

DIMENSI PARTISI GRAF HASIL OPERASI COMB GRAF LINGKARAN DAN GRAF LINTASAN

Faisal^{1)*}, Novi Mardiana²⁾, Hastri Rosiyanti³⁾

¹⁾ Departemen Matematika, School of Computer Science, Universitas Bina Nusantara, Jl. K. H. Syahdan No.9, Kemanggis, Palmerah Jakarta, 11480

²⁾ Program Studi Teknik Informatika, STMIK IKMI Cirebon, Jln Perjuangan No.10B Majasem Kota Cirebon, 45135

³⁾ Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Jakarta, Jl. KH. Ahmad Dahlan Cirendeu, 15419

*faisal@binus.edu

Abstrak

Dimensi partisi adalah perluasan dari konsep dimensi metrik. Konsep dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1998 (Chartrand,1998). Partisi Π dari himpunan titik $V(G)$ adalah suatu partisi pembeda dari G , yaitu jika setiap dua verteks yang berbeda dari graf G dapat dibedakan oleh vektor dengan koordinatnya adalah jarak terhadap elemen-elemen di Π . Dimensi partisi dari graf G , dinotasikan $pd(G)$ adalah partisi pembeda dari G dengan kardinalitas paling minimum. Pada artikel ini, graf yang dikaji adalah graf yang diperoleh dari hasil operasi comb antara dua graf terhubung yaitu graf Lingkaran C_n dan Lintasan P_k . Misalkan o adalah suatu titik dari P_k . Operasi comb antara C_n dan P_k adalah graf yang diperoleh dengan mengambil 1 graf C_n dan $|V(C_n)|$ buah graf P_k dan menempelkan titik o dari P_k pada titik ke- i dari C_n . Kami menyajikan hasil bahwa dimensi partisi dari graf operasi comb antara C_n dan P_k sama dengan dimensi partisi graf C_n dimana o adalah titik berderajat 1. Disajikan juga konjektur bahwa dimensi partisi dari graf operasi com antara graf G dan P_k sama dengan dimensi partisi graf G dimana o titik berderajat 1 untuk graf G sebarang.

Kata Kunci: Dimensi metrik, dimensi partisi, graf comb, partisi pembeda.

PENDAHULUAN

Teori graf yang berkembang pesat hingga saat ini berawal dari permasalahan "Tujuh Jembatan Konigsberg" yang berhasil dipecahkan Euler melalui artikelnya "Solutio problematicas

geometriam situs pertinentis" pada tahun 1736. Hingga saat ini teori graf telah digunakan dalam studi mengenai jaringan elektronik (Harary, 1959), computer database (Singh, 2014), penemuan obat-obatan (Balaban, 1985), genetika

(Yap,2003), arsitektur (Roth, 1988), dan bahkan studi tentang *computer vision*, *artificial intelegent* dan *deep learning* yang populer saat ini diperkaya dengan *Graph Neural Network* (Scarselli, 2009).

Dalam teori graf dikenal operasi antara dua graf atau lebih, misalnya operasi *corona*, kartesius, gabungan, normal, tambah, dan *comb*. Artikel ini mengkaji dimensi partisi dari graf hasil operasi *comb* atau graf *comb*. Graf *comb* pada awalnya diperkenalkan oleh Hora dan Obata (Hora, 2007). Graf *comb* ini menarik untuk dikaji salah satunya karena secara struktur serupa dengan molekul kimia, sehingga dapat digunakan untuk memodelkan molekul kimia tertentu. Graf *comb* adalah bentuk khusus dari graf *rooted* (Godsil, 1978) dan perumuman dari graf *Lattice* (Accardi, 2004). Graf *comb* berdasarkan definisinya tidak memiliki sifat komutatif, dan tidak regular namun bersifat asosiatif (Accardi, 2004). Sedangkan dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (Chartrand, 2000) sebagai variasi dari dimensi metrik.

Konsep mengenai dimensi partisi diawali oleh kajian mengenai himpunan pembeda pada dimensi metrik yang menghasilkan pernyataan bahwa untuk sembarang graf nontrivial terhubung G berlaku hubungan antara dimensi partisi dari G yang dinotasikan $pd(G)$ dengan dimensi metrik dari G yang dinotasikan $\beta(G)$ yaitu $pd(G) \leq \beta(G) + 1$ (Chartrand, 2000). Hingga saat ini telah diperoleh hasil dimensi partisi untuk kelas graf khusus seperti pada graf Cayley berarah (Fehr, 2006), graf circulant (Grigorijs, 2014), dan graf pohon (Rodríguez, 2014). Selain itu telah dikaji pula dimensi partisi dari graf hasil operasi misalnya graf *corona* (Rodríguez, 2010), graf kartesian (Yero, 2010) (Yero,2014), graf *strong*

(Yero,2014). Sebagai tambahan, telah dikaji dimensi partisi pada graf tak terhubung oleh Haryeni dkk (Haryeni, 2017). Khusus untuk graf *comb* sendiri, kajian mengenai dimensi metrik telah dilakukan Suhadi dkk (Saputro, 2017) sementara dimensi partisi graf *comb* untuk beberapa kasus telah pula diperoleh hasil seperti pada (Alfarisi, 2017a), (Alfarisi, 2017b) dan (Alfarisi, 2017c).

Dalam artikel ini disajikan hasil partisi dimensi dari graf *comb* antara graf Lingkaran C_n untuk $n \geq 3$ dan graf Lintasan P_k untuk $k \geq 2$ dengan titik pelekatan menggunakan titik berderajat satu dari P_k . Hasil yang sama dan lebih lengkap mengenai dimensi partisi hasil operasi *comb* antara graf lingkaran dengan graf lintasan telah ditulis pada (Alfarisi, 2017d), namun dalam artikel ini akan diberikan pembuktian dengan pendekatan yang berbeda dengan menggunakan partisi pembeda yang didapat dari graf lingkaran.

Misalkan G adalah graf terhubung dengan $V(G)$, $E(G)$ berturut adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari G . Untuk setiap himpunan bagian S dari $V(G)$ dan setiap titik $v \in V(G)$ definisikan jarak antara v dan S oleh $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Untuk suatu k -partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan titik v dari G , representasi v terhadap Π adalah k -vektor $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_1), \dots, d(v, S_k))$. Partisi Π disebut partisi pembeda jika k -vektor $r(v|\Pi)$ semuanya berbeda untuk setiap titik v di G . Minimum dari $|\Pi|$ untuk setiap partisi pembeda Π dari G disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan oleh $pd(G)$ (Chartrand, 2000).

Diberikan dua graf terhubung G dan H . Operasi *comb* graf G dan H , dinotasikan oleh $G \triangleright_o H$ adalah suatu graf yang didapat

dari satu buah graf G dan graf $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ yang isomorfik dengan H dan menempelkan satu titik tetap/tempel o dari H di H_i dengan titik ke- i dari G . Secara formal, graf $G \triangleright_o H$ dengan titik tetap o di H adalah graf dengan himpunan titik $V(G \triangleright_o H) = V(G) \times V(H)$ dimana dua titik (a, v) dan (b, w) bertetangga jika :

- 1) $a = b$ dan $vw \in E(H)$, dan
- 2) $ab \in E(G)$ dan $v = w = o$.

Dalam artikel ini akan disajikan hasil pembuktian dimensi partisi dari graf $C_n \triangleright_o P_k$ dengan C_n adalah graf lingkaran berorde n , P_k adalah graf lintasan berorde k dan o adalah titik berderajat 1 di P_k . Pembuktian dimensi partisi ini memanfaatkan suatu partisi pembeda dari C_n .

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian kualitatif yang dilakukan dengan cara memeriksa konsep partisi dimensi untuk kelas graf khusus yaitu graf hasil operasi *comb* antara dua graf terhubung.

Tahapan awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengkaji literatur terkait konsep partisi dimensi. Kajian literature ini diperlukan untuk membantu proses observasi sifat kelas graf operasi *comb* dan partisi dimensinya. Selanjutnya, tahapan investigasi penelitian terdiri dari diskusi kajian terhadap pencarian partisi pembeda dari kelas graf lingkaran dan graf hasil operasi *comb* antara graf lingkaran dan graf lintasan sampai pembuatan teorema dan penyusunan bukti teorema. Tahapan akhir adalah penulisan pembuktian teorema yang tersusun secara sistematis dan lengkap.

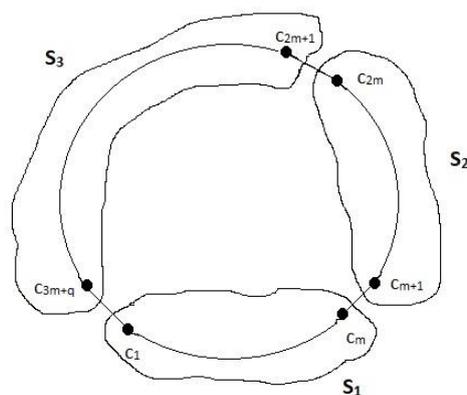
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian awal artikel ini akan diberikan pembuktian mengenai dimensi partisi dari

graf lingkaran C_n dengan n titik. Telah diketahui pada Chartrand dkk bahwa $pd(C_n) = 3$. Penulisan pembuktian dimensi partisi dari C_n dilakukan untuk mendapatkan partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright_o P_k$.

Teorema 1. Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan n titik. Dimensi partisi dari C_n adalah 3.

Bukti. Misalkan himpunan titik dari C_n adalah $V(C_n) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ dan himpunan sisi dari C_n adalah $E(C_n) = \{c_1c_2, c_2c_3, \dots, c_{n-1}c_n, c_nc_1\}$. Berdasarkan algoritma pembagian terdapat bilangan bulat m dan q sehingga $n = 3m + q$ dengan $m \geq 1$ dan $0 \leq q < 3$. Definisikan $S_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, $S_2 = \{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_{2m}\}$ dan $S_3 = \{c_{2m+1}, c_{2m+2}, \dots, c_{3m+q}\}$. Ini berarti $P = \{S_1, S_2, S_3\}$ adalah suatu partisi dari $V(C_n)$. Perhatikan gambar partisi P dari $V(C_n)$ berikut.



Gambar 1. Partisi Pembeda P dari Graf C_n

Sekarang asumsikan bahwa P adalah partisi terurut dari himpunan titik C_n . Akan ditunjukkan bahwa P adalah suatu partisi pembeda dari C_n . Misalkan u, v adalah satu pasang titik yang berbeda dari $V(C_n)$. Kita bagi menjadi dua kasus untuk pasangan u, v . Kasus pertama: Misalkan $u \in S_i$ dan

$v \in S_j$, dengan $i \neq j$. Ini artinya $d(u, S_i) = 0$ dan $d(v, S_i) > 0$. Jelas bahwa $r(u|P) \neq r(v|P)$.

Kasus kedua : Misalkan $u, v \in S_i$ dengan $1 \leq i \leq 3$. Diketahui $d(u, S_i) = 0 = d(v, S_i)$. Untuk $i = 1$, dapat diasumsikan bahwa $u = c_s$ dan $v = c_t$ dengan $1 \leq s < t \leq m$. Diketahui bahwa $d(c_m, c_{m+1}) = 1$. Jelas bahwa

$$d(u, S_2) = d(c_s, c_{m+1}) = d(c_s, c_m) + d(c_m, c_{m+1}) = m - s + 1.$$

Diketahui juga bahwa

$$d(v, S_2) = d(c_t, c_{m+1}) = m - t + 1.$$

Dapat dilihat dengan mudah bahwa

$$d(u, S_3) = d(c_s, c_1) + d(c_1, c_n) = s - 1 + 1 = s.$$

$$d(v, S_3) = d(c_t, c_1) + d(c_1, c_n) = t - 1 + 1 = t.$$

Diperoleh bahwa $r(u|P) = (0, m - s + 1, s)$ dan $r(v|P) = (0, m - t + 1, t)$. Karena $s < t$, dapat disimpulkan bahwa $r(u|P) \neq r(v|P)$ untuk $u, v \in S_1$.

Misalkan $i = 2$, dapat diasumsikan bahwa $u = c_{m+s}$ dan c_{m+t} dengan $1 \leq s < t \leq m$. Ini berarti

$$d(u, S_1) = d(c_{m+s}, c_{m+1}) + 1 = s,$$

$$d(v, S_1) = d(c_{m+t}, c_{m+1}) + 1 = t,$$

$$d(u, S_3) = d(c_{m+s}, c_{2m+1}) = m - s + 1,$$

$$d(v, S_3) = d(c_{m+t}, c_{2m+1}) + 1 = m - t + 1.$$

Diperoleh $r(c_{m+s}|P) = (s, 0, m - s + 1)$ dan $r(c_{m+t}|P) = (t, 0, m - t + 1)$. Dapat disimpulkan bahwa $r(u|P) \neq r(v|P)$ jika $u, v \in S_2$.

Untuk $i = 3$, misalkan $u = c_{2m+s}$ dan $v = c_{2m+t}$ dengan $1 \leq s < t \leq m + q$. Pada bagian ini kita bagi kasus berdasarkan kemungkinan nilai q . Pertama, asumsikan bahwa $q = 0$. Ini berarti $n = 3m$. Akibatnya,

$$d(c_{2m+s}, S_2) = d(c_{2m+s}, c_{2m}) = s,$$

$$d(c_{2m+t}, S_2) = d(c_{2m+t}, c_{2m}) = t,$$

$$d(c_{2m+s}, S_1) = d(c_{2m+s}, c_{3m}) + 1 = m - s + 1,$$

$$d(c_{2m+t}, S_1) = d(c_{2m+t}, c_{3m}) + 1 = m - t + 1.$$

Diperoleh $r(c_{2m+s}|P) = (m - s + 1, s, 0)$ dan $r(c_{2m+t}|P) = (m - t + 1, s, 0)$. Ini artinya dalam kasus $n = 3m$, jika $u, v \in S_3$ maka $r(u|P) \neq r(v|P)$.

Berikutnya, asumsikan bahwa $q = 1$. Hal ini berarti $n = 3m + 1$. Perhatikan lintasan $P_1 = c_{2m+s}c_{2m+s+1} \dots c_n c_1$ dan lintasan $Q_1 = c_m c_{m+1} \dots c_{2m+s}$ dengan $1 \leq s \leq m + 1$. Diketahui bahwa $|E(P_1)| = m - s + 2$ dan $|E(Q_1)| = m + s$. Karena $s \geq 1$, diperoleh

$$|E(P_1)| = m - s + 2 \leq m + s = |(Q_1)|.$$

Akibatnya, $d(c_{2m+s}, S_1) = d(c_{2m+s}, c_1) = m - s + 2$. Perhatikan lintasan $P_2 = c_{2m}c_{2m+1} \dots c_{2m+s}$ dan lintasan $Q_2 = c_{2m+s} \dots c_{3m+1}c_1 \dots c_{m+1}$ dengan $1 \leq s \leq m + 1$. Diketahui bahwa $|E(P_2)| = s$ dan $|E(Q_2)| = 2m - s + 2$. Karena $s \leq m + 1$, diperoleh

$$|E(P_2)| = s \leq 2m - s + 2 = |E(Q_2)|.$$

Akibatnya, $d(c_{2m+s}, S_2) = d(c_{2m+s}, c_{2m}) = s$. Jadi, $r(c_{2m+s}|P) = (m - s + 1, s, 0)$ dan $r(v|P) = (m - t + 1, t, 0)$. Dapat disimpulkan $r(u|P) \neq r(v|P)$ untuk setiap $u, v \in S_3$ dalam kasus $n = 3m + 1$.

Kasus terakhir, asumsikan $q = 2$ yang berakibat $n = 3m + 2$. Kita akan menghitung semua kemungkinan $r(u|P)$ jika $u \in S_3$.

Untuk titik $u = c_{2m+1}$, perhatikan lintasan $P_3 = c_{2m+1} \dots c_{3m+2}c_1$ dan $Q_3 = c_{2m+1}c_{2m} \dots c_m$. Diketahui bahwa

$$|E(P_3)| = m + 1 \text{ dan } |E(Q_3)| = m + 1.$$

Akibatnya, $d(c_{2m+1}, S_1) = d(c_{2m+1}, c_m) = m + 1$. Jadi, $r(c_{2m+1}|P) = (m + 1, 1, 0)$.

Untuk Titik $u = c_{3m+2}$, perhatikan lintasan $P_4 = c_{3m+2}c_1 \dots c_{m+1}$ dan $Q_4 = c_{2m} \dots c_{3m+2}$. Diketahui bahwa

$|E(P_4)| = m + 1$ dan $|E(Q_4)| = m + 2$. Akibatnya, $d(c_{3m+2}, S_2) = d(c_{3m+2}, c_{m+1}) = m + 1$. Jadi, $r(c_{3m+2}|P) = (1, m + 1, 0)$.

Untuk titik $u = c_{2m+s}$ dengan $2 \leq s \leq m + 1$, jelas bahwa $|E(c_{2m+s} \dots c_m)| = m + s$ dan $|E(c_{2m+s} \dots c_{3m+2}c_1)| = m - s + 3$.

Karena $s \geq 2$, diperoleh bahwa $m - s + 3 \leq m + s$. Akibatnya, $d(c_{2m+s}, S_1) = d(c_{2m+s}, c_1) = m - s + 3$. Selain itu kita miliki $|E(c_{2m+s} \dots c_{2m})| = s$ dan $|E(c_{2m+s} \dots c_{3m+2}c_1 \dots c_{m+1})| = 2m - s + 3$. Karena $s \leq m + 1$, kita peroleh $s \leq 2m - s + 3$. Ini berarti $d(c_{2m+s}, S_1) = d(c_{2m+s}, c_1) = m - s + 3$. Dapat disimpulkan bahwa $r(c_{2m+s}|P) = (m - s + 3, s, 0)$.

Jika $u = c_{2m+s}$ dan $v = c_{2m+t}$ dengan $2 \leq s < t \leq m + 1$, maka $r(u|P) \neq r(v|P)$. Karena $m \geq 1$, diperoleh $r(c_{2m+1}|P) \neq r(c_{3m+2}|P)$. Jika $2 \leq s \leq m + 1$ maka $r(c_{2m+1}|P) \neq r(c_{2m+s}|P)$. Untuk $s < m + 1$, kita miliki bahwa $r(c_{3m+2}|P) \neq r(c_{2m+s}|P)$. Jika $s = m + 1$ maka $r(c_{2m+s}|P) = (2, m + 1, 0)$. Hal ini berakibat $r(c_{3m+2}|P) \neq r(c_{2m+s}|P)$. Dapat disimpulkan bahwa untuk $n = 3m + 2$, jika $u, v \in S_3$ maka $r(u|P) \neq r(v|P)$. Jadi P adalah suatu partisi pembeda dari C_n .

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa tidak ada partisi pembeda P dari C_n dengan $|P| = 2$. Dapat diperiksa dengan mudah bahwa kondisi ini terpenuhi untuk $n = 3$. Asumsikan $n \geq 4$ dan terdapat partisi pembeda $P = \{S_1, S_2\}$ dari C_n . Jelas bahwa P bukan partisi pembeda jika $|S_1|$ atau $|S_2|$ sama dengan 1. Ini berarti $|S_i| \geq 2$ untuk setiap i . Misalkan \mathcal{L} adalah lintasan terpanjang pada C_n , sehingga semua titik

dari \mathcal{L} berada di S_1 . Misalkan a, b adalah dua titik ujung dari \mathcal{L} . Ini berarti $a, b \in S_1$. Karena derajat dari masing-masing titik a dan b adalah dua maka keduanya memiliki masing-masing tepat dua tetangga. Berdasarkan kemaksimalan dari \mathcal{L} , tetangga dari a berada di S_1 dan satu tetangga lainnya berada di S_2 . Dengan alasan yang sama b memiliki tepat satu tetangga yang berada di S_2 . Misalkan x dan y berturut-turut tetangga a dan b yang berada di S_2 . Diperoleh $d(a, S_2) = d(a, x) = 1$ dan $d(b, S_2) = d(b, y) = 1$. Akibatnya, $r(a|P) = (0, 1) = r(b|P)$. Kontradiksi bahwa P adalah suatu partisi pembeda. Terbukti bahwa dimensi partisi dari graf C_n adalah 3.

Partisi pembeda dalam Pembuktian Teorema 1 memberikan ide untuk mendapatkan hasil utama artikel ini yaitu mencari dimensi partisi dari graf hasil operasi comb antara graf lingkaran dan graf lintasan dengan menggunakan titik ujung lintasan sebagai titik tempel. Lebih jelasnya, partisi pembeda dari C_n dalam Teorema 1 digunakan sebagai partisi untuk titik-titik C_n pada graf $comb C_n \triangleright_o P_k$.

Teorema 2. Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan n titik dan P_k adalah graf lintasan dengan k titik. Jika o adalah titik berderajat 1 dari lintasan P_k maka $pd(C_n \triangleright_o P_k) = 3$.

Sebelum membahas pembuktian Teorema 1, kita berikan beberapa notasi yang dipakai untuk graf $C_n \triangleright_o P_k$ dan sifat-sifat mengenai representasi titik-titik graf ini terhadap suatu partisi terurut dari himpunan titik $V(C_n \triangleright_o P_k)$.

Misalkan $V(C_n) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ dengan

$$E(C_n) = \{c_1c_2, c_2c_3, \dots, c_{n-1}c_n, c_nc_1\}.$$

Misalkan pula $V(P_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

dengan $E(P_k) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$. Dapat diasumsikan bahwa $V(C_n \triangleright_o P_k) = \{(c_i, v_j) | 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq k\}$ dengan $o = v_1$. Akan ditunjukkan bahwa partisi pembeda P dari C_n pada Teorema 1 dapat digunakan untuk membuat suatu partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright_o P_k$. Definisikan 3 himpunan bagian titik dari $V(C_n \triangleright_o P_k)$ sebagai berikut :

$$S'_1 = \{(c_i, v_j) | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq k\},$$

$$S'_2 = \{(c_i, v_j) | m + 1 \leq i \leq 2m \text{ dan } 1 \leq j \leq k\},$$

$$S'_3 = \{(c_i, v_j) | 2m + 1 \leq i \leq 3m + q \text{ dan } 1 \leq j \leq k\}.$$

Ingat kembali bahwa $n = 3m + q$ dengan $0 \leq q < 3$ dan $m \geq 1$. Untuk setiap $c_i \in V(C_n)$ dengan $1 \leq i \leq n$, definisikan himpunan bagian V_{c_i} dari $V(C_n \triangleright_o P_k)$ oleh

$$V_{c_i} = \{(c_i, v_j) | 1 \leq j \leq k\}.$$

Diperoleh bahwa

$$S'_1 = V_{c_1} \cup V_{c_2} \cup \dots \cup V_{c_m},$$

$$S'_2 = V_{c_{m+1}} \cup V_{c_{m+2}} \cup \dots \cup V_{c_{2m}},$$

$$S'_3 = V_{c_{2m+1}} \cup V_{c_{2m+2}} \cup \dots \cup V_{c_n}.$$

Misalkan $P' = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ adalah partisi terurut dari $V(C_n \triangleright_o P_k)$. Akan dituliskan beberapa sifat dari representasi $r(v|P')$ dengan $v \in V(C_n \triangleright_o P_k)$. Notasikan $o_{c_i} = (c_i, v_1)$ untuk setiap bilangan bulat positif $i \leq n$.

Lema 1. Misalkan P adalah partisi pembeda dari C_n pada Teorema 1 dan P' partisi terurut dari $V(C_n \triangleright_o P_k)$. Untuk setiap $c_i \in V(C_n)$, berlaku $r(o_{c_i}|P') = r(c_i|P)$.

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $c_a, c_b \in V(C_n)$ berlaku $d(o_{c_a}, o_{c_b}) = d(c_a, c_b)$. Akibatnya $d(o_{c_a}, S'_i) = d(c_a, S_i)$ untuk setiap i . Terbukti.

Lema 2. Misalkan $v = (c_i, v_j)$ dengan $1 \leq j \leq k$ dan $1 \leq i \leq n$.

- i) Jika $v \in S'_1$ maka $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') = (0, j - 1, j - 1)$.
- ii) Jika $v \in S'_2$ maka $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') = (j - 1, 0, j - 1)$.
- iii) Jika $v \in S'_3$ maka $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') = (j - 1, j - 1, 0)$.

Bukti. Kita hanya membuktikan bagian i karena bagian lainnya memiliki pembuktian yang serupa. Misalkan $v(c_i, v_j) \in S'_1$, hal ini berarti $c_i \in S_1$. Berdasarkan Lema 1, Diperoleh bahwa $r(o_{c_i}|P') = r(c_i|P) = (0, d(c_i, S_2), d(c_i, S_3))$. Diketahui bahwa $d(v, o_{c_i}) = j - 1$. Jelas bahwa $d(v, S'_1) = 0$. Selain itu,

$$d(v, S'_2) = d(v, o_{c_i}) + d(o_{c_i}, S'_2)$$

$$= j - 1 + d(c_i, S_2),$$

$$d(v, S'_3) = d(v, o_{c_i}) + d(o_{c_i}, S'_3)$$

$$= j - 1 + d(c_i, S_3).$$

Akibatnya, $r(v|P') = (0, j - 1 + d(c_i, S_2), j - 1 + d(c_i, S_3))$. Diperoleh bahwa

$$r(v|P') - r(o_{c_i}|P')$$

$$= (0, j - 1 + d(c_i, S_2), j - 1 + d(c_i, S_3))$$

$$- (0, d(c_i, S_2), d(c_i, S_3)).$$

$$=$$

$(0, j - 1, j - 1)$. Terbukti.

Kita miliki karakterisasi representasi untuk setiap titik $v = (c_i, v_j)$ terhadap partisi pembeda P' pada lema berikut.

Lema 3. Titik $v \in V_{c_i}$ jika dan hanya jika $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') = l\vec{x}$ dengan l adalah bilangan bulat dan \vec{x} adalah salah satu dari $(0,1,1)$ atau $(1,0,1)$ atau $(1,1,0)$.

Bukti. Syarat cukup dari pernyataan Lema 3 telah dipenuhi menggunakan Lema

2. Sebaliknya, misalkan $v = (c_a, v_j) \notin V_{c_i}$ dengan $a \neq i$. Kita hanya membuktikan untuk kasus $o_{c_i} \in S'_1$, karena kasus lainnya memiliki pembuktian yang serupa. Jika $o_{c_i} \in S'_1$ maka

$$r(o_{c_i}|P') = r(c_i|P) = (0, m - i + 1, i).$$

Karena $v \in S'_1$ maka $v = (c_t, v_j)$ dengan $1 \leq t \leq m$ dan $j \geq 1$. Dengan kata lain, $r(v|P') = r(o_{c_t}|P') + (0, j - 1, j - 1)$.

Akan tetapi $o_{c_t} \in S'_1$, yang berarti $r(o_{c_t}|P') = (0, m - t + 1, t)$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (0, m - t + j, t + j - 1) \\ &\quad - (0, m - i + 1, i) \\ &= (0, i - t + j - 1, t - i + j - 1) \\ &= (0, (j - 1) \\ &\quad + (i - t), (j - 1) \\ &\quad - (i - t)). \end{aligned}$$

Karena $i - t \neq 0$ maka $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') \neq l\vec{x}$. Jika $v \in S'_2$ dmaka $v = (c_{m+t}, v_j)$ dengan $j \geq 1$ dan $1 \leq t \leq m$ maka

$$\begin{aligned} r(v|P') &= (t, 0, m - t + 1) \\ &\quad + (0, j - 1, j - 1). \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (t + j - 1, i - m - 1, m \\ &\quad - t + j - i). \end{aligned}$$

Jadi, $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') \neq l\vec{x}$ karena $i - m - 1 < 0$ dan $t + j - 1 > 0$. Jika $v \in S'_3$ maka $v = (c_{2m+t}, v_j)$ dengan $1 \leq t \leq m + q$ dan $j \geq 1$. Diperoleh bahwa

$$r(v|P') = r(o_{c_{2m+t}}|P') + (j - 1, j - 1, 0).$$

Perhatikan bahwa $r(o_{c_{2m+t}}|P')$ akan sama dengan salah satu dari representasi berikut :

$$\begin{aligned} &(m - t + 1, t, 0), \\ &(m - t + 3, t, 0), \end{aligned}$$

$$(1, m + 1, 0),$$

$$(m + 1, 1, 0).$$

Akibatnya, kemungkinan dari $r(v|P')$ adalah

- a) $(m - t + j, t + j - 1, 0)$,
- b) $(m - t + j + 2, t + j - 1, 0)$
- c) $(j, m + j, 0)$
- d) $(m + j, j, 0)$

Dari 4 kemungkinan $r(v|P')$ diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (m - t + j, t + j + i - m - 2, -i), \text{ atau} \\ r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (m - t + j + 2, t + j + i - m - 2, -i), \text{ atau} \\ r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (j, j + i - 1, -i), \text{ atau} \\ r(v|P') - r(o_{c_i}|P') &= (m + j, j + i - m - 1, -i). \end{aligned}$$

Untuk dua kasus terakhir $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') \neq l\vec{x}$ karena $j > 0$ dan $m + j > 0$ sedangkan $-i < 0$. Untuk kasus pertama, karena $t \leq m$ maka $m - t + j > 0$. Untuk kasus kedua, karena $t \leq m + 1$ maka $m - t + j + 2 > 0$. Dengan alasan yang dapat disimpulkan bahwa $r(v|P') - r(o_{c_i}|P') \neq l\vec{x}$ karena koordinat pertama dan ketiganya berbeda tanda. Terbukti.

Sekarang kita telah siap membuktikan bahwa partisi terurut $P' = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ adalah partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright_o P_k$.

Bukti Teorema 1.

Misalkan $u, v \in V(C_n \triangleright_o P_k)$ dengan $u \neq v$. Jelas bahwa jika $u \in S'_i$ dan $v \in S'_j$ dengan $i \neq j$ maka $r(u|P') \neq r(v|P')$. Jika $u = (c_i, v_j)$ dan $v = (c_i, v_\ell)$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $j \neq \ell$ maka

$$\begin{aligned} r(u|P') &= r(o_{c_i}|P') + (j - 1)\vec{x}, \text{ dan} \\ r(v|P') &= r(o_{c_i}|P') + (\ell - 1)\vec{x}. \end{aligned}$$

Jadi, dalam kasus ini diperoleh $r(u|P') \neq r(v|P')$. Jika $u = (c_a, v_j)$ dan $v =$

(c_b, v_ℓ) dengan $a \neq b$ dan $c_a, c_b \in S_i$ maka

$$r(u|P') = r(o_{c_a}|P') + (j - 1)\vec{x}, \text{ dan}$$

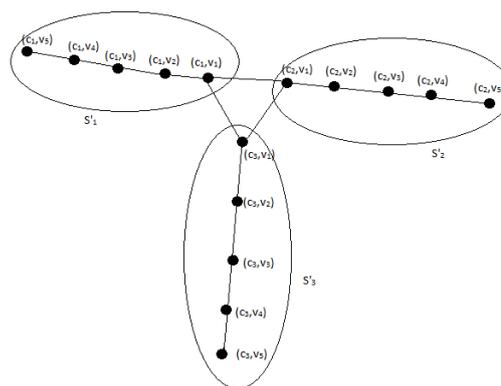
$$r(v|P') = r(o_{c_b}|P') + (\ell - 1)\vec{x}.$$

Andaikan $r(u|P') = r(v|P')$ maka $r(v|P') = r(o_{c_a}|P') + (j - 1)\vec{x}$.

Akibatnya, didapatkan bahwa $r(v|P') - r(o_{c_a}|P') + (j - 1)\vec{x}$. Berdasarkan Lema 4, dapat disimpulkan bahwa $v \in V_{c_a}$. Kontradiksi bahwa $v \in V_{c_b}$ dimana $V_{c_a} \cap V_{c_b} = \emptyset$. Dengan kata lain, dalam kasus ini $r(u|P') \neq r(v|P')$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa $P' = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ adalah partisi pembeda dari $C_n \triangleright_o P_k$.

Terakhir, akan dibuktikan bahwa tidak ada partisi pembeda P' dari $C_n \triangleright_o P_k$ dengan $|P'| = 2$. Misalkan $P' = \{X', Y'\}$ adalah partisi pembeda dari graf $C_n \triangleright_o P_k$. Ini berarti, $r(u|P') \neq r(v|P')$ untuk $u = (c_i, v_1)$ dan $v = (c_j, v_1)$ dengan $i \neq j$. Asumsikan $u, v \in X'$, dengan kata lain $d(u, X') = d(v, X') = 0$. Karena $d(u, Y'), d(v, Y') > 0$ maka terdapat dua titik berbeda $w', z' \in V(C_n \triangleright_o P_k)$ sehingga $z', w' \in X'$ dan $d(w', Y') = d(z', Y') = 1$. Akibatnya, $r(z'|P') = (0,1) = r(w'|P')$. Kontradiksi bahwa P' adalah partisi pembeda. Dapat disimpulkan dimensi partisi dari $C_n \triangleright_o P_k$ adalah 3.

Bagian ini akan diakhiri dengan memberikan contoh partisi pembeda dari graf $C_3 \triangleright_o P_5, C_4 \triangleright_o P_4$ dan graf $C_5 \triangleright_o P_5$. Diberikan graf C_3 dengan $V(C) = \{c_1, c_2, c_3\}$ dan $E(C_3) = \{c_1c_2, c_2c_3, c_3c_4, c_4c_5, c_5c_1\}$, serta graf P_5 dengan $V(P_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(P_5) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Perhatikan graf $C_3 \triangleright_o P_5$ dengan titik $o = v_1$ sebagai berikut.



Gambar 2. Partisi Pembeda dari Graf $C_3 \triangleright_o P_5$

Berdasarkan pembuktian pada Teorema 2, partisi pembeda dari graf $C_3 \triangleright_o P_5$ adalah $\Pi_1 = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ dengan

$$S'_1 = \{(c_1, v_1), (c_1, v_2), (c_1, v_3), (c_1, v_4), (c_1, v_5)\},$$

$$S'_2 = \{(c_2, v_1), (c_2, v_2), (c_2, v_3), (c_2, v_4), (c_2, v_5)\}$$

, dan

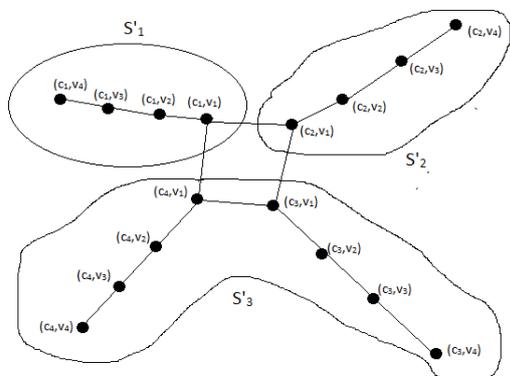
$$S'_3 = \{(c_3, v_1), (c_3, v_2), (c_3, v_3), (c_3, v_4), (c_3, v_5)\}$$

Representasi jarak dari setiap titik dari graf ini terhadap partisi pembeda Π dapat dilihat dalam tabel berikut.

Tabel 1. Reresentasi titik graf $C_3 \triangleright_o P_5$ terhadap partisi Π_1

Titik v	$r(v \Pi_1)$
(c_1, v_1)	$(0,1,1)$
(c_1, v_2)	$(0,2,2)$
(c_1, v_3)	$(0,3,3)$
(c_1, v_4)	$(0,4,4)$
(c_1, v_5)	$(0,5,5)$
(c_2, v_1)	$(1,0,1)$
(c_2, v_2)	$(2,0,2)$
(c_2, v_3)	$(3,0,3)$
(c_2, v_4)	$(4,0,4)$
(c_2, v_5)	$(5,0,5)$
(c_3, v_1)	$(1,1,0)$
(c_3, v_2)	$(2,2,0)$
(c_3, v_3)	$(3,3,0)$
(c_3, v_4)	$(4,4,0)$
(c_3, v_5)	$(5,5,0)$

Untuk graf $C_4 \triangleright_o P_4$ dengan titik $o = v_1$, Partisi pembeda Π_2 untuk graf ini dapat dilihat pada gambar berikut.



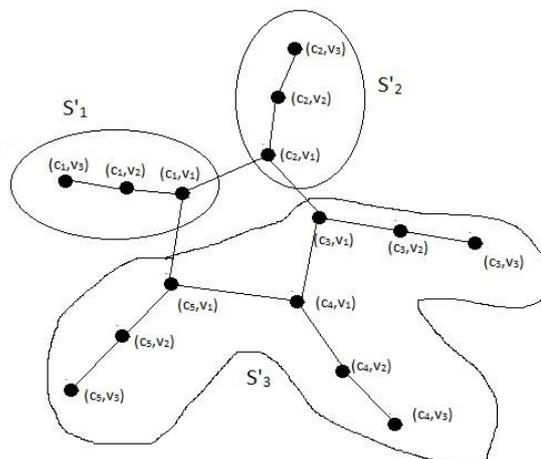
Gambar 3. Partisi Pembeda dari Graf $C_4 \triangleright_o P_4$

Representasi jarak setiap titik dari graf $C_4 \triangleright_o P_4$ terhadap partisi pembeda $\Pi_2 = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ diberikan pada tabel berikut.

Tabel 2. Reresentrasi titik graf $C_4 \triangleright_o P_4$ terhadap partisi Π_2

Titik v	$r(v \Pi_2)$
(c_1, v_1)	$(0,1,1)$
(c_1, v_2)	$(0,2,2)$
(c_1, v_3)	$(0,3,3)$
(c_1, v_4)	$(0,4,4)$
(c_2, v_1)	$(1,0,1)$
(c_2, v_2)	$(2,0,2)$
(c_2, v_3)	$(3,0,3)$
(c_2, v_4)	$(4,0,4)$
(c_3, v_1)	$(2,1,0)$
(c_3, v_2)	$(3,2,0)$
(c_3, v_3)	$(4,3,0)$
(c_3, v_4)	$(5,4,0)$
(c_4, v_1)	$(1,2,0)$
(c_4, v_2)	$(2,3,0)$
(c_4, v_3)	$(3,4,0)$
(c_4, v_4)	$(4,5,0)$

Contoh terakhir untuk graf $C_5 \triangleright_o P_3$ dengan titik $v = o_1$. Partisi pembeda Π_3 untuk graf ini diberikan dalam gambar berikut.



Gambar 4. Partisi Pembeda dari Graf $C_5 \triangleright_o P_3$

Representasi jarak setiap titik dari graf $C_5 \triangleright_o P_3$ terhadap partisi pembeda $\Pi_3 = \{S'_1, S'_2, S'_3\}$ dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3. Reresentrasi titik graf $C_5 \triangleright_o P_3$ terhadap partisi Π_3

Titik v	$r(v \Pi_3)$
(c_1, v_1)	$(0,1,1)$
(c_1, v_2)	$(0,2,2)$
(c_1, v_3)	$(0,3,3)$
(c_2, v_1)	$(1,0,1)$
(c_2, v_2)	$(2,0,2)$
(c_2, v_3)	$(3,0,3)$
(c_3, v_1)	$(2,1,0)$
(c_3, v_2)	$(3,2,0)$
(c_3, v_3)	$(4,3,0)$
(c_4, v_1)	$(2,2,0)$
(c_4, v_2)	$(3,3,0)$
(c_4, v_3)	$(4,4,0)$
(c_5, v_1)	$(1,2,0)$
(c_5, v_2)	$(4,4,0)$
(c_5, v_3)	$(5,5,0)$

SIMPULAN

Telah didapatkan bahwa untuk graf operasi *comb* antara graf lingkaran dan graf lintasan dimensi partisinya sama dengan dimensi partisi dari graf lingkaran. Lebih jelasnya $pd(C_n \triangleright_o P_k) = pd(C_n)$ dengan o adalah titik berderajat 1. Partisi pembeda yang didapat untuk graf operasi *comb* antara dua graf ini merupakan partisi pembeda yang diperoleh dari C_n . Berdasarkan analisis kasus untuk graf $C_n \triangleright_o P_k$ terdapat dugaan kuat untuk dimensi partisi dari graf $G \triangleright_o P_k$ dimana G adalah graf sebarang yang terhubung dan o adalah titik berderajat 1 dari P_k . Dugaan ini dituliskan dalam konjektur berikut.

Konjektur. Misalkan G adalah graf sebarang yang terhubung, P_k adalah graf lintasan dengan k titik dan o adalah titik berderajat 1 dari P_k . Dimensi partisi $pd(G \triangleright_o P_k) = pd(G)$.

DAFTAR PUSTAKA

- Accardi, L., dkk. 2004. "Monotone independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation". *Infinite*
- Chartrand, G., dkk. 2000. "The partition dimension of a graph". *Aequationes mathematicae*. Vol 59 (1-2), pp: 45-54.
- Chartrand, G., dkk, 1998. "On the partition dimension of graph". *Congressus Numerantium*. Vol 130, pp:157-168.
- Fehr, M., dkk. 2006. "The partition dimension of Cayley digraphs". *Aequationes mathematicae*. Vol 71 (1-2), pp: 1-18.
- Godsil, H. D., dan McKay, B. D. 1978. "A new graph product and its spectrum". *Bulletin of the Australian Mathematical Society*. Vol 18 (1), pp: 21-28.
- Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. Vol 7 (3), pp: 419-435.
- Alfarisi, R. dan Darmaji. 2017a. "On the partition dimension of comb product of path and complete graph". *AIP Conference Proceedings*. Vol 1867 (1).
- Alfarisi, R., dkk. 2017b. "On the star partition dimension of comb product of cycle and path". *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1867.
- Alfarisi, R., dkk. 2017c. "On the star partition dimension of comb product of cycle and complete graph". *Journal of Physics : Conference Series*. Vol. 855.
- Alfarisi, R. 2017d. *The Partition dimension and star partition dimension of comb product of two connected graphs*. Thesis. Surabaya: ITS.
- Balaban, A. T. 1985. "Application of Graph Theory in Chemistry". *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*. Vol. 25 (3), pp: 334-3
- Grigoriu, C., dkk. 2014. "On the partition dimension of a class of circulant graphs". *Journal Information Processing Letters*. Vol 114 (7), pp: 353-356.
- Harary, F. 1959. "Graph theory and electric networks". *IRE Transactions On Circuit Theory*. Vol 6 (5), pp: 95-109
- Haryeni, D. O., dkk. 2017. "On the partition dimension of disconnected graphs". *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*. Vol 49 (1), pp 18-32.
- Hora, A., dan Obata, N. 2007. *Comb graphs and star graphs*. In: *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*. Theoretical and

Mathematical Physics. Berlin, Heidelberg: Springer.

Rodríguez, A. J., dkk. 2014. "On the partition dimension of trees". *Discrete Applied Mathematics*. Vol 166, pp: 204-209.

Rodríguez, A. J., dkk. 2014. "The partition dimension of corona product graphs". <https://arxiv.org/abs/1010.5144> diakses pada 19 Desember 2019

Roth, J., dan Hashimshony, R. 1988. "Algorithms in graph theory and their use for solving problems in architectural design". *Computer-Aided Design*. Vol. 20 (7), pp: 373-381.

Singh, R. P. dan Vandana. 2014. "Application of Graph Theory in Computer Science and Engineering". *International Journal of Computer Application*. Vol. 104(1), pp:10-13.

Scarselli, F., dkk. 2009. "The graph Neural Network". *IEEE Transactions on Neural Networks*. Vol 20 (1), pp: 61-80.

Saputro, S. W., dkk. 2017. The metric dimension of comb product graphs. *Matematika Vesnik*. Vol 69 (4)

Yap, I. V., dkk. 2003. "A Graph-Theoretic Approach to Comparing and Integrating Genetic". *Physical and Sequence-Based Maps*. Vol. 165 (4), pp: 2235-2247.

Yero, I. G., dkk. 2014. " The partition dimension of strong product graphs and Cartesian product graphs". *Discrete Mathematics*. Vol 331, pp:43-52.

