Dengan demikian benar bahwa

$$\lim_{m,n\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

Berdasarkan pembuktian diatas dan dari Lemma 2.9 maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena X adalah ruang metrik lengkap, maka terdapat $u \in X$ sedemikian sehingga $x_n \to u$.

Selanjutnya akan ditunjukan u adalah titik tetap pada S, karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dengan $n > N_\varepsilon$ maka $p\left(x_{N_\varepsilon}, u\right) < \varepsilon$, diketahui juga bahwa $x_n \to u$ untuk $n \to \infty$ dan $p(x,\cdot)$ adalah LSC oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}p\left(x_{N_\varepsilon}, u\right) &\leq \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \inf p\left(x_{N_\varepsilon}, x_n\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} p\left(x_{N_\varepsilon}, x_n\right) = 0\end{aligned}$$

$$p\left(x_{N_\varepsilon}, u\right) \leq p\left(x_{N_\varepsilon}, x_n\right) < \varepsilon$$

$$p\left(x_{N_\varepsilon}, u\right) < \varepsilon$$

dipilih $\varepsilon = \frac{1}{k}$ dan $N_\varepsilon = n_k$,

$$\lim_{k\to\infty} p\left(x_{n_k}, u\right) = 0$$

maka

$$\varphi p(x_{n_k+1}, S(u)) \leq \psi\varphi p(x_n, u)$$

$$\varphi p(x_{n_k+1}, S(u)) \leq \psi\varphi p(x_n, u) \to 0$$

Untuk $k \to \infty$ diperoleh $\lim_{k\to\infty} \varphi p\left(x_{n_k+1}, S(u)\right) = 0$, tetapi perhatikan bahwa

$$p\left(x_{n_k}, S(u)\right) \leq p\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) + p(x_{n_k+1}, S(u))$$

Karena $\lim_{k\to\infty} \varphi p\left(x_{n_k+1}, S(u)\right) = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}p\left(x_{n_k}, S(u)\right) &\leq p\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) + p\left(x_{n_k+1}, S(u)\right)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Oleh karenanya

$$\lim_{k\to\infty} p\left(x_{n_k}, S(u)\right) = 0 \qquad (3.13)$$

Berdasarkan lemma 2.8 maka $S(u) = u$. Sehingga terbukti bahwa u adalah titik tetap pada S.

Setelah mengetahui bahwa u adalah titik tetap pada S.

Selanjutnya akan ditunjukan ketunggalan titik tetap pada S.

Misalkan u_1 dan u_2 merupakan dua titik tetap pada S, sehingga perhatikan bahwa

ISSN: 2527-3159 E-ISSN: 2527-3167

$$\varphi(p(u_1,u_2)) = \varphi(p(S(u_1),S(u_2)))$$
$$\leq \psi(\varphi(p(u_1,u_2)))$$

karena $\varphi \in \phi$ mengakibatkan $\varphi p(u_1,u_2) = 0$ sehingga diperoleh

$$p(u_1,u_2) = 0$$

Kemudian perhatikan bahwa :

$$\varphi p(u_2,u_1) = \varphi p(S(u_2),S(u_1))$$
$$\leq \psi\varphi p(u_2,u_1)$$

karena $\varphi \in \phi$ mengakibatkan $\varphi p(u_2,u_1) = 0$ sehingga di dapat,

$$p(u_2,u_1) = 0$$

Hal ini mengakibatkan $u_1 = u_2$. Sehingga terbukti bahwa titik tetap di S adalah tunggal. ■

Setelah mengetahui dan membuktikan sifat titik tetap pada jarak-*w* di ruang metrik lengkap, selanjutnya akan diberikan contoh untuk mempermudah memahaminya.

Contoh 3.2 *Diberikan ruang metrik* (X,d) *dan p yang telah didefinisikan pada Contoh 2.4 dan* $S: X \to X$ *dengan pemetaan* $S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, $S(0) = 0$. *Misalkan* $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ *adalah fungsi yang kontinu dan turun tegas. Diberikan* ψ *seperti pada Contoh 2.6 dengan* $a_n = \varphi(\frac{1}{n})$, *selanjutnya diasumsikan ketaksaman berikut ini*

$$\varphi\left(\frac{1}{n-1}\right)\varphi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$< \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\varphi\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

dengan

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)} < c_{n-1} < \frac{\varphi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}$$

Akan ditunjukan ketunggalan titik tetap pada S.

Sebelum membuktikan ketunggalan titik tetap pada S akan ditunjukkan bahwa S adalah pemetaan kontraksi. S disebut pemetaan kontraksi apabila memenuhi persamaan

$\varphi\left(p\left(S(x),S(y)\right)\right) \leq \psi\left(\varphi\left(p(x,y)\right)\right)$ untuk setiap $x,y \in X$.

Berikut adalah pembuktiannya.

Menggunakan definisi ψ pada Contoh 2.6 diperoleh

$$\psi\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) = c_{n-1}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

untuk $a_n \leq \varphi\left(\frac{1}{n}\right) < a_{n-1}$

Oleh karena itu perhatikan bahwa:

$$\varphi p\left(S\left(\frac{1}{m}\right),S\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \varphi\left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$< c_{n-1}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

sehingga diperoleh

$$\varphi p\left(S\left(\frac{1}{m}\right),S\left(\frac{1}{n}\right)\right) < c_{n-1}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \psi\varphi p\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

maka

$$\varphi p\left(S\left(\frac{1}{m}\right),S\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\varphi p\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

Dengan kata lain terbukti bahwa Sadalah pemetaan kontraksi. Selanjutnya berdasarkan Teorema di atas maka S adalah pemetaan kontraksi sehingga terbukti bahwa S mempunyai titik tetap yang tunggal. ■

4. Penutup

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa setiap pemetaan yang memenuhi kondisi*), serta terdefinisi pada jarak-*w* di ruang metrik lengkap mempunyai titik tetap yang tunggal. Pembuktian sifat ketunggalan tersebut memanfaatkan sifat fungsi kontraksi serta sifat kelengkapan pada ruang metriknya.

Ucapan Terima Kasih:

Terima kasih penulis sampaikan kepada LP2M UIN Sunan Kalijaga yang telah membantu membiayai penelitian ini.

Referensi

[1] A. Branchiari. *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type*, Internasional Journal of Mathematics

and Mathematical Sciences **10** (2002). 531-536.

[2] A. Latif and W. A. Albar. *Fixed points result in complete metric space.* Demonstratio Mathematica, XLI (2008). 145-150.

[3] Agarwal, Ravi P., Donald D Reagen dan D.R. Sahu. 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian Type Mappings with Applications*. USA.Spinger.

[4] Khamsi, Mohammad A., and Krik, William A. 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[5] O. Kada. T. Suzuki and W. Takashashi. *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*. Math. Japonico **44** (1996), 381-591.

[6] P. Vijayaraju, B.E. Rhoades and R. Mohanraj. *A fixed point theorems for pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type,* Internasional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **15** (2005). 2359-2364.

[7] Razani dkk. *A fixed point theorem for w-distance.* Applied sciens, (2009). vol.11 pp.114-117.

[8] Shirali, Staish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces.* London: Springer-Verlag.

[9] T. Suzuki. *meir-Keeiler contractions of integral type are still Meir-Keeiler constractions.* Internasional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Aticle ID 39281 (2007). 1-6.

[10] T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed Point theorems and characterizations of Metric Completness.* Topol. Methods Nonlinear Anal., 8 (1996), 371-382

[11] T. Suzuki. *Several fixed point theorems in complete metric space.* Yokohama Math. J., 44 (1997), 61-72.

[12] Tuwankotta, Johan Matheus. 2012. Analisis Real A: Teori Ukuran dan Integral. Bandung: ITB