

Analisis Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit *Mosaic* pada Tanaman Jarak Pagar

Adiluhung Setya Pambudi¹, Fatmawati^{2,*}, dan Windarto³

^{1,2,3}Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Indonesia

*Corresponding author: fatmawati@fst.unair.ac.id

Abstract. Mosaic disease is an infectious disease that attacks *Jatropha curcas* caused by Begomoviruses. Mosaic disease can be transmitted through the bite of a whitefly as a vector. In this paper, we studied a mathematical model of mosaic disease spreading of *Jatropha curcas* with awareness effect. We also studied the effect of prevention and extermination strategies as optimal control variables. Based on the results of the model analysis, we found two equilibriums namely the mosaic-free equilibrium and the endemic equilibrium. The stability of equilibriums and the existence of endemic equilibrium depend on basic reproduction number (R_0). When $R_0 < 1$, the spread of mosaic disease does not occur in the population, while when $R_0 > 1$, the spread of mosaic disease occurs in the population. Furthermore, we determined existence of the optimal control variable by Pontryagin's Maximum Principle method. Simulation results show that prevention and extermination have a significant effect in eliminating mosaic disease.

Keywords: *mosaic disease, awareness effects, mathematics model, optimal control, stability.*

1 Pendahuluan

Penggunaan bahan bakar minyak yang meningkat setiap tahun dengan produksi yang semakin terbatas membuat neraca impor minyak bumi meningkat dan persediaan minyak bumi di alam terus berkurang [1]. Tanaman jarak pagar (*Jatropha curcas L.*) merupakan salah satu sumber energi non pangan dengan kandungan minyak dalam biji berkisar antara 25%–30% [2]. Sebagai sumber potensial bahan bakar nabati, tanaman jarak pagar memiliki beberapa banyak keunggulan. Salah satunya adalah tanaman jarak pagar merupakan tanaman tahunan yang tahan kekeringan sehingga mampu tumbuh dan berkembang dengan baik di lahan marginal. Selain itu budidaya tanaman jarak pagar oleh petani kecil mudah dilakukan karena tanaman jarak pagar dapat ditanam dilahan yang kering dan tidak begitu banyak membutuhkan air dan pupuk [3].

Dengan kelebihan yang dimiliki tersebut, tanaman jarak pagar sangat berpotensi sebagai alternatif pengganti sumber bahan bakar. Namun ada beberapa faktor yang menghambat yaitu adalah hama dan penyakit. Salah satu faktor yang sangat mengancam tanaman jarak pagar adalah penyakit mosaic yang diakibatkan oleh *begomovirus* (*Genus Begomovirus*) yang disebarkan oleh serangga lalat putih [4]. Gejala tanaman terserang lalat putih secara

umum adalah daun seperti menggulung atau keriting. Pada bagian daun yang luka berubah warna, dan daun akhirnya layu. Serangan pada tanaman jarak pagar mengakibatkan tanaman tumbuh tidak normal dan pada bawah daun ditumbuhi sejenis zat putih yang berlilin dan lengket. Sedangkan pada tulang dan urat daun terlihat seperti bertepung atau kapas putih [5].

Hama lalat putih dapat dikendalikan dengan memeriksa bibit tanaman yang akan ditanam, dan mengurangi kepadatan tanaman, serta menghindari pemupukan nitrogen berlebih. Selain itu juga dapat memanfaatkan musuh alami seperti kumbang *Coccinella*, kepik, *Syrphid* hijau, dan parasitoid dari jenis tawon kecil yang dapat menekan populasi lalat putih. Pengendalian lain yaitu penggunaan pestisida berbahan minyak nabati. Pemberian pestisida dilakukan saat kondisi nimfa muda, apabila dilakukan pada saat lalat putih sudah dewasa maka pemberian pestisida kurang efektif. Selain itu juga dapat menggunakan *sticky yellow* yaitu kertas perekat yang dipasang pada tanaman untuk mencegah lalat putih hinggap pada tanaman dan lalat putih melekat pada *sticky yellow*. Jika pengendalian di atas belum dapat mengatasi serangan kutu putih dapat digunakan pestisida kimia secara bijak yaitu tepat dosis dan waktu [5].

Penelitian mengenai penyakit mosaic pada jarak pagar sudah dilakukan di beberapa bidang keilmuan, salah satunya adalah pada bidang matematika, yaitu dengan pendekatan model matematika. Penelitian yang sudah pernah dilakukan sebelumnya, antara lain oleh Venturino dkk (2016) [6] yang mengkonstruksi model penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar dan memodifikasi dengan memberikan kontrol pemberian pestisida. Selain itu penelitian yang dilakukan oleh Basir dkk (2016) [7] yang mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar. Model ini dimodifikasi dengan memberikan kompartemen populasi manusia aware. Selanjutnya Basir dkk (2017) [8] mengembangkan model penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar dengan pemberian kontrol *roguing* pada tanaman yang terinfeksi. Berikutnya, Basir dkk (2018) [9] juga mengembangkan model penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar dari model [8] dengan menambahkan laju pemberian pestisida pada tanaman jarak pagar yang bergantung pada kompartemen populasi manusia *aware* terhadap penyakit mosaic.

Pada paper ini, penulis mengembangkan model matematika penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar dari model Basir dkk (2018) [9] dengan mengaplikasikan control optimal berupa upaya pemberian *sticky yellow* dan predator alami.

2 Formulasi Model Matematika

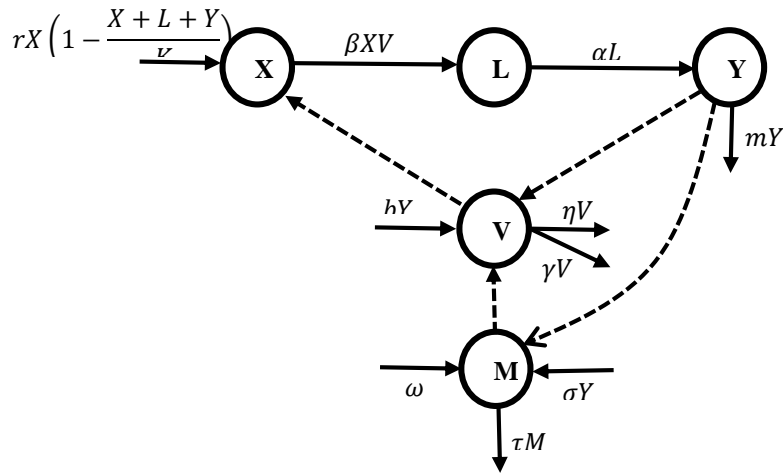
Pada bagian ini, diformulasikan model matematika penyebaran penyakit mosaic pada jarak pagar yang terdiri dari lima kompartemen (populasi) yang dinotasikan dengan X, L, Y, V dan M . Secara berurutan, lima kompartemen tersebut menyatakan densitas populasi tanaman jarak pagar yang rentan (X), densitas populasi tanaman jarak pagar yang terinfeksi namun belum bisa menyebarkan penyakit (L), densitas populasi tanaman jarak

pagar yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit (Y), densitas populasi serangga lalat putih yang terinfeksi (V) dan jumlah populasi manusia aware terhadap penyakit mosaik (M).

Faktor yang mempengaruhi penyebaran penyakit mosaik tidak sedikit, sehingga perlu beberapa asumsi untuk menyederhanakan permasalahan yang akan dimodelkan. Asumsi pertama adalah tanaman jarak pagar yang rentan dapat menjadi terinfeksi penyakit mosaik karena adanya gigitan oleh serangga lalat putih yang terinfeksi dengan laju β . Populasi tanaman rentan bertambah karena pertumbuhan tanaman dengan laju logistik dengan laju pertumbuhan sebesar r dan kapasitas maksimum K . Populasi serangga rentan tidak diperhatikan. Populasi serangga terinfeksi bertambah karena memakan tanaman jarak pagar yang terinfeksi dengan laju b . Saat serangga terinfeksi maka serangga tidak akan bisa sembuh.

Selanjutnya, saat tanaman terinfeksi penyakit mosaik maka tanaman tidak dapat sembuh dan akan mati dengan laju m . Populasi manusia yang aware akan bertambah karena banyaknya tanaman yang terinfeksi penyakit *mosaic* dengan laju σ dan bertambah karena pengaruh media dengan laju ω . Efek dari populasi manusia *aware* akan mengurangi populasi serangga terinfeksi dengan menggunakan pestisida dengan laju ϵ , sehingga serangga terinfeksi akan mengalami kematian akibat pestisida dengan laju γ . Serangga terinfeksi mengalami kematian alami dengan laju η .

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah dipaparkan, model dapat digambarkan dalam diagram transmisi berikut ini:



Gambar 1. Diagram transmisi model penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar

Berdasarkan diagram transmisi pada Gambar 1, maka dapat dibentuk sebuah model matematika berupa sistem persamaan diferensial biasa tak linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= rX \left(1 - \frac{X+L+Y}{K} \right) - \beta XV \\
 \frac{dL}{dt} &= \beta XV - \alpha L \\
 \frac{dY}{dt} &= \alpha L - mY \\
 \frac{dV}{dt} &= bY - \eta V - \gamma V \\
 \frac{dM}{dt} &= \omega + \sigma Y - \tau M
 \end{aligned} \tag{1}$$

dengan,

$$\gamma = P(M) = \epsilon \frac{M}{1+M}.$$

Agar mempunyai makna secara biologis, diasumsikan semua variable bernilai non-negatif dan semua parameter bernilai positif.

3 Analisis Model

3.1 Titik Setimbang

Keadaan setimbang adalah suatu keadaan tertentu saat perubahan populasinya konstan atau bernilai nol. Sehingga, model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar berada dalam keadaan setimbang jika memenuhi $\frac{dX}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{dY}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$. Pada penelitian ini, terdapat dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang penyebaran penyakit *mosaic*.

Titik setimbang bebas penyakit *mosaic* terjadi ketika tidak ada manusia yang menyebarkan penyakit *mosaic*, keadaan ini didapatkan saat $I = 0$. Misalkan titik setimbang bebas penyebaran penyakit dinyatakan dengan $E_0 = (X_0, L_0, Y_0, V_0, M_0)$. Dari hasil perhitungan diperoleh titik setimbang bebas penyakit *mosaic* adalah $E_0 = \left(K, 0, 0, 0, \frac{\omega}{\tau} \right)$.

Sebelum membahas titik setimbang endemik, berikutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang digunakan untuk mengukur potensi penyebaran penyakit dalam sebuah populasi. Metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai R_0 adalah dengan Metode *Next-Generation Matrix* (NGM). Subpopulasi yang diperhatikan adalah populasi tanaman jarak pagar dalam masa laten (L), tanaman jarak pagar terinfeksi (Y),

dan serangga lalat putih yang terinfeksi (V). Dengan metode NGM didapatkan bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta b K}{m(\eta + \gamma)}$.

Selanjutnya adalah menentukan titik setimbang penyebaran penyakit *mosaic*, yaitu suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit atau saat $Y \neq 0$. Misalkan titik setimbang penyebaran *mosaic* dinyatakan dengan $E^* = (X^*, L^*, Y^*, V^*, M^*)$. Dengan demikian, diperoleh titik setimbang penyebaran penyakit *mosaic* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X^* &= \frac{m(\eta + \gamma)}{\beta b} \\ L^* &= \frac{m(\tau M^* - \omega)}{\alpha \sigma} \\ Y^* &= \frac{\tau M^* - \omega}{\sigma} \\ V^* &= \frac{b(\tau M^* - \omega)}{\sigma(\eta + \gamma)} \end{aligned}$$

dengan M^* adalah akar-akar positif dari persamaan

$$M^3 + a_1 M^2 + a_2 M + a_3 = 0,$$

dengan koefisien a_1, a_2 dan a_3 cukup panjang jika diuraikan di sini. Dari hasil perhitungan, persamaan pangkat tiga tersebut akan mempunyai satu akar yang positif jika memenuhi syarat $M^* > \frac{\omega}{\tau}$ dan $R_0 > 1$.

3.2 Analisis Kestabilan

Pada bagian ini akan dikaji kestabilan lokal titik setimbang bebas penyakit dan endemic *mosaic*. Matriks Jacobian dari model (1) ketika dievaluasi di titik setimbang bebas penyebaran penyakit E_0 adalah sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -r & -r & -r & -\beta K & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \beta K & 0 \\ 0 & \alpha & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\eta - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & -\tau \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_0} merupakan akar-akar persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(\lambda + r)(\lambda + \tau)[\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3] = 0 \quad (2)$$

Dari sini, nilai eigen dari matriks J_{E_0} adalah $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = -\tau$ dan sisanya merupakan akar-akar persamaan dari

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0,$$

dengan

$$b_1 = \eta + \gamma + \alpha + m$$

$$b_2 = \alpha(\eta + \gamma) + m(\eta + \gamma) + \alpha m$$

$$b_3 = \alpha m(\eta + \gamma) \left[1 - \frac{\beta K b}{m(\eta + \gamma)} \right] = \alpha m(\eta + \gamma)[1 - R_0].$$

Dengan menggunakan kriteria kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$, memiliki akar-akar yang negative atau mempunyai bagian real negatif jika nilai dari $b_1, b_2, b_3 > 0$ dan $b_1 b_2 - b_3 > 0$. Dari hasil perhitungan diperoleh fakta bahwa semua nilai eigen dari matriks J_{E_0} akan bernilai negative atau mempunyai bagian real negative jika memenuhi $R_0 < 1$.

Sedangkan untuk analisis kestabilan titik setimbang endemik penyakit mosaic, akar-akar dari persamaan karakteristiknya sulit untuk ditentukan secara analitik. Dari sini, akan dilakukan analisis kestabilannya melalui simulasi numerik dengan menggunakan bidang fase. Berikut diberikan nilai parameter dan tiga nilai awal untuk masing-masing kompartemen.

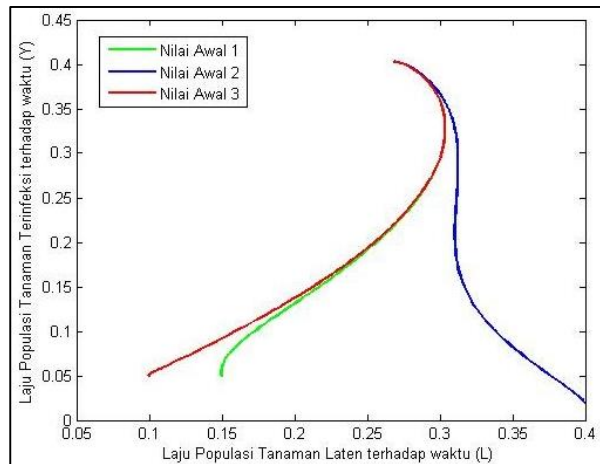
Tabel 1. Nilai parameter

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
K	1	$kg/hari$	[9]
r	0.08	$1/hari$	Asumsi
α	0.006	$1/hari$	Asumsi
β	0.007	$kg/serangga \times hari$	[9]
m	0.004	$1/hari$	Asumsi
b	0.47	$1/hari$	[9]
η	0.05	$1/hari$	[9]
ω	0.01	$orang/hari$	Asumsi
σ	0.04	$orang/kg \times hari$	Asumsi
τ	0.05	$1/hari$	[9]
ϵ	0.45	$1/hari$	Asumsi

Tabel 2. Nilai awal populasi

Nilai awal ke-	$X(0)$	$L(0)$	$Y(0)$	$V(0)$	$M(0)$	Warna
1	0.6	0.15	0.05	0.2	0.2	Hijau
2	0.4	0.4	0.02	0.4	0.35	Biru
3	0.8	0.1	0.05	0.1	0.1	Merah

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal yang telah diberikan pada Tabel 1 dan Tabel 2, maka diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik bidang fase pada titik setimbang endemic mosaic.

Grafik bidang fase $L(t)$ terhadap $Y(t)$ di atas menunjukkan bahwa pemberian tiga nilai awal yang berbeda akan menghasilkan grafik yang cenderung konvergen ke satu titik. Titik tersebut yaitu $(0.2682; 0.4024)$ yang tidak lain adalah bagian dari titik setimbang yang merupakan titik setimbang $E_1 = (0.2484, 0.2682, 0.4024, 0.9256, 0.5219)$. Selain itu, berdasarkan nilai parameter yang diberikan diperoleh nilai $R_0 = 6.58 > 1$.

4 Analisis Sensitivitas

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis sensitivitas digunakan untuk mengetahui parameter yang paling berpengaruh pada suatu model dengan pendekatan [10]. Dalam hal ini akan ditentukan indeks sensitivitas pada setiap parameter yang muncul pada *basic reproduction number* (R_0) dari model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar.

Nilai R_0 yang akan digunakan dalam analisis sensitivitas model matematika penyebaran penyakit *mosaic* adalah

$$R_0 = \frac{\beta bK}{m(\eta+\gamma)} = \frac{\beta bK}{m\left(\eta + \frac{\epsilon\omega}{\tau+\omega}\right)}.$$

Indeks setiap parameter yang terlibat pada *basic reproduction number* (R_0) dikalkulasi dengan rumus:

$$ind = \frac{\partial R_0}{\partial par_i} \frac{par_i}{R_0}. \quad (3)$$

dengan ind adalah indeks sensitivitas, par_i merupakan parameter ke- i pada $R_0 > 1$, untuk $i = 1,2,3, \dots, 8$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 1 ke persamaan (3), maka diperoleh nilai indeks sensitivitas ditulis dalam Tabel 3 berikut ini.

Tabel 3. Indeks sensitivitas model penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar

Parameter	Nilai	Indeks Sensitivitas
K	1	1
β	0,007	1
b	0,47	1
m	0,004	-1
η	0,05	-0,4
ϵ	0,45	-0,6
ω	0,01	-0,5
τ	0,05	0,5

Interpretasi indeks sensitivitas parameters dari Tabel 3, dapat diuraikan sebagai berikut. Jika indeks sensitivitas parameter bernilai positif maknanya adalah jika nilai parameter tersebut naik (turun), maka nilai R_0 juga naik (turun). Sebaliknya untuk nilai indeks sensitivitas bernilai negative mempunyai makna bahwa jika nilai parameter tersebut naik (turun), maka nilai R_0 akan turun (naik). Berdasarkan Tabel 3, terlihat bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap penyebaran penyakit *mosaic* adalah parameter K , β , b dan m .

5 Analisis Masalah Kontrol Optimal

Pada bagian ini, model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar ini dikembangkan dengan penambahan variabel kontrol berupa upaya pencegahan (u_1) dan upaya pembasmian (u_2). Upaya pencegahan di sini adalah berupa pemberian *sticky yellow*, sedangkan upaya pembasmian berupa upaya pemberian predator alami lalat putih. Berikut adalah model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar dengan variabel kontrol berupa upaya pencegahan (u_1) dan upaya pembasmian (u_2).

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= rX \left(1 - \frac{X+L+Y}{K} \right) - (1 - u_1)\beta XV \\
 \frac{dL}{dt} &= (1 - u_1)\beta XV - \alpha L \\
 \frac{dY}{dt} &= \alpha L - mY \\
 \frac{dV}{dt} &= bY - \eta V - \gamma V - u_2\mu V \\
 \frac{dM}{dt} &= \omega + \sigma Y - \tau M
 \end{aligned} \tag{4}$$

Variabel dan parameter yang digunakan mengacu pada Bagian 2. Pengaplikasian pemberian variabel kontrol ini bertujuan untuk mengurangi jumlah tanaman terinfeksi, mengurangi jumlah tanaman laten dan mengurangi jumlah serangga lalat putih yang terinfeksi serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk pencegahan tersebut. Untuk mencapai tujuan ini digunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Fungsi ongkos atau indeks performansi yang dapat dibentuk berdasarkan penjelasan di atas adalah sebagai berikut:

$$\text{Min}J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left(L(t) + Y(t) + V(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) \right) dt,$$

dengan koefisien A_1 dan A_2 berturut-turut adalah konstanta pembobot berupa biaya yang harus dikeluarkan untuk pemberian *sticky yellow* dan pemberian predator alami lalat putih. Batas kontrol optimal berada pada $0 \leq u_{1,2}(t) \leq 1, 0 \leq t \leq t_f$ dengan t_f merupakan waktu akhir. Pada paper ini, bentuk biaya kontrol yang dipilih berupa fungsi kuadrat dengan merujuk pada [11, 12].

5.1 Penyelesaian Kontrol Optimal

Berdasarkan prinsip Maksimum Pontryagin [13, 14], langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk fungsi Hamiltonian pada model sebagai berikut:

$$H = L(t) + Y(t) + V(t) + \frac{A_1}{2} u_1^2(t) + \frac{A_2}{2} u_2^2(t) + \theta^T(t)(f(x(t), u(t), t)) \quad (5)$$

dengan $f(x(t), u(t), t)$ adalah ruas kanan dari model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar yang disertai variabel kontrol, sedangkan $\theta(t)$ menyatakan pengali Lagrange atau variabel co-state dengan $\theta^T(t)$ adalah transpos dari $\theta(t)$. Selanjutnya, agar diperoleh kondisi optimal maka fungsi Hamiltonian harus memenuhi kondisi stasioner yaitu

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \text{ untuk } i = 1, 2 \text{ sehingga didapatkan } u_1 = \frac{(\theta_2 - \theta_1)\beta XV}{A_1} \text{ dan } u_2 = \frac{\theta_4 V}{A_2}.$$

Oleh karena $u_1 \in [0,1]$ dan $u_2 \in [0,1]$, maka diperoleh nilai kontrol yang optimal adalah sebagai berikut

$$u_1^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(\theta_2 - \theta_1)\beta XV}{A_1} \right) \right) \quad (6)$$

$$u_2^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\theta_4 V}{A_2} \right) \right) \quad (7)$$

Selanjutnya, karena dalam bentuk pengontrol u_1^* dan u_2^* terdapat variabel *state* yaitu $x = (X, L, Y, V, M)^T$, maka perlu diselesaikan persamaan *state* dan *co-state* untuk memperoleh variabel tersebut. Berikut adalah penyelesaian persamaan *state* yang dapat diperoleh melalui $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \theta}$, yang diberikan pada persamaan (4).

Berikutnya, persamaan *co-state* pada pengontrol u_1^* dan u_2^* dapat diperoleh dari $\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x}$

sehingga, diperoleh

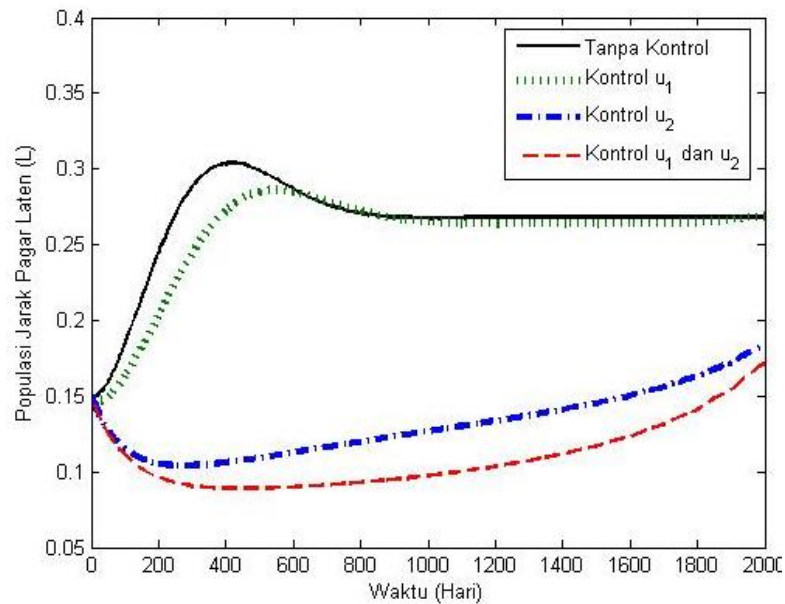
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial X} = -\left[\theta_1 \left[r \left(1 - \frac{2X+L+Y}{K}\right) - (1 - u_1)\beta V\right] + \theta_2[(1 - u_1)\beta V]\right] \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial L} = -\left[1 + \theta_1 \left(-\frac{rX}{K}\right) - \theta_2\alpha + \theta_3\alpha\right] \\ \dot{\theta}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\left[1 + \theta_1 \left(-\frac{rX}{K}\right) - \theta_3m + \theta_4b + \theta_5\sigma\right] \\ \dot{\theta}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -[1 + \theta_1(-(1 - u_1)\beta X) + \theta_2(1 - u_1)\beta X + \theta_4(-\eta - \gamma - u_2)] \\ \dot{\theta}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial M} = -[-\theta_5\tau],\end{aligned}$$

dengan $\dot{\theta}_5(t_f) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Selanjutnya, masalah kontrol optimal tersebut akan diselesaikan secara numerik.

5.2 Simulasi Numerik

Bagian ini membahas mengenai simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar dengan penerapan kontrol. Terdapat tiga skenario yang disimulasikan, yaitu penerapan upaya pencegahan (u_1), penerapan upaya pembasmian (u_2), dan penerapan upaya pencegahan (u_1) dan pembasmian (u_2) secara bersamaan. Simulasi dilakukan dengan metode Runge-Kutta orde 4. Adapun nilai awal yang diberikan adalah $(X, L, Y, V, M) = (0.6, 0.15, 0.05, 0.2, 0.2)$.

Simulasi dilakukan untuk $t = 0$ sampai $t = 2000$ dalam satuan hari. Konstanta pembobot untuk biaya upaya pencegahan dan pembasmian sebesar $A = 5$. Nilai-nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 1.



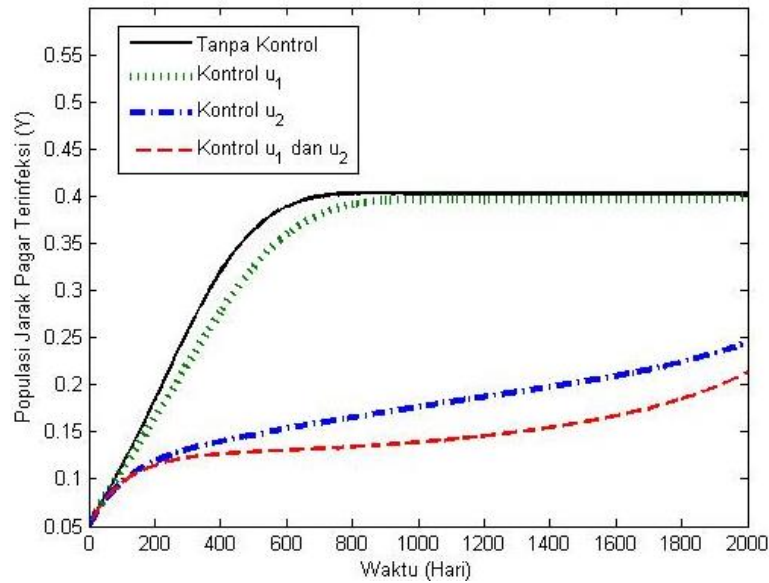
Gambar 3. Simulasi Pemberian Kontrol pada Populasi Jarak Pagar dalam Masa Laten

Dari Gambar 3 dapat diperoleh perbandingan jumlah populasi jarak pagar dalam masa laten sebelum dan sesudah diberi kontrol. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 4 berikut ini.

Tabel 4. Perbandingan Populasi Jarak Pagar dalam Masa Laten pada Akhir Pengamatan

Skenario	Jumlah Populasi
Tanpa adanya kontrol	0.2682
Kontrol u_1	0.2686
Kontrol u_2	0.1838
Kontrol u_1 dan u_2	0.1715

Berdasarkan Tabel 4 secara umum terlihat terjadi perbedaan antara populasi jarak pagar pada masa laten sebelum diberi kontrol, setelah diberi kontrol berupa upaya pencegahan saja, setelah diberi kontrol berupa upaya pembasmian saja, dan diberi kontrol berupa upaya pencegahan dan pembasmian. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pembasmian yang diterapkan secara bersamaan paling efektif mengurangi populasi jarak pagar dalam masa laten hingga akhir pengamatan. Penurunan jumlah populasi setelah diberi kontrol pencegahan dan pembasmian secara bersamaan sebesar 36,0552 %.



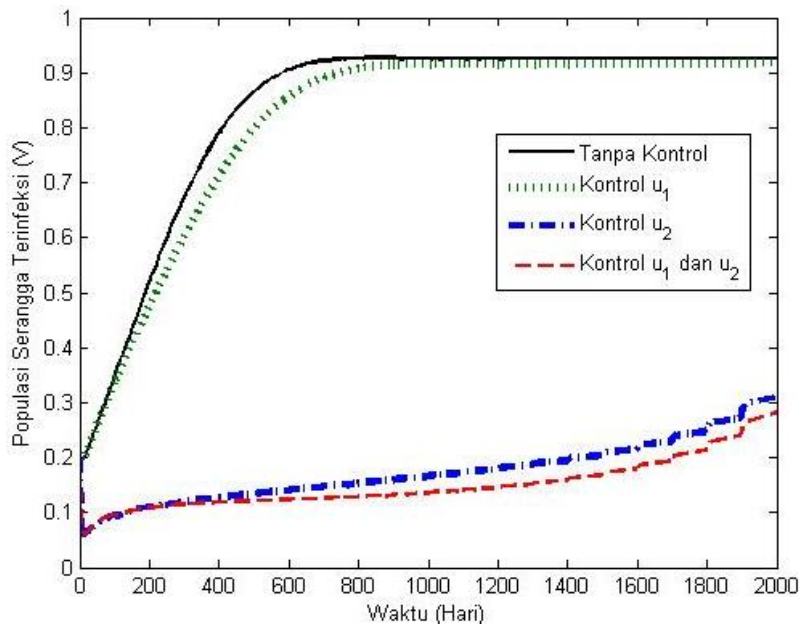
Gambar 4. Simulasi Pemberian Kontrol pada Populasi Jarak Pagar yang Terinfeksi

Dari Gambar 4 dapat diperoleh perbandingan jumlah populasi jarak pagar yang terinfeksi sebelum dan sesudah diberi kontrol. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 5 berikut ini.

Tabel 5. Perbandingan Populasi Jarak Pagar yang Terinfeksi pada Akhir Pengamatan

Skenario	Jumlah Populasi
Tanpa adanya kontrol	0.4024
Kontrol u_1	0.3986
Kontrol u_2	0.2446
Kontrol u_1 dan u_2	0.2135

Berdasarkan Tabel 5, secara umum terlihat bahwa ada perbedaan antara populasi jarak pagar terinfeksi sebelum diberi kontrol dan setelah diberi kontrol optimal. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pembasmian yang diterapkan secara bersamaan paling efektif mengurangi populasi jarak pagar terinfeksi hingga akhir pengamatan. Penurunan jumlah populasi setelah diberi kontrol pencegahan dan pembasmian secara bersamaan sebesar 46,7343 %.



Gambar 5. Simulasi Pemberian Kontrol pada Populasi Serangga Lalat Putih yang Terinfeksi

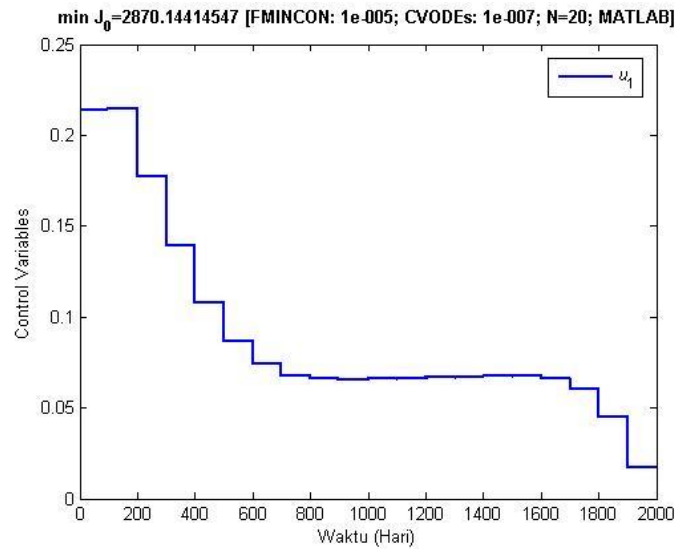
Dari Gambar 5 dapat diperoleh perbandingan jumlah populasi serangga lalat putih yang terinfeksi sebelum dan sesudah diberi kontrol. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 6 berikut ini.

Tabel 6 Perbandingan Populasi Serangga Lalat Putih yang Terinfeksi pada Akhir

Skenario	Jumlah Populasi
Tanpa adanya kontrol	0.9256
Kontrol u_1	0.9197
Kontrol u_2	0.3102
Kontrol u_1 dan u_2	0.2823

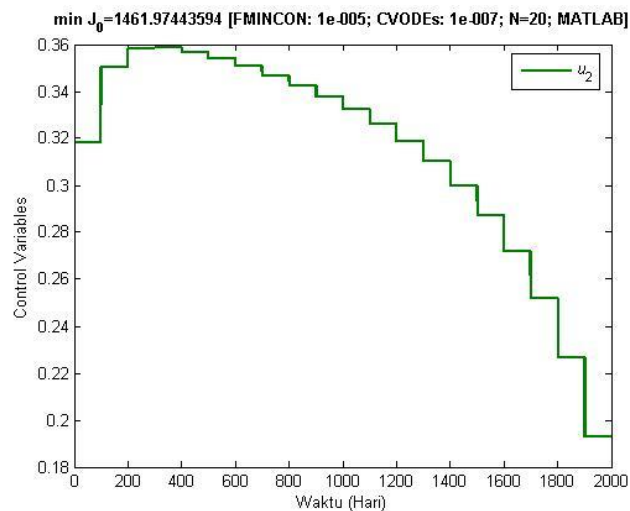
Berdasarkan Tabel 6 terlihat bahwa ada perbedaan antara populasi serangga lalat putih yang terinfeksi sebelum diberi kontrol dan setelah diberi kontrol. Berdasarkan beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pembasmian yang diterapkan secara bersamaan paling efektif mengurangi populasi serangga lalat putih yang terinfeksi hingga akhir pengamatan. Penurunan jumlah populasi setelah diberi kontrol pencegahan dan pembasmian secara bersamaan sebesar 69,5009 %.

Selanjutnya, hasil simulasi untuk profil usaha dari beberapa skenario disajikan pada Gambar 6 – Gambar 8.



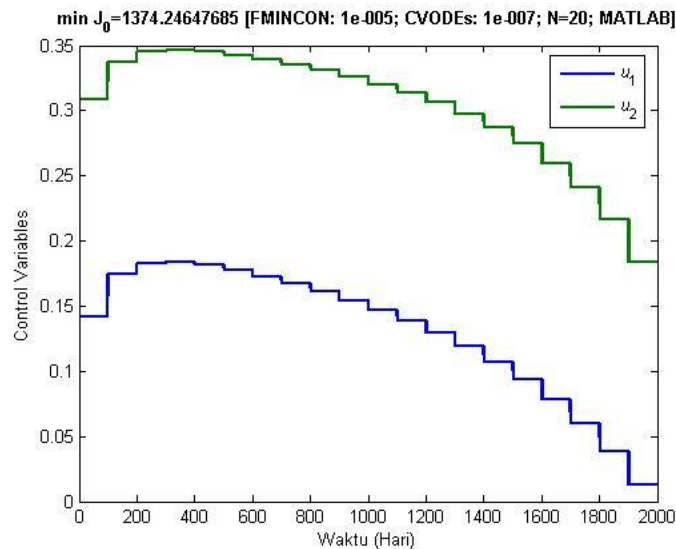
Gambar 6. Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan (u_1)

Grafik 6 menunjukkan bahwa presentase strategi u_1 yaitu usaha pencegahan yang dilakukan untuk mengurangi populasi jarak pagar yang terinfeksi pada awal pengamatan adalah sebesar 21,38 % dan terus menurun hingga hari ke-900 adalah sebesar 6,57 % dimana pada hari ke-1 usaha pencegahan dilakukan secara maksimal. Selanjutnya, pada rentang hari ke-900 hingga hari ke-1600 presentase usaha pencegahan cenderung tetap. Selanjutnya pada hari ke-1601 terus menurun hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-2000 presentase usaha pencegahan turun menjadi 1,696 %. Adapun fungsi ongkos untuk strategi u_1 adalah 2870,14.



Gambar 7. Grafik Profil Kontrol Upaya Pembasmian (u_2)

Grafik 7 menunjukkan bahwa presentase strategi u_2 yaitu usaha pembasmian yang dilakukan untuk mengurangi serangga lalat putih yang terinfeksi pada awal pengamatan adalah sebesar 31,81 % dan terus meningkat hingga hari ke-300 adalah sebesar 35,86 % dimana pada hari ke-300 usaha pembasmian dilakukan secara maksimal. Selanjutnya, pada hari ke-400 presentase usaha pembasmian terus menurun hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-2000 presentase usaha pembasmian turun menjadi 19,3 %. Adapun fungsi ongkos untuk strategi u_2 adalah 1461,97.



Gambar 8. Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan (u_1) dan Pembasmian (u_2)

Grafik 8 menunjukkan bahwa presentase strategi u_1 dan u_2 yaitu usaha pencegahan yang dilakukan untuk mengurangi serangga lalat putih yang terinfeksi dan jarak pagar yang terinfeksi pada awal pengamatan secara berturut-turu adalah sebesar 14,15 % dan 30,82 %. Setelah itu presentase usaha terus meningkat hingga hari ke-300 sebesar 18,4 % untuk usaha pencegahan (u_1) dan hari ke-300 sebesar 34,67 % untuk usaha pembasmian (u_2), dimana pada saat tersebut usaha pencegahan dan usahan pembasmian dilakukan secara maksimal. Selanjutnya, pada hari ke-400 presentase usaha pencegahan terus menurun hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-2000 presentase usaha pencegahan turun menjadi 1,299 % dan pada hari ke-400 presentase usaha pembasmian terus menurun hingga akhir pengamatan yaitu hari ke-2000 presentase usaha pembasmian turun menjadi 18,36 %. Adapun fungsi ongkos yang disajikan pada Tabel 5.4 berikut ini.

Tabel 7 Perbandingan Fungsi Ongkos

Skenario	Fungsi Ongkos
Kontrol u_1	2870,14
Kontrol u_2	1461,97
Kontrol u_1 dan u_2	1374,25

Berdasarkan Tabel 7, fungsi ongkos yang dikeluarkan untuk skenario kontrol u_1 sebesar 2870,14, untuk skenario kontrol u_2 sebesar 1461,97, dan untuk skenario u_1 dan u_2 secara simultan sebesar 1374,25. Berdasarkan hasil tersebut, nilai fungsi ongkos paling minimum adalah pada skenario penerapan kontrol u_1 dan u_2 secara bersamaan.

Penerapan kontrol yang optimal dilihat dari perubahan populasi sebelum dan setelah diberi kontrol seta nilai fungsi ongkos yang dikeluarkan. Berdasarkan simulasi yang diperoleh sebelum dan sesudah diberi kontrol, dengan menerapkan tiga skenario dapat dilihat bahwa populasi jarak pagar laten, populasi jarak pagar terinfeksi, dan populasi serangga terinfeksi dapat direduksi secara optimal dengan upaya pencegahan (u_1) dan upaya pembasmian (u_2) yang diterapkan bersamaan. Dari nilai fungsi ongkos ketiga skenario, penerapan kontrol upaya pencegahan (u_1) dan upaya pembasmian (u_2) yang diterapkan bersamaan merupakan langkah yang optimal agar nilai fungsi ongkos yang dikeluarkan minimum.

6 Kesimpulan

Pada paper ini telah dikaji model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar dan penerapan optimal control berupa upaya pencegahan dan pembasmian. Dari hasil analisis model tanpa variable control, model matematika penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar memiliki dua titik setimbang, yakni titik setimbang bebas penyakit (E^0) dan endemic penyakit mosaik (E_1). Titik setimbang bebas penyakit akan stabil asimtotis jika $R_0 < 1$, sedangkan titik setimbang endemic secara numeric akan stabil asimtotis jika memenuhi $R_0 > 1$, dengan R_0 merupakan bilangan reproduksi dasar. Pada paper ini, juga dilakukan analisis sensitivitas parameter model. Selanjutnya pada model penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar diaplikasikan kontrol optimal berupa upaya pencegahan dan pembasmian. Berdasarkan hasil simulasi numerik terlihat bahwa strategi berupa upaya pencegahan (u_1) dan upaya pembasmian (u_2) yang diterapkan bersamaan merupakan langkah yang efektif untuk mengurangi penyebaran penyakit *mosaic* pada jarak pagar.

Daftar Pustaka

- [1] Syakir, M., 2010, *Prospek dan Kendala Pengembangan Jarak Pagar (Jatropha curcas L.) Sebagai Bahan Bakar Nabati di Indonesia*, Indonesian Center for Estate Crops Research and Deleopment, 9(2):55-65.

- [2] Supriyadi dan Riajaya, P. D., 2015, *Analisis Usaha Tani Jarak Pagar (Jatropha curcas L.) Hasil Peremajaan*, Buletin Tanaman Tembakau, Serat dan Minyak Industri, 7(2):90-101.
- [3] Gomes, J., 2016, *Petunjuk Praktis Budidaya Jarak Pagar (Jatropha curcas L.) dan Proses Pengolahan Minyak*, Universitas Brawijaya Press, Malang, Indonesia.
- [4] Venturino, E., Roy, P. K., Basir, F. A., dan Datta, A., 2016, *A model for the control of the mosaic virus disease in Jatropha curcas plantation*, Energy, Ecology, and Environment, 1(6):360-369.
- [5] Puslitbang Perkebunan, 2016, *Hama Kutu Putih Planococcus Minor (Maskell) pada Jarak Pagar*, <http://perkebunan.litbang.pertanian.go.id/?p=16459>, Diakses pada tanggal 10 Februari 2019.
- [6] Venturino, E., Roy, P. K., Basir, F. A., dan Datta, A., 2016, *A model for the control of the mosaic virus disease in Jatropha curcas plantation*, Energy, Ecology, and Environment, 1(6):360-369
- [7] Basir, F. A., Venturino, E., dan Roy, P. K., 2016, *Effect of awareness program for controlling mosaic disease in Jatropha curcas plantations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 6(2):104-105.
- [8] Basir, F. A., dan Roy, P. K., 2017, *Dynamics of mosaic disease with roguing and delay in Jatropha curcas plantations*, Applied Mathematics and Computation, 58:1-31.
- [9] Basir, F. A., Blyuss, K. B., dan Ray, S., 2018, *Modelling the effect of awareness-based interventions to control the mosaic disease of Jatropha curcas*, Ecological Complexity, 36:92-100.
- [10] Chitnis, N., Smith, T. dan Steketee, R., 2009, *A Mathematical Model for the Dynamics of Malaria in Mosquitoes Feeding on a Heterogeneous Host Population*, Journal of Biological Dynamics, 2(3), 259-285.
- [11] Ahmadin dan Fatmawati, 2014, *Mathematical modelling of drug resistance in tuberculosis trasmission and optimal control*, Applied Mathematical Science, 8(92), 4547–4559.
- [12] Fatmawati dan Tasman H, 2013, *A malaria model with controls on mass treatment and insecticide*, Applied Mathematical Sciences, 7(68), 3379 – 3391.
- [13] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., dan Mishchenko, E.F., 1962, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York.
- [14] Naidu, D S, 2002, *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, New York.