JURNAL ILMIAH MAHASISWA

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO

ITERASI FUNGSI KUADRAT KOMPLEKS DAN KONSTRUKSI HIMPUNAN JULIA

Azizah Fattu Rohmah[1] , Julan Hernadi[2]

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Ponorogo

Email : azizahfattu123@gmail.com[1]; julan_hernadi@umpo.ac.id[2]

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk: (1) mengkaji dan menjelaskan pengertian himpunan Julia, (2) mengkaji dan menjelaskan sifat-sifat himpunan Julia, (3) mengkonstruksi dan memvisualisasi himpunan Julia pada komputer. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dalam bentuk studi pustaka atau dapat dikatakan kajian pustaka. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan mengkaji berbagai literatur ilmiah seperti buku dan jurnal ilmiah mengenai pengertian, sifat-sifat, serta cara mengkonstruksi dan memvisualisasi himpunan Julia. Referensi utama dari penelitian ini adalah buku *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications* edisi kedua karangan Kenneth Falconer (2003). Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) himpunan Julia $J(f)$ yang berasal dari fungsi polinomial f merupakan batas dari himpunan titik $z \in \mathbb{C}$, dimana $f^k(z) \to \infty$; (2) sifat-sifat himpunan Julia adalah untuk $|c| > \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6}) = 2{,}475$ himpunan Julia berbentuk kurva terputus-putus, untuk $\frac{1}{4} \le |c| \le \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6}) = 2{,}475$ maka himpunan Julia dapat berbentuk kurva terputus-putus atau kurva tertutup tidak sederhana, dan untuk $|c| < \frac{1}{4}$ himpunan Julia berbentuk kurva sederhana; (3) langkah-langkah dalam mengkonstruksi himpunan Julia adalah ambil fungsi dari himpunan Julia, pilih nilai c yang diinginkan, tentukan banyaknya iterasi yang akan dilakukan, lakukan perhitungan sesuai dengan iterasi yang sudah ditentukan, kemudian visualisasikan. Dalam memvisualisasikan himpunan Julia sangat diperlukan bantuan aplikasi komputer, salah satunya yaitu Matlab, sehingga hasil untuk himpunan Julia dapat dimodelkan dalam bentuk yang menarik.

Kata kunci: Fungsi Kuadrat Kompleks; Himpunan Julia; Iterasi

How to Cite. Azizah Fattu Rohmah (2020). Iterasi Fungsi Kuadrat Kompleks dan Kontruksi Himpunan Julia. Penerbitan Artikel Ilmiah Mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo, 4(1): 55-64

ISSN 2614-1434 (Print)
ISSN 2614-4409 (Online)

PENDAHULUAN

Geometri fraktal adalah salah satu cabang dari geometri. Menurut KBBI, geometri merupakan suatu cabang ilmu yang mempelajari tentang bentuk. Sedangkan fraktal *(fractal)* berasal dari kata Latin *fractus* yang artinya “patah”, “rusak”, atau “tidak teratur” (Sari, 2017). Secara istilah fraktal merupakan suatu bentuk yang tidak teratur tetapi memiliki sifat keserupaan diri *(self similiarity)* pada berbagai skala. Pada tahun 1975, Mandelbrot menggunakan kata fraktal untuk mendeskripsikan benda- benda serupa diri yang tidak memiliki dimensi yang jelas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa geometri fraktal merupakan cabang ilmu yang mempelajari tentang bentuk yang tidak teratur dan tidak memiliki dimensi yang jelas tetapi bersifat serupa diri pada berbagai skala.

Beberapa contoh fraktal yang terkenal adalah himpunan Mandelbrot, himpunan Julia, himpunan Cantor, segitiga Sierpinski, dan kurva Von Koch. Himpunan Cantor, segitiga Sierpinski, dan kurva Von Koch merupakan contoh fraktal klasik yang tergolong ke dalam fraktal bilangan real. Sedangkan himpunan Mandelbrot dan himpunan Julia adalah dua contoh fraktal yang sangat terkenal, yang tergolong ke dalam fraktal bilangan kompleks. Kedua himpunan tersebut berkaitan satu sama lain. Himpunan Julia ditemukan terlebih dahulu daripada himpunan Mandelbrot.

Himpunan Julia ditemukan oleh Gaston Maurice Julia, seorang matematikawan yang berasal dari Perancis (Falconer, 2003). Himpunan ini memberikan ilustrasi tentang bagaimana proses yang tampaknya sederhana dapat menghasilkan himpunan yang sangat rumit serta dapat memunculkan gambar yang sangat luar biasa menakjubkan. Himpunan Julia diperoleh dari proses iterasi dengan melakukan komposisi fungsi pada bilangan kompleks secara berulang-ulang (rekursif).

Fungsi pada bilangan kompleks yang diiterasi berbentuk $f(z) = z^2 + c$, dengan c sebuah konstanta kompleks. Proses iterasi pertamanya yaitu $f(z)$ itu sendiri, iterasi yang kedua yaitu $f^2(z) = f(f(z)) = z^4 + (2z^2 + 1)c + c^2$. Proses iterasi tersebut berlanjut sebanyak k, untuk $k \in \mathbb{N}$, dimana $f^k(z) = f\left(f^{k-1}(z)\right)$. Dari hasil proses iterasi tersebut akan membentuk suatu barisan yang disebut orbit, dimana orbit tersebut ada yang konvergen dan ada yang divergen. Orbit yang konvergen inilah yang akan membentuk himpunan Julia.

Jika dilakukan secara manual proses iterasi himpunan Julia terbilang rumit. Oleh karena itu diperlukan bantuan aplikasi pada komputer. Aplikasi komputer yang digunakan adalah aplikasi yang dapat membantu dalam proses iterasi dan menggambarkan himpunan Julia. Berdasarkan uraian tersebut, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang himpunan Julia.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka yaitu dengan mengkaji karya-karya ilmiah seperti, buku, artikel, dan jurnal yang relevan dengan teori umum mengenai Himpunan Julia. Penelitian ini dimulai dengan membahas definisi himpunan Julia. Selanjutnya dibahas mengenai sifat-sifat himpunan Julia. Dari definisi dan sifat-sifat himpunan Julia tersebut kemudian dirumuskan mengenai langkah mengkonstruksi dan memvisualisasi himpunan Julia.

1. Hasil Pembahasan

Himpunan Julia berasal dari fungsi polinomial kuadrat kompleks yang berbentuk $f_c(z) = z^2 + c$, dimana $z \in \mathbb{C}$ dan c adalah sebuah konstanta kompleks. Iterasi ke-k sebuah fungsi f merupakan komposisi dari fungsi f sebanyak k, yaitu $f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$. Misal $f(z)$ adalah fungsi f dititik z, iterasi pertama dari f adalah dirinya sendiri, iterasi kedua adalah $f^2(z) = f(f(z))$, iterasi ketiga adalah $f^3(z) = f(f^2(z)) = f(f(f(z)))$, sehingga iterasi ke-$k$ adalah $f^k(z) = f\left(f^{k-1}(z)\right)$. Dari hasil proses iterasi tersebut akan membentuk suatu barisan, yaitu $(z, f(z), f^2(z), \ldots, f^k(z))$ yang disebut orbit. Orbit pada barisan tersebut ada yang konvergen dan ada yang divergen. Orbit yang konvergen inilah yang akan membentuk himpunan Julia *filled-in*, dan batas dari himpunan Julia *filled-in* disebut himpunan Julia. Berikut ini disajikan definisi secara formal dari himpunan Julia *filled-in*.

Definisi 3.1

Diberikan fungsi $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, himpunan Julia *filled-in* $K(f)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty\}$$

Dari definisi tersebut dapat ketahui bahwa himpunan nilai dari iterasi fungsinya konvergen.

Setelah mengetahui definisi himpunan Julia *filled-in*, berikut didefinisikan tentang himpunan Julia yang merupakan batas dari himpunan Julia *filled-in.*

Definisi 3.2

Diberikan fungsi $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, himpunan Julia dari fungsi f merupakan batas dari $K(f)$, yaitu

$$J(f) = \partial K(f)$$

Jadi $z \in J(f)$ jika di setiap persekitaran z terdapat titik w dan v dengan $f^k(w) \to \infty$ dan $f^k(v) \nrightarrow \infty$.

Berikut ini contoh fungsi kuadrat kompleks yang membentuk himpunan Julia akan tetapi bukan fraktal.

Contoh 3.1

Diberikan $f(z) = z^2$, sehingga

$$f^2(z) = f(z^2) = (z^2)^2 = z^{2 \cdot 2} = z^{2^{1+1}} = z^{2^2}$$

$$f^3(z) = f\left(z^{2^2}\right) = \left(z^{2^2}\right)^2 = z^{2^2 \cdot 2} = z^{2^{2+1}} = z^{2^3}$$

$$f^4(z) = f\left(z^{2^3}\right) = \left(z^{2^3}\right)^2 = z^{2^3 \cdot 2} = z^{2^{3+1}} = z^{2^4}$$

$$\vdots$$

$$f^k(z) = f\left(z^{2^{k-1}}\right) = \left(z^{2^{k-1}}\right)^2 = z^{2^{k-1} \cdot 2} = z^{2^k}$$

Perhatikan untuk beberapa nilai z dan $f(z) = z^2$ berikut ini.

- Untuk $z = 0.5 + 0.5i$

Iterasi ke-	hasil iterasi
1	
2	0.5000i
3	-0.2500
4	0.0625
5	0.0039
6	0.0000
7	0.0000
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
	0.0000

Dari hasil tersebut diketahui bahwa semakin banyak iterasi yang dilakukan maka hasil iterasinya semakin menuju ke-0.

- Untuk $z = 0.8 + 0.6i$

Iterasi ke-	hasil iterasi
1	0.2800 +
2	0.9600i
3	-0.8432 +
4	0.5376i
5	0.4220 -
6	0.9066i
7	-0.6439 -
8	0.7651i
9	-0.1708 +
10	0.9853i
	-0.9416 -
	0.3367i
	0.7733 +
	0.6340i
	0.1961 +
	0.9806i
	-0.9231 +
	0.3845i
	0.7043 -
	0.7099i

Dari hasil tersebut diketahui bahwa semakin banyak iterasi yang dilakukan maka hasil iterasinya tidak menentu, akan tetapi hasil iterasi tersebut berada pada lingkaran dengan jari-jari 1, atau modulus nilai iterasinya sama dengan 1.

- Untuk $z = 1 + i$

Iterasi ke-	hasil iterasi
1	2i
2	-4
3	16
4	256
5	65536

Dari hasil tersebut diketahui bahwa semakin banyak iterasi yang dilakukan maka hasil iterasinya semakin besar, dengan kata lain hasil iterasinya menuju ke takhingga.

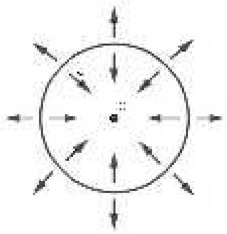
Dari beberapa nilai z tersebut, dapat dipahami bahwa nilai $f^k(z)$, untuk $k \to \infty$ ada tiga, yaitu

Jika $|z| < 1$ maka $f^k(z) \to 0$

Jika $|z| = 1$ maka $f^k(z) \to 1$

Jika $|z| > 1$ maka $f^k(z) \to \infty$

Dengan demikian, himpunan Julia *filled-in* K adalah unit disk $|z| \leq 1$, dan himpunan Julia J adalah batas antara himpunan titik yang menuju ke 0 dan ∞, dalam hal ini himpunan Julia berbentuk lingkaran dengan jari-jari 1 dan bukan merupakan fraktal, artinya bahwa lingkaran bukan sebuah detail yang takterbatas.



Gambar 1: Ilustrasi Himpunan Julia dari $f(z) = z^2$

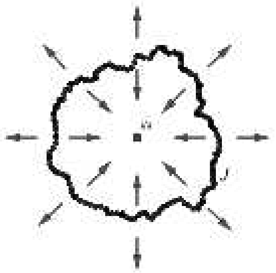
Selanjutnya akan diberikan contoh fungsi kuadrat kompleks yang membentuk himpunan Julia sekaligus fraktal.

Contoh 3.2

Dengan sedikit memodifikasi contoh 3.1, yaitu dengan menambah suatu konstanta bilangan kompleks c, diperoleh $f(z) = z^2 + c$. Himpunan nilai dari $f^k(z)$ ada 2 macam, yaitu

- Jika nilai z kecil maka $f^k(z) \to w$, dimana w adalah *fixed point* dari f menuju 0.
- Jika nilai z besar maka $f^k(z) \to \infty$.

Himpunan Julia pada persamaan $f(z) = z^2 + c$ adalah batas dari $f^k(z) \to w$ dan $f^k(z) \to \infty$. Dalam hal ini himpunan Julia berbentuk fraktal.



Gambar 2: Ilustrasi Himpunan Julia dari $f(z) = z^2 + c$

Berikut ini akan ditunjukkan lemma yang berguna untuk menentukan apakah suatu barisan iterasi terbatas atau tidak.

Lemma 3.1

Diberikan sebuah fungsi polinomial $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ dengan $a_n \neq 0$, terdapat bilangan $r \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga jika $|z| \geq r$ maka $|f(z)| \geq 2|z|$. Khususnya, jika $|f^m(z)| \geq r$ untuk beberapa $m \geq 0$ maka $f^k(z) \to \infty$ dimana $k \to \infty$. Jadi $f^k(z) \to \infty$ atau $\{f^k(z): k = 0, 1, 2, \ldots\}$ adalah himpunan terbatas.

Bukti.

Pilih $r = \sqrt[n-1]{\frac{4}{|a_n|}}$. Jika $|z| \geq r$, diperoleh

$$\begin{aligned}
|z| &\geq \sqrt[n-1]{\frac{4}{|a_n|}} \\
|z|^{n-1} &\geq \frac{4}{|a_n|} \\
\frac{1}{2}|z|^{n-1} &\geq \frac{2}{|a_n|} \\
\frac{1}{2}|a_n||z|^{n-1} &\geq 2 \\
\frac{1}{2}|a_n||z|^{n} &\geq 2|z|
\end{aligned}$$

Jika r adalah bilangan yang cukup besar dan $|z| > r$, maka $|z|^n$ akan lebih besar dari $|z|^{n-1}$ dan semua pangkat yang lebih kecil pada $|z|$. Sehingga diperoleh

$$(|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

Kemudian jika $|z| \geq r$,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\leq |a_n z^n| + |a_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |a_1 z| \\
&= |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + \\
&\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\
&\geq |a_n||z|^n - \frac{1}{2}|a_n||z|^n \\
&\geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \\
&\geq 2|z|
\end{aligned}$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa $|f^m(z)| \geq r$ untuk beberapa $m \in \mathbb{N}$, maka

$$|f^{m+1}(z)| = |f(f^m(z))| \geq 2|f^m(z)|$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
|f^{m+k}(z| &= |f(f^{m+k-1}(z))| \\
&\geq 2|f^{m+k-1}(z)| \\
&= 2|f(f^{m+k-2}(z))| \\
&\geq 2^2|f^{m+k-2}(z)| \\
&= 2^2|f(f^{m+k-3}(z)| \\
&\geq 2^3|f^{m+k-3}(z)| \\
&\vdots \\
&\geq 2^m|f^k(z)|
\end{aligned}$$

Dengan mengambil limitnya, diketahui bahwa $|f^k(z)| \to \infty$ untuk $k \to \infty$. Jadi, iterasi ke-k dari fungsi tersebut akan menuju ∞ ketika $|z|$ besar, artinya $f^k(z) \to \infty$. ■

Proposisi berikut ini menjelaskan bahwa himpunan Julia dan himpunan Julia *filled-in* merupakan himpunan tak kosong dan kompak yang nantinya digunakan untuk membuktikan teorema pada sifat-sifat himpunan Julia.

Proposisi 3.1

Diberikan fungsi polinomial $f(z)$. Himpunan Julia *filled-in* $K(f)$ dan himpunan Julia $J(f)$ tak kosong dan kompak, dengan $J(f) \subset K(f)$. Selanjutnya, $J(f)$ memiliki interior yang kosong.

Bukti.

Dengan r yang diberikan oleh lemma 3.1, maka K termuat dalam disk $B(0, r)$ dan dibatasi oleh J. Jika $z \notin K$, maka $f^k(z) \to \infty$, sehingga $|f^m(z)| > r$ untuk beberapa $m \in \mathbb{Z}$. Karena f^m kontinu sehingga berlaku untuk w dengan $|w - z| < \delta$ (w cukup dekat dengan z) maka $f^m(w) \to \infty$. Artinya $w \notin K$ melainkan $w \in K^c$. Hal ini menunjukkan bahwa w merupakan interior K^c, jadi K^c terbuka. Dengan demikian, komplemen dari K^c terbuka adalah K tertutup. Sebagai batas K, himpunan Julia J tertutup dan termuat dalam K. Karena K dan J tertutup dan terbatas maka K dan J kompak.

Persamaan $f(z) = z$ memiliki setidaknya satu solusi misal z_0, yaitu $f^k(z_0) = z_0$. Untuk $f^{k+1}(z_0) = f\left(f^k(z_0)\right) = f(z_0) = z_0$, sehingga $\lim_{k\to\infty} f^k(z_0) = z_0 < \infty$, jadi $z_0 \in K$ artinya K tak kosong. Ambil $z_1 \in \mathbb{C}\backslash K$. Kemudian z_0 dan z_1 dihubungkan dengan garis $\lambda z_0 + (1-\lambda)z_1$, dengan mengambil nilai λ yaitu $0 \le \lambda \le 1$ yang sesuai, maka akan ada nilai z_i yang berada di batas K. Jadi, $J = \partial K$ tidak kosong.

Andai U adalah subset terbuka tak kosong dari $J \subset K$, maka U terletak di interior K (karena himpunan terbuka di dalam himpunan tertutup berarti himpunan tersebut terletak di interiornya). Jadi irisan antara U dan J adalah kosong. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian, artinya interior dari J adalah kosong. ■

Hal mengejutkan terjadi pada himpunan Julia, himpunan Julia dipetakan ke dirinya sendiri oleh f dan sebaliknya. Pernyataan tersebut didukung oleh proposisi berikut.

Proposisi 3.2

Himpunan Julia $J = J(f)$ dari f adalah invarian *forward* dan *backward* di bawah f, yaitu $J = f(J) = f^{-1}(J)$.

Bukti.

- Diberikan $z \in J$. Berdasarkan definisi dari himpunan Julia, maka $\lim_{k\to\infty} f^k(z) < \infty$. Dengan mengunakan sifat kontinu diperoleh bahwa

$$\lim_{k\to\infty} f^k\left(f(z)\right) = \lim_{k\to\infty} f^{k+1}(z) < \infty$$

  Artinya $f(z) \in J$.

  Karena $f(z) \in J$ maka $z \in f^{-1}(J)$.

  Jadi,

  $J \subseteq f^{-1}(J) \to f(J) \subseteq f\left(f^{-1}(J)\right) = f(J) \subseteq J$.

  Dari pernyataan tersebut diperoleh 2 fakta yaitu $(a)\ J \subseteq f^{-1}(J)$ dan $(b) f(J) \subseteq J$.

- Misal $f(z_0) = z \in J$ maka $z_0 = f^{-1}(z)$.

$$\lim_{k\to\infty} f^k(z_0) = \lim_{k\to\infty} f^k\left(f^{-1}(z)\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} f^{k-1}(z) < \infty$$

  Artinya $z_0 \in J$.

  Karena $z_0 \in J$ maka $f(z_0) \in f(J)$.

  Jadi,

  $J \subseteq f(J) \to f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}\left(f(J)\right) = f^{-1}(J) \subseteq J$

  .

  Dari pernyataan tersebut diperoleh 2 fakta yaitu $(c)\ J \subset f(J)$ dan $(d) f^{-1}(J) \subset J$.

Perhatikan (a) dan (d), dari 2 pernyataan tersebut diperoleh $J \subset f^{-1}(J) \subset J$, artinya

$$J = J$$

Perhatikan juga (b) dan (c), dari 2 pernyataan tersebut diperoleh $f(J) \subseteq J \subseteq f(J)$, artinya

$$f(J \qquad ($$

Dari $(*)$ dan $(**)$ dapat ditarik kesimpulan bahwa $f(J) = J = f^{-1}(J)$. ■

Diberikan U adalah sebuah himpunan bagian terbuka dari $\mathbb{C}$ dan $\{g_k\}: U \to \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ menjadi keluarga dari fungsi analitik kompleks (yaitu fungsi yang terdiferensial pada U pada bilangan kompleks). Berikut ini adalah definisi dari keluarga *normal* pada U.

Definisi 3.3

Sebuah keluarga dari $\{g_k\}$ dikatakan *normal* pada U jika setiap barisan dari $\{g_k\}$ mempunyai subbarisan yang konvergen seragam pada subset kompak dari U, baik untuk fungsi analitik terbatas maupun ke ∞. Sebuah keluarga dari $\{g_k\}$ dikatakan *normal* dititik w pada U jika terdapat beberapa subset terbuka V dari U yang memuat w sedemikian hingga $\{g_k\}$adalah keluarga *normal* pada V.

Setelah mengetahui definisi dari keluarga *normal* pada U, selanjutnya akan dibahas mengenai teorema yang menjelaskan tentang kriteria bukan keluarga *normal*.

Teorema 3.1 (TEOREMA MONTEL)

Diberikan sebuah keluarga fungsi analitik kompleks $\{g_k\}$ pada domain terbuka U. Jika $\{g_k\}$ bukan keluarga *normal*, maka untuk semua $w \in \mathbb{C}$, $g_k(z) = w$ untuk beberapa $z \in U$ dan beberapa k.

Proposisi berikut ini menjelaskan definisi himpunan Julia secara umum.

Proposisi 3.3

$J(f) = \{z \in \mathbb{C} : \{f^k\}$ bukan keluarga *normal* pada $z\}$.

Bukti.

Ada 3 kemungkinan untuk nilai z, yaitu:

- Jika $z \in J$, maka setiap persekitaran V dari z, terdapat titik w sedemikian hingga $f^k(w) \to \infty$, selagi $f^k(z)$ terbatas. Sehingga tidak ada subbarisan dari $\{f^k\}$ yang konvergen seragam pada V. Artinya $\{f^k\}$ tidak *normal* pada z.
- Andai $z \notin J$. Pilih $z \in Int\ K$. Ambil himpunan terbuka V dengan $z \in V \subset Int\ K$, diperoleh $f^k(w) \in K$, untuk $\forall w \in V$ dan $k \in \mathbb{N}$. Sehingga berdasarkan teorema 3.1 , $\{f^k\}$ *normal* pada w.
- Andai $z \notin J$. Pilih $z \in \mathbb{C}\backslash K$. Ambil himpunan terbuka V dengan $z \in V \subset \mathbb{C}\backslash K$, sehingga $|f^k(z)| > r$, dimana r sesuai dengan lemma 3.1. Berdasarkan lemma 3.1 juga, $|f^k(w)| > r$ untuk setiap w pada persekitaran V dari z, sehingga $f^k(w) \to \infty$ seragam pada V. Artinya $\{f^k\}$ *normal* pada w. ■

Lemma berikut akan digunakan dalam pembuktian teorema selanjutnya.

Lemma 3.2

Diberikan sebuah titik w menjadi *attractive fixed point* dari f. Maka $\partial A(w) = J(f)$. Hal tersebut juga berlaku untuk $w = \infty$.

Definisi berikut memberikan gambaran mengenai loop, dimana definisi berikut digunakan untuk pembuktian teorema pada sifat himpunan Julia.

Definisi 3.4

Sebuah kurva pada bidang kompleks dikatakan loop jika kurva tersebut mulus (yaitu terdiferensial), tertutup, dan sederhana (yaitu tidak memotong dirinya sendiri).

Lemma berikut menjelaskan tentang kondisi *invers image* dari interior C yang bergantung pada keberadaan titik c.

Lemma 3.3

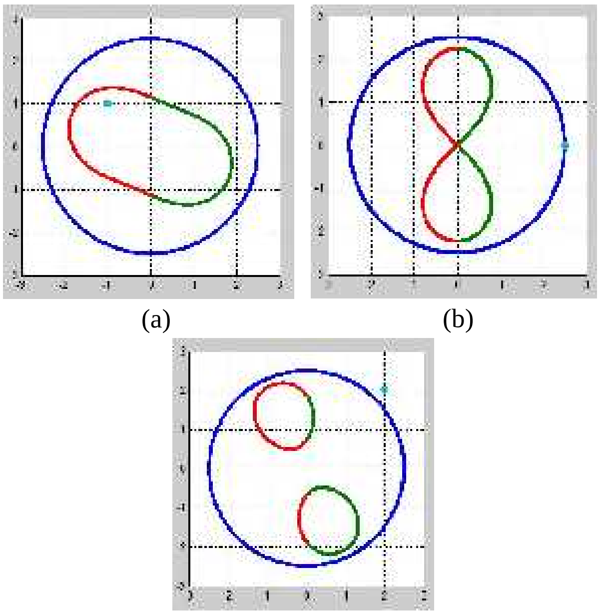
Diberikan sebuah loop C pada bidang kompleks.

a) Jika titik c berada di dalam C maka $f_c^{-1}(C)$ adalah loop, dengan *invers image* dari interior C sebagai interior dari $f_c^{-1}(C)$.

b) Jika titik c berada pada C maka $f_c^{-1}(C)$ adalah gambar angka delapan dimana titik potongnya berada di $O(0,0)$, dengan *invers image* dari interior C adalah interior dari dua loop.

c) Jika titik c berada di luar C maka $f_c^{-1}(C)$ terdiri dari dua loop yang terpisah, dengan *invers image* dari interior C adalah interior dari dua loop.

Berikut adalah ilustrasi dari lemma 3.3



(a) (b)

(c)

Gambar 3: loop C dan invers image-nya (a) dengan titik c berada di dalam C, (b) dengan titik c berada pada C, (c) dengan titik c berada di luar C.

Berikut akan ditunjukkan teorema dan proposisi yang mendukung untuk pembuktian pada sifat-sifat himpunan Julia.

Teorema 3.2

Diberikan Sistem Fungsi Iterasi $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ pada $D \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga

$|S_i(x) - S_i(y)| \le c_i |x - y|, (x,y) \in D$

dengan $c_i < 1$, untuk semua i. Terdapat dengan tunggal atraktor F, yaitu himpunan kompak tak kosong sedemikian hingga

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Proposisi 3.4

Diberikan atraktor F dari Sistem Fungsi Iterasi yang terdiri dari kontraksi $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ pada himpunan bagian tertutup, $D \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga

$|S_i(x) - S_i(y)| \le c_i |x - y|, (x,y) \in D$

dengan $0 < c_i < 1$, untuk semua i. Maka $\dim_H F \leq s$ dan $\overline{\dim}_B F \leq s$, dimana $\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$.

Proposisi 3.5

Berdasarkan Sistem Fungsi Iterasi yang terdiri dari kontraksi $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ pada himpunan bagian tertutup, $D \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga

$b_i|x - y| \leq |S_i(x) - S_i(y)|, (x, y) \in D$

dengan $0 < b_i < 1$, untuk semua i. Diasumsikan bahwa atraktor F memenuhi

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

dengan gabungan saling lepas. Maka F terputus-putus dan $\dim_H F \geq s$ dimana

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1.$$

Sifat-sifat dari himpunan Julia berikut ini berdasarkan dari nilai c yang diambil. Ada 2 sifat, yaitu untuk $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ dan untuk $|c| < \frac{1}{4}$.

1. Untuk $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$, himpunan Julia berbentuk kurva terputus-putus.
   Berikut adalah teorema mengenai pernyataan tersebut.

   Teorema 3.3

   Jika $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ maka $J(f_c)$ *totally disconnected* dan $J(f_c)$ adalah atraktor dari kontraksi yang diberikan oleh 2 cabang dari $f_c^{-1}(z) = \pm(z - c)^{\frac{1}{2}}$ untuk z dekat J. Ketika $|c|$ besar maka

$$\dim_B J(f_c) = \dim_H J(f_c) \simeq \frac{2 \log 2}{\log 4}|c| .$$

   Bukti.

   Diberikan sebuah lingkaran C dengan $|z| = |c|$ dan D adalah interiornya, $|z| < |c|$.

   Selanjutnya *invers image* dari f_c dinyatakan dengan

$$f_c^{-1}(C) = \left\{(ce^{i\theta} - c)^{\frac{1}{2}} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

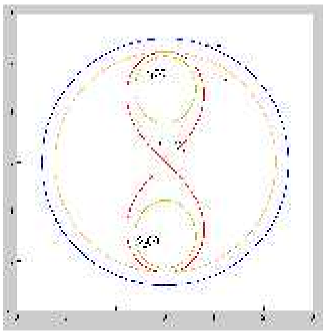
   merupakan gambar angka delapan dengan titik potongnya di $O(0,0)$, dengan loop pada kedua sisi dari garis lurus yang melewati titik asal.

Karena $|c| > 2$, $f_c^{-1}(C) \subset D$ sebab jika $|z| > |c|$ maka

$$\begin{aligned} &= |z^2 + c| \\ &\geq |z^2| - |c| \\ &= |c|^2 - |c| \\ &= |c|(|c| - 1) \\ &> |c| \end{aligned}$$

Interoior masing-masing loop dari $f_c^{-1}(C)$ dipetakan secara bijektif oleh f_c ke D. Jika $S_1, S_2 : D \to D$ sebagai cabang dari $f_c^{-1}(z)$ di dalam masing-masing loop, maka $S_1(D)$ dan $S_2(D)$ adalah interior dari 2 loop.

Diberikan V sebuah disk $\{z : |z| < |2c|^{\frac{1}{2}}\}$. Pilih jari-jari dari V sehingga V dapat memuat $f_c^{-1}(C)$, jadi $S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D$. Oleh karena itu, $S_1(V), S_2(V) \subset V$ dengan $S_1(\bar{V})$ dan $S_2(\bar{V})$ terpisah.



Gambar 4: Ilustrasi Pembuktian Teorema 3.3

Untuk $i = 1, 2$,

$$|S_i(z_1) - S_i(z_2)| = \left|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} - (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}\right| = \frac{|z_1 - z_2|}{\left|(z_1 - c)^{\frac{1}{2}} + (z_2 - c)^{\frac{1}{2}}\right|}$$

Jika $z_1, z_2 \in \bar{V}$, ambil nilai terkecil dan terbesar,

$$\frac{1}{2}\left(|c| + |2c|^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{|S_i(z_1) - S_i(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Batas atas kurang dari 1 jika $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$, dalam hal ini S_1 dan S_2 kontraksi pada disk $\bar{V}$. Berdasarkan teorema 3.2, terdapat atraktor kompak tak kosong unik $F \subset \bar{V}$ yang menarik

$$S_1(F) \cup S_2(F) = F \quad (2)$$

Karena $S_1(\bar{V})$ dan $S_2(\bar{V})$ terpisah, maka $S_1(F)$ dan $S_2(F)$ juga terpisah, artinya F *totally disconnected*.

Tentu, F tidak lain adalah himpunan Julia $J = J(f_c)$. Salah satu cara untuk melihat ini adalah dengan mencatat bahwa karena V mengandung setidaknya satu titik z dan J (misalnya *repelling fixed point* dari f_c), maka $J =$ penutup $\left(\cup_{k=1}^{\infty} f_c^{-k}(z)\right) \subset \bar{V}$, karena $f_c^{-k}(\bar{V}) \subset \bar{V}$.

Berdasarkan proposisi 3.1 dan proposisi 3.2, J adalah subset kompak tak kosong dari $\bar{V}$ yang menarik $J = f_c^{-1}(J)$ atau ekuivalen dengan $J = S_1(J) \cup S_2(J)$. Jadi, $J = F$ himpunan kompak tak kosong unik yang menarik (2).

Yang terakhir estimakan dimensi dari $J(f_c) = F$. Berdasarkan proposisi 3.4 dan proposisi 3.5 serta (1), batas bawah dan batas atas dari $\dim_H J(f_c)$ disediakan oleh solusi dari $2\left(\frac{1}{2}\left(|c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{s} = 1$, yaitu dengan $s = \frac{2\log 2}{\log 4}\left(|c| \pm |2c|^{\frac{1}{2}}\right)$, yang memberikan estimasi asimptotik yang ditetapkan. ■

2. Untuk $|c| < \frac{1}{4}$, himpunan Julia berbentuk kurva sederhana.

Berikut adalah teorema mengenai pernyataan tersebut.

Teorema 3.4

Jika $|c| < \frac{1}{4}$ maka $J(f_c)$ merupakan kurva tertutup sederhana.

Bukti.

- Diberikan C_0 adalah kurva $|z| = \frac{1}{2}$, yang mengelilingi c dan titik tetap *attractive* w dari f_c.
- Dengan perhitungan langsung, *invers image* $f_c^{-1}(C_0)$ adalah loop C_1 yang melingkupi C_0.
- Misalkan A_1 adalah daerah *annular* (seperti cincin) antara C_0 dan C_1 yang diisi kurva kontinum yang disebut "lintasan", yang meninggalkan C_0 dan mencapai (menuju) C_1 dengan tegak lurus.
- Untuk setiap θ, diberikan $\psi_1(\theta)$ adalah titik di C_1 pada akhir lintasan yang meninggalkan C_0 di $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$.
- *Invers image* $f_c^{-1}(A_1)$ adalah daerah *annular* A_2 dengan batas luar adalah loop $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$ dan batas dalam adalah C_1, dengan f_c memetakan A_2 ke A_1 pada *two-to-one manner*.
- *Invers image* dari lintasan yang menghubungkan C_0 ke C_1 membentuk keluarga lintasan yang menghubungkan C_1 ke C_2.
- Diberikan $\psi_2(\theta)$ adalah titik di C_2 pada akhir lintasan yang meninggalkan C_1 di $\psi_1(\theta)$.
- Dengan cara yang sama, lakukan langkah tersebut sampai mendapatkan barisan dari loop C_k, dimana masing-masing loop melingkupi loop sebelumnya, dan keluarga lintasan yang menghubungkan $\psi_k(\theta)$ di C_k ke titik $\psi_{k+1}(\theta)$ di C_{k+1} untuk setiap k.
- Karena $k \to \infty$, kurva C_k mendekati batas dari basin w, berdasarkan lemma 3.2 batasnya adalah himpunan Julia $J(f_c)$.
- Karena $|f_c'(z)| > \gamma$ untuk beberapa $\gamma > 1$ diluar C_1, artinya f_c^{-1} kontraktor dekat J.
- Dengan demikian panjang lintasan yang menghubungkan $\psi_k(\theta)$ ke $\psi_{k+1}(\theta)$ konvergen ke 0 karena $k \to \infty$.
- Akibatnya $\psi_k(\theta)$ konvergen seragam ke fungsi kontinu $\psi(\theta)$ ketika $k \to \infty$, dan J adalah kurva tertutup yang diberikan oleh $\psi(\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$.
- Hal ini menunjukkan bahwa ψ merepresentasikan kurva sederhana.
- Andai $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$.
- Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh C_0 dan 2 lintasan yang menghubungkan $\psi_0(\theta_1)$ dan $\psi_0(\theta_2)$ menjadi titik bersama.
- Batas dari D dibatasi oleh iterasi f_c, sehingga berdasarkan teorema modulus maksimum (bahwa modulus fungsi analitik mengambil maksimum pada titik batas suatu dearah) D tetap terikat di bawah iterasi f.
- Jadi D adalah bagian dari himpunan Julia *filled-in*, sehingga interior D tidak memuat titik dari J.
- Dengan demikian, $\psi(\theta) = \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$ untuk semua θ antara θ_1 dan θ_2.

- Karena itu $\psi(\theta)$ tidak memiliki titik persimpangan diri.■

Untuk mengkonstruksi himpunan Julia, yang sangat diperhatikan adalah pengambilan nilai c. Sesuai dengan teorema sebelumnya, diketahui bahwa ada beberapa karakteristik nilai c, yaitu untuk $|c| < \frac{1}{4}$ dan $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2,475$. Selain nilai c tersebut, untuk nilai $\frac{1}{4} \le |c| \le \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2,475$ maka himpunan Julia dapat berbentuk kurva terputus-putus atau kurva tertutup tidak sederhana, hal ini didasarkan pada eksperimen yang dilakukan oleh peneliti. Langkah-langkah untuk mengkonstruksi himpunan Julia adalah sebagai berikut:

1. Ambil fungsi dari himpunan Julia, yaitu fungsi kuadrat kompleks yang berbentuk $f_c = z^2 + c$, dimana $z, c \in \mathbb{C}$.
2. Pilih nilai c yang diinginkan.
3. Tentukan banyaknya iterasi yang akan dilakukan, yaitu menentukan nilai k sehingga $f^k(z) \nrightarrow \infty$.
4. Lakukan perhitungan sesuai dengan iterasi yang sudah ditentukan, kemudian visualisasikan.

Dari langkah-langkah tersebut, terlihat mudah untuk mengkonstruksi himpunan Julia. Akan tetapi jika benar-benar dilakukan akan terasa sulit, karena kita harus menentukan banyaknya iterasi sehingga f^k ada nilainya. Selanjutnya, dalam memvisualisasikan himpunan Julia akan sangat sulit jika dilakukan secara manual, karena meskipun fungsinya terlihat sederhana (yaitu fungsi kuadrat) namun dalam proses mengoperasiannya sangat rumit. Oleh karena itu, diperlukan bantuan aplikasi komputer untuk mempermudah memvisualisasikan.

Salah satu aplikasi komputer yang dapat digunakan untuk memvisualisasikan himpunan Julia adalah Matlab. Penggunaan aplikasi komputer tersebut bertujuan agar hasil untuk himpunan Julia dapat dimodelkan dalam bentuk yang menarik. M-file yang dapat digunakan adalah sebagai berikut.

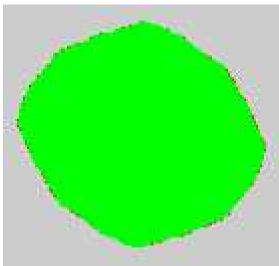
```
col=20;
m=300;
cx=0;
cy=0;
l=1.5;
x=linspace(cx-l,cx+l,m);
y=linspace(cy-l,cy+l,m);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
c=i;
Z=X+i*Y;
for k=1:col;
    Z=Z.^2+c;
    W=exp(-abs(Z));
end
colormap prism(256);
pcolor(W);
shading flat;
axis('square','equal','off');
grid on;
```

Keterangan.

- Nilai `col` menyatakan banyaknya iterasi.
- Nilai `m` menyatakan banyaknya pembagian jarak untuk sumbu real dan sumbu imajiner.
- Nilai `cx`, `cy`, dan `l` menyatakan batas dari sumbu real dan sumbu imajiner.
- Nilai `x` dan nilai `y` menyatakan suatu *array* pada interval `cx-l,cx+l` dan interval `cy-l,cy+l` yang dibagi sebanyak `m`.
- `[X,Y]` menyatakan suatu matriks dengan ukuran `m×m`.
- Nilai `c` menyatakan parameter yang diambil.
- Nilai Z menyatakan nilai awal bilangan kompleks.
- Baris mulai `for` sampai `end` menyatakan proses iterasinya.
- Baris selanjutnya sampai terakhir merupakan visualisasi dari himpunan Julia.

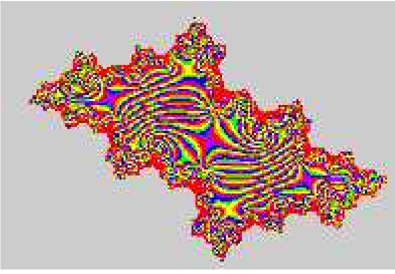
Berikut beberapa contoh visualisasi himpunan Julia.

1. Himpunan Julia dengan nilai $c = -0.1 + 0.1i$ dan banyaknya iterasi 20. Karena $|c| < \frac{1}{4}$ maka himpunan Julia berbentuk kurva tertutup sederhana.



Gambar 5: Himpunan Julia dengan $c = -0.1 + 0.1i$

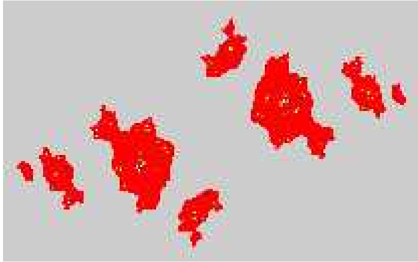
2. Himpunan Julia dengan nilai $c = -0.5 + 0.5i$ dan banyaknya iterasi 20.



Gambar 6: Himpunan Julia dengan $c = -0.5 + 0.5i$

Berdasarkan gambar tersebut, himpunan Julia dengan nilai $c = -0.5 + 0.5i$ atau $\frac{1}{4} \leq |c| \leq \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ berbentuk kurva tertutup sederhana.

3. Himpunan Julia dengan nilai $c = -0.8 - 0.5i$ dan banyaknya iterasi 20.



Gambar 7: Himpunan Julia dengan $c = -0.8 - 0.5i$

Berdasarkan gambar tersebut, himpunan Julia dengan nilai $c = -0.8 - 0.5i$ atau $\frac{1}{4} \leq |c| \leq \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ berbentuk kurva terputus-putus.

4. Himpunan Julia dengan nilai $c = -2 + 2i$ dan banyaknya iterasi 5. Karena $\frac{1}{4} \leq |c| \leq \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ maka himpunan Julia berbentuk kurva terputus-putus.

Gambar 8: Himpunan Julia dengan $c = -2 + 2i$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya terkait himpunan Julia , maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Himpunan Julia $J(f)$ yang berasal dari fungsi polinomial f merupakan batas dari himpunan titik $z \in \mathbb{C}$, dimana $f^k(z) \to \infty$.
2. Sifat-sifat yang dimiliki himpunan Julia adalah untuk $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ himpunan Julia berbentuk kurva terputus-putus, untuk $\frac{1}{4} \leq |c| \leq \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) = 2{,}475$ maka himpunan Julia dapat berbentuk kurva terputus-putus atau kurva tertutup tidak sederhana, dan untuk $|c| < \frac{1}{4}$ himpunan Julia berbentuk kurva sederhana.
3. Langkah-langkah dalam mengkonstruksi himpunan Julia adalah ambil fungsi dari himpunan Julia, pilih nilai c yang diinginkan, tentukan banyaknya iterasi yang akan dilakukan, lakukan perhitungan sesuai dengan iterasi yang sudah ditentukan, kemudian visualisasikan. Dalam memvisualisasikan himpunan Julia sangat diperlukan bantuan aplikasi komputer, salah satunya yaitu Matlab, sehingga hasil untuk himpunan Julia dapat dimodelkan dalam bentuk yang menarik.

DAFTAR PUSTAKA

Aiyswaryan, Mithun. 2003. *Julia Set*. https://www.mathwork.com/matlabcentral/fileexchange/3196-julia-sets. html. (25 Juni 2019).

Delorto, Robert. 2013. *Fractal Dimension and Julia Sets*. Thesis. Eastern Washington University: Washington.

Falconer, Kenneth. 2003. *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*. England: John Wiley.

Sari, Sefriani Amelia. 2017. *Analisis Geometri Fraktal pada Tapis dalam Mengeksplorasi Budaya Lampung*. Skripsi tidak diterbitkan, Lampung: Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung.