**JURNAL ILMIAH MAHASISWA**
**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH PONOROGO**

# FAKTORISASI PADA GRAF REGULER

**Joko Prastio, Arta Ekayanti**

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Ponorogo
Email : jokoprastio69@gmail.com[1]; arta_ekayanti@ymail.com[2]

***Abstak***

Penelitian ini bertujuan untuk: (1) mengetahui kriteria suatu graf yang memiliki faktor $k$.(2) mengetahui syarat suatu graf reguler $r$ yang memiliki faktorisasi 1. (3) mengetahui syarat suatu graf reguler $r$ yang memiliki faktorisasi 2. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka dimana dilakukan kajian buku, jurnal ilmiah, dan bahasa pustaka lainnya yang berkaitan dengan faktorisasi pada graf reguler. Penelitian ini dimulai dengan membahas mengenai definisi dan contoh dari graf euler dan multigraf bipartit reguler. Selanjutnya dalam mengkaji syarat suatu graf reguler yang memiliki faktorisasi 1 dan yang memiliki faktorisasi 2, dimulai dengan membahas definisi serta teorema dari *matching* pada graf bipartit, definisi serta contoh dari faktorisasi graf, kemudian membahas pembuktian teorema graf reguler yang memiliki faktor 1 dan graf reguler yang memiliki faktor 2. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa : (1) Graf $G$ dikatakan *factorable* $k$ atau dapat difaktorkan menjadi faktor $k$, jika $E(G)$ dapat didekomposisi atau diuraikan kedalam subgraf merentang $F_i$, dimana setiap $F_i$ memiliki faktor $k$ dan terpisah sisi (*edge*-disjoint) dari $G$, yaitu $E(F_1) \cup E(F_2) \cup \ldots \cup E(F_n) = E(G)$. (2) Syarat suatu graf yang memiliki faktorisasi 1 yaitu, jika graf tersebut adalah multigraf bipartit reguler $r$, dengan $r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$. (3) Syarat suatu graf yang memiliki faktorisasi 2 yaitu, jika graf tersebut adalah graf reguler $2r$, dengan $r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$.

**Kata Kunci:** Graf Bipartit, Faktorisasi, Dekomposisi, Graf reguler.

**How to Cite**. Joko Prastio (2020). Faktorisasi Pada Graf Reguler. Penerbitan Artikel Ilmiah Mahasiswa Universitas Muhammadiyah Ponorogo, 4(1): 75-92

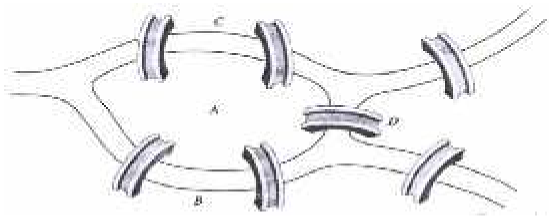


ISSN 2614-1434 (Print)
ISSN 2614-4409 (Online)

## PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu bagian dari ilmu pengetahuan yang bersifat pasti. Matematika memiliki peran penting dalam perkembangan dunia dan selalu berkembang secara kontinu. Menurut Kerami, (2013: 156) matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk, dan lambang-lambang. Sedangkan menurut James, (1992: 262) matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan yang lain. Dalam perkembangannya matematika memiliki banyak cabang. Salah satu cabang matematika yaitu teori graf.

Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Hasanah, 2008: 1).




**Gambar 1. Jembatan Konigberg**

Teori graf dikenalkan pada tahun 1736 melalui tulisan Leonard Euler yang berisi tentang usahanya untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigberg di Eropa. Di tengah kota Konigberg ada sebuah sungai bernama Pregel. Di tengah sungai itu ada dua pulau yang dihubungkan oleh sebuah jembatan. Dua pulau tersebut juga dihubungkan ke tepian-tepiannya. Salah satu pulau dihubungkan oleh dua jembatan dan pulau lainnya dihubungkan oleh 4 jembatan. Sehingga ada 7 jembatan. Permasalahannya adalah apakah mungkin melewati ketujuh jembatan masing-masing satu kali dan kembali ke tempat semula. Masalah tersebut digambarkan kedalam sebuah diagram dengan titik dan sisi yang kemudian berkembang dan dikenal sebagai Graf.

Graf didefinisikan sebagai himpunan pasangan $(V,E)$, dinotasikan $G=(V,E)$, dimana $V$ adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan $E$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik (Munir, 2014: 356). Graf memiliki banyak jenis, salah satunya adalah graf reguler. Graf $G$ adalah graf reguler dengan derajat $r$ jika $d(v) = r$ untuk setiap titik *v* dari $G$. Sehingga graf $G$ disebut reguler $r$ (Chartrand dan Lesniak, 2000: 6). Jadi graf reguler $r$ adalah graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, yaitu $r$.

Salah satu topik bahasan dalam teori graf adalah faktorisasi graf. Faktorisasi dari $G$ adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229). Faktorisasi graf adalah salah satu topik yang menarik untuk dibahas, karena memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang, salah satunya adalah jaringan. Akan tetapi kajian-kajian yang mengkaji masalah faktorisasi graf masih belum banyak dilakukan. Salah satu penelitian mendalam tentang faktorisasi graf pada tahun 2007 dilakukan oleh Akiyama, J. dan Kano, M. " dalam bukunya yang berjudul "*Factors and Factorizations of Graphs*".

Bahasan-bahasan tentang faktorisasi graf juga pernah dilakukan diantaranya adalah "*Faktorisasi pada Graf Komplit*" oleh Vera Mandailina pada tahun 2009, kemudian "*Faktorisasi Graf Baru yang dihasilkan dari Pemetaan Titik Graf Sikel pada Bilangan Bulat Positif*" oleh Nova Nevisa Auliatul Faizah pada tahun 2015 dan "*Faktorisasi Graf Beraturan-r dengan Order Genap*" oleh Asna Bariroh pada tahun 2010 dalam penelitiannya. Beberapa penelitian mengenai faktorisasi graf yang telah ada, pembahasan yang dilakukan berfokus pada simulasi. Disini penulis, bermaksud memberikan pembahasan mengenai faktorisasi graf dengan lebih menekankan pada analisis.

Pada kajian ini, penulis ingin mempelajari lebih lanjut mengenai "*Faktorisasi pada Graf Reguler*".

Tujuan dalam kajian ini adalah untuk (1) mengetahui kriteria suatu graf yang memiliki faktor $k$, (2) mengetahui syarat suatu graf reguler $r$ yang memiliki faktorisasi 1, dan (3) Untuk mengetahui syarat suatu graf reguler $r$ yang memiliki faktorisasi 2.

## METODE

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka dimana dilakukan kajian buku, jurnal ilmiah, dan bahasa pustaka lainnya yang berkaitan dengan faktorisasi pada graf reguler. Penelitian ini dimulai dengan membahas mengenai definisi dan contoh dari graf euler dan multigraf bipartit reguler. Selanjutnya dalam mengkaji syarat suatu graf reguler yang memiliki faktorisasi 1 dan yang memiliki faktorisasi 2, dimulai dengan membahas definisi serta teorema dari *matching* pada graf bipartit, definisi serta contoh dari faktorisasi graf, kemudian membahas pembuktian teorema graf reguler yang memiliki faktor 1 dan graf reguler yang memiliki faktor 2.

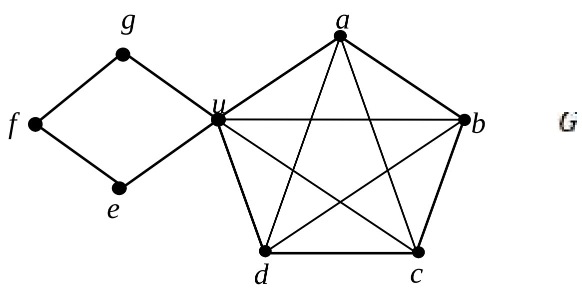
## HASIL DAN PEMBAHASAN

Teori graf dikenalkan oleh Leonard Euler yang berisi tentang usahanya untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigberg di Eropa. Masalah tersebut digambarkan kedalam sebuah diagram dengan titik dan sisi yang kemudian berkembang dan dikenal sebagai Graf. Graf memiliki banyak jenis salah satunya adalah graf euler. Berikut akan dibahas mengenai graf euler.

**Definisi 3.1. Graf Euler**

Diberikan graf $G$. Jika $G$ memuat sirkuit euler, maka $G$ disebut graf euler.

**Contoh 3.1.** Graf $G$ pada Gambar 3.1 adalah Graf *Euler* dengan salah satu sirkuit eulernya adalah $(u, b, c, d, u, e, f, g, u, a, c, u, b, d, a)$.




**Gambar 3.1. $G$ graf euler**

Pada uraian sebelumnya telah dijelaskan bahwa graf yang setiap titiknya tidak berderajat genap, maka maka tidak dapat dilakukan perjalanan berupa sirkuit euler. Teorema berikut akan menunjukan suatu graf yang dapat dilakukan perjalanan berupa sirkuit euler.

**Teorema 3.1.** Graf $G$ adalah graf euler jika dan hanya jika $G$ terhubung dan setiap titiknya berderajat genap.

Sebelum membuktikan teorema tersebut, akan diberikan contoh prosedur yang akan digunakan. Pada contoh gambar 3.1. Pertama dapat diambil salah satu titik pada graf $G$ misalkan titik *a*. Kemudian dapat dibuat suatu lintasan $L$ sepanjang mungkin dengan titik a sebagai titik awal dari lintasan tersebut. Misalkan lintasan $L:(a,b,c,d,u,a,c,u,b,d,a)$. Disini $L$ bukan merupakan sirkuit euler, karena $L$ tidak memuat titik $e,f,g$ dan sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut di $G$. Tetapi, $u$ merupakan titik yang terhubung dengan sisi-sisi yang tidak termuat dalam $L$. Misalkan titik $u$ terletak pada lintasan $L_1$. Jika $L_1$ diperpanjang sepanjang mungkin, maka salah satu pilihan $L_1$ yaitu $L_1$ : ( *u*, *e*, *f*, *g*, *u* ). Terakhir masukkan lintasan $L_1$ ke dalam lintasan $L$ pada titik $u$. Sehingga diperoleh sirkuit euler $S$, dengan

$$S:(a,b,c,u,e,f,g,u,a,c,u,b,d,a).$$

**Bukti:**

**(→)** Akan dibuktikan jika $G$ adalah graf euler maka $G$ terhubung dan setiap titiknya berderajat genap.

Diberikan graf $G$ adalah graf euler. Maka G memuat sirkuit euler $C$. Karena $C$ adalah sirkuit euler, maka $C$ memiliki titik awal dan titik akhir yang sama pada $G$. Setiap dua buah titik sebarang, misalkan titik $u$ dan $v$ pada $G$ pasti akan dihubungkan oleh lintasan. Sehingga setiap titik $u$ dan $v$ pada $G$ terhubung. Karena setiap dua buah titik di $G$ terhubung maka $G$ adalah graf terhubung.

Kemudian akan dibuktikan bahwa setiap titik dari $G$ memiliki derajat genap. Misalkan $U=\{u_1,u_2,\ldots\}$ dan $V=\{v_1,v_2,\ldots\}$ adalah himpunan titik-titik di $G$.

Pertama, perhatikan titik-titik di $U\neq V$. Asumsikan titik awal dan titik akhir dari $C$ terletak pada titik-titik di $V$, sehingga titik-titik di $U$ bukan merupakan titik awal dan titik akhir dari $C$. Karena titik-titik di $U$ bukan titik awal dan juga titik akhir dari $C$ dan setiap sisi di $C$ hanya boleh dilewati satu kali, maka setiap kali sisi masuk ke sebarang titik $u_i$ haruslah melewati suatu sisi dan keluar melewati sisi yang lain. Dengan kata lain, setiap kali $C$ melewati titik $u_i$ maka derajat titik $u_i$ akan bertambah 2. Jadi himpunan titik $U$ berderajat genap.

Selanjutnya untuk kasus titik-titik $V$ yang tidak memuat titik awal dan juga titik akhir dari $C$. Setiap kali masuk ke titik $v_i$ haruslah melewati suatu sisi dan keluar melewati sisi yang lain. Dengan demikian setiap kali $C$ melewati titik $v_i$ maka derajat titik $v_i$ akan bertambah 2. Jadi titik-titik $V$ yang tidak memuat titik akhir dan titik awal berderajat genap.

Terakhir, untuk titik $v$ yang merupakan titik awal dan titik akhir dari $C$, pada saat meninggalkan titik awal $v$ melalui suatu sisi derajatnya bertambah 1 dan saat masuk kembali ke titik akhir $v$ melalui sisi yang lain, derajatnya bertambah 1. Jadi titik $v$ yang merupakan titik awal dan titik akhir berderajat genap. Sehingga semua titik-titik di $U$ dan $V$ pada sirkuit euler $C$ berderajat genap.

Jadi terbukti, jika $G$ adalah graf euler maka $G$ terhubung dan setiap titiknya berderajat genap.

**(←)** Akan dibuktikan jika $G$ adalah graf terhubung dan setiap titiknya berderajat genap maka $G$ adalah graf euler.

Diberikan $G$ graf terhubung dan setiap titiknya berderajat genap. Pilih satu titik, misalkan titik $v$ di $G$ dan kemudian buat suatu lintasan $L$ dengan titik awal $v$. Buat lintasan sepanjang mungkin sampai berakhir pada titik $w$ sehingga sisi-sisi yang terhubung dari titik $v$ sampai dengan titik $w$ telah termuat semua dalam lintasan $L$. Sehingga lintasan $L$ tidak dapat dilanjutkan atau diperpanjang lagi.

Akan ditunjukan bahwa titik $w = v$ dengan menggunakan kontradiksi.

Andaikan titik $w \neq v$. Setiap sisi lintasan $L$ yang masuk dan keluar dari titik *w* akan melalui 2 sisi. Ketika lintasan masuk ke titik $w$ untuk yang terakhir kali, hanya akan melalui 1 sisi. Akibatnya titik $w$ berderajat ganjil. Disisi lain $w$ adalah titik yang berderajat genap karena setiap titik dari graf $G$ berderajat genap, oleh karena itu haruslah ada paling sedikit 1 sisi yang terhubung dengan titik $w$ dan merupakan jalan keluar dari titik $w$. Terjadi kontrakdiksi, haruslah titik $w = v$ dan lintasan $L$ adalah sebuah Sirkuit. Jika $L$ memuat semua titik dan sisi di $G$ maka $G$ adalah graf euler.

Misalkan sirkuit $L$ tidak memuat semua sisi di graf $G$. Karena $G$ adalah graf terhubung, maka paling tidak harus ada minimal 1 titik, misalkan $u$ di sirkuit $L$ yang terhubung dengan sisi-sisi yang tidak termuat dalam sirkuit $L$. Pindahkan titik $u$ dari $G$ sehingga diperoleh subgraf $H$. karena sirkuit $L$ tidak memuat semua sisi di $G$, maka $H$ masih memuat sisi yang bukan merupakan sisi dari $L$.

Karena setiap titik di $G$ berderajat genap, maka setiap titik di $L$ bersisian dengan sisi di $L$ yang jumlahnya genap. Misalkan $H_1$ adalah himpunan titik-titik di $L$ yang bersisian dengan sisi di $L$ yang jumlahnya genap dan $H_1$ adalah komponen dari $H$ yang memuat titik $u$. Jika dibuat sebuah lintasan $L_1$ yang memiliki titik awal $u$ sepanjang mungkin, maka $L_1$ berdasarkan langkah sebelumnya, harus berakhir di titik $u$, yang artinya $L_1$ adalah sebuah Sirkuit. Buat sebuah sirkuit $S_1$ yang memiliki titik awal dan titik akhir $v$, yang memuat sisi lebih banyak daripada sisi di $L$, dengan memasukan sirkuit $L_1$ ke dalam sirkuit $L$ pada titik $u$, dimana $u \in L_1$dan $u \in L$.

Jika $S_1$ memuat semua titik dan sisi di $G$, maka $S_1$ adalah sirkuit euler di $G$. Sehingga $G$ adalah graf euler. Jika $S_1$ tidak memuat semua titik dan sisi di $G$, ulangi langkah pembuktian diatas sehingga diperoleh sirkuit euler di $G$ dan $G$ graf euler.

■

Karena setiap titik di $G$ memiliki derajat genap, maka dijamin $G$ adalah sirkuit euler. Negasi dari pernyataan tersebut adalah “Jika ada titik di $G$ memiliki derajat ganjil, maka $G$ bukan sirkuit euler”. Diawal telah dibahas mengenai masalah jembatan Konigberg yang dinyatakan graf pada Gambar 3.1. Titik A, B, C, dan D berderajat ganjil, sehingga graf tersebut bukan merupakan sirkuit euler.

**Definisi 3.2. Multigraf Bipartit Reguler $r$**

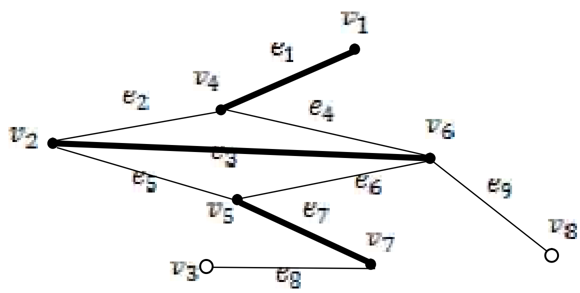
Diberikan suatu multigraf $G$. $B$ adalah Multigraf Bipartit Reguler $r$, jika $V(G)$ dapat di partisi menjadi himpunan titik $(V_1, V_2)$, dimana

$u \in V_1 = V(G)$ dan $v \in V_2 = V(G)$.

Titik-titik di $V_1$dan $V_2$terhubung oleh sisi di $B$ jika dan hanya jika multigraf $G$ memiliki sisi $e = (u, v)$. Selain itu derajat titik $d(v) = d(u) = r$ .

**Definisi 3.3. *Matching***

*Matching* pada graf $G$ adalah himpunan pasangan dari sisi independen di $G$. Dua buah sisi pada graf $G$ dikatakan sisi independen jika tidak memiliki titik-titik ujung yang bukan merupakan titik bersama dan bukan merupakan *loop*. Sehingga $M$ dapat dikatakan *matching* jika paling sedikit ada dua sisi yang tidak saling bersisian di $G$.




**Gambar 3.2. Contoh *Matching***

Pada Gambar 3.2., $M = \{e_1, e_3, e_7\}$ merupakan salah satu *matching* yang dapat dibuat pada graf $G$. Sedangkan $M = \{e_1\}$ bukan merupakan *matching* karena hanya memuat satu sisi di $G$.

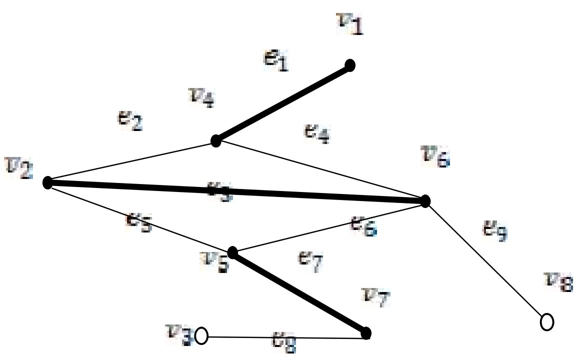
Dalam sebuah graf yang memuat *matching*, akan ada titik yang bersisian dengan sisi pada *matching* dan titik yang tidak bersisian dengan sisi pada *matching.* Berikut akan dijelaskan mengenai titik-titik tersebut.

**Definisi 3.4. Titik *Saturated* dan *Unsaturated***

Diberikan graf $G$. Diketahui $M$ adalah *matching* dari $G$. Suatu titik $v_i$ di $G$ dikatakan *saturated matching* $M$ atau $M$ *saturates* terhadap titik $v_i$ di $G$, jika titik $v_i$ bersisian dengan sebuah sisi dari $M$. Sebaliknya jika tidak ada, maka titik $v_i$ disebut *unsaturated* $M$.

**Definisi 3.5. $M$ *alternating* dan $M$ *augmenting***

Diberikan graf G. Misalkan $M$ adalah *matching* dan $P$ adalah lintasan pada graf $G$. Lintasan $P$ disebut $M$ *alternating* jika sisi-sisi pada $P$ bergantian di $M$ dan di $E(G)\backslash M$. Selanjutnya lintasan $P$ disebut $M$ *augmenting* jika lintasan ini merupakan $M$ *alternating* dan titik awal serta titik akhir dari lintasan $P$ merupakan $M$ *unsaturated*.

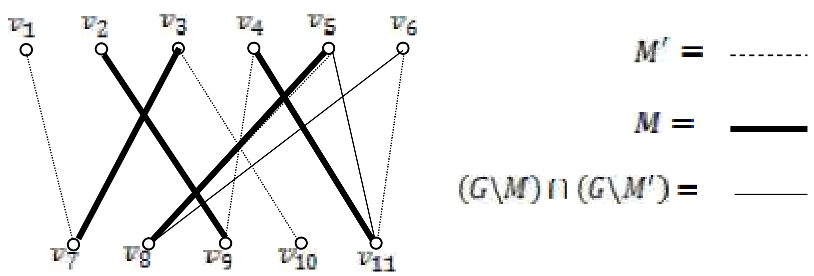



**Gambar 3.3.**
**$M$ *augmenting* dan $M$ *alternating***

Pada Gambar 3.3., merupakan contoh lintasan $M$ *alternating* yaitu $\{v_4, e_2, v_2, e_3, v_6, e_6, v_5, v_5, e_7, v_7\}$. Sedangkan $\{v_8, e_9, v_6, e_3, v_2, e_5, v_5, e_7, v_7, e_8, v_3\}$ merupakan contoh lintasan $M$ *augmenting* karena titik awalnya $v_8$ dan titik akhirnya $v_3$ merupakan titik yang *unsaturated* $M$.

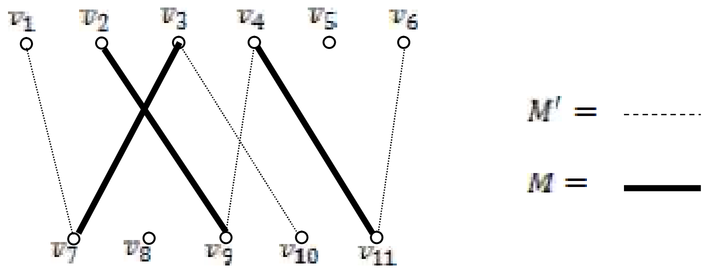
Misalkan $M$ adalah *matching* pada graf $G$, dan terdapat *matching* lain, misal $M'$ dengan $M \Delta M'$ menunjukkan perbedaan simetris $M$ dan $M'$. Diperoleh suatu graf $H = G(M \Delta M')$ yang merupakan graf yang direntang oleh sisi $M \Delta M'$ dengan menghilangkan semua sisi $M \cap M'$ dan sisi $(G\backslash M) \cap (G\backslash M')$.

**Contoh 3.2.** Diberikan graf $G$ yang memuat *matching* $M$ dan *matching* $M'$ seperti pada gambar 3.4. Akan dicari $H = G(M \Delta M')$.



**Gambar 3.4. Graf $G$ dengan *matching* $M$ dan *matching* $M'$**

Sisi yang menghubungkan titik $v_5$ dan titik $v_8$ merupakan anggota-anggota *matching* $M$ sekaligus anggota matching $M'$ dinotasikan $M \cap M'$. Maka, sisi tersebut dihapus. Sisi yang menghubungkan $v_5$ dan titik $v_{11}$ serta sisi yang menghubungkan titik $v_6$ dan titik $v_8$ bukan anggota *matching* $M$ sekaligus $M'$ dinotasikan $(G\backslash M) \cap (G\backslash M')$, oleh karena itu dihapus. Selanjutnya diperoleh $H = G(M\Delta M')$, seperti Gambar 3.5.




**Gambar 3.5. $H = G(M\Delta M')$**

Pada uraian sebelumnya telah dibahas mengenai graf H= $G(M\Delta M')$ yaitu graf yang diperoleh dari sisi $M\Delta M'$ dengan menghilangkan semua sisi $M \cap M'$ dan sisi $(G\backslash M) \cap (G\backslash M')$. Berikut ini diberikan lemma yang berkaitan dengan komponen pada graf $H = G(M\Delta M')$.

**Lemma 3.1.** Diberikan graf $G$. Misalkan $M$ dan $M'$ adalah dua *matching* yang berbeda pada G, $H$= $G(M\Delta M')$, dengan $M\Delta M'$ menunjukan beda simetris dari $M$ dan $M'$. Setiap komponen dari $H$ pasti berkaitan salah satu dari ketiga bentuk berikut.

1. Titik terasing
2. Siklus $(M,M')$ *alternating* dengan *orde* genap.
3. Lintasan $(M,M')$ *alternating.*

**Bukti**: Misalkan $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf $G$ dengan $M$ dan $M'$ adalah dua *matching* yang berbeda, maka akan terdapat tiga kasus:

1. Titik yang bersisian dengan sisi $M \cap M'$ atau sisi $(G\backslash M) \cap (G\backslash M')$ akan tetapi tidak bersisian dengan *matching M* maupun $M'$, maka pada graf $H$ titik tersebut adalah titik terasing.
2. Andaikan $K$ adalah komponen dari $H$, Dalam hal ini setiap titik pada $K$ meiliki derajat $\geq 1$ dan $\leq 2$ dinotasikan $1 \leq \Delta(K) \leq 2$. Jika setiap titik di $K$ memiliki derajat 2, maka masing-masing titiknya bersisian dengan satu sisi pada *M* dan satu sisi pada $M'$. Artinya setiap titiknya

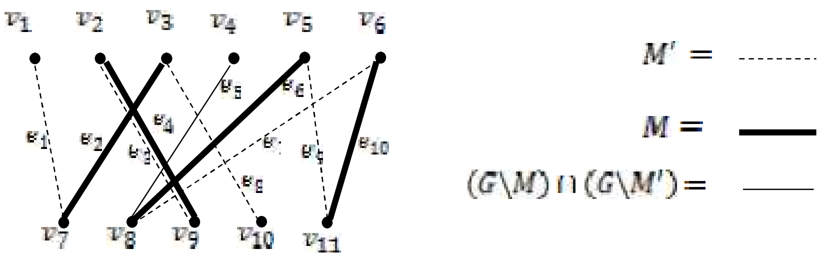
bersisian dengan 2 sisi yang berbeda. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $K$ yang setiap titiknya berderajat 2 adalah siklus $(M, M')$ *alternating* dengan *order* genap.

3. Ada $x \in V(K)$ sedemikian hingga $d(x) = 1$, maka terdapat paling sedikit satu titik misalkan saja y, dengan derajat satu selain titik $x$. Ketika setiap titik pada $K$ memiliki derajat $\leq 2$ dinotasikan $\Delta(K) \leq 2$. $K$ adalah lintasan yang menghubungkan $x$ dan $y$. Titik-titik internalnya merupakan titik berderajat dua. Maka $K$ adalah lintasan $(M, M')$ *alternating.* ■

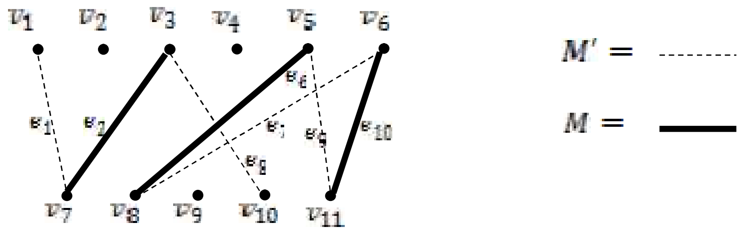
Berikut diberikan contoh ilustrasi dari pembuktian lemma 3.1. Ilustrasi yang pertama yaitu komponen dari $H$ yang memuat titik terasing. Pada gambar 3.6. diberikan graf $G$ dengan $M$ dan $M'$ adalah dua *matching* yang berbeda. Titik $v_9$ dan $v_2$ bersisian dengan sisi $M \cap M'$ yaitu $e_3$ dan $e_4$. Maka kedua sisi tersebut dihapus. Titik $v_4$ dan titik $v_8$ bersisian dengan sisi $(G \backslash M) \cap (G \backslash M')$ yaitu $e_5$. Sehingga sisi $e_5$ dihapus. Selanjutnya diperoleh $H = G(M \Delta M')$, seperti gambar 3.7. Titik $v_9$ dan $v_2$ adalah titik terasing begitu juga dengan titik $v_4$ pada graf $H = G(M \Delta M')$. Titik $v_8$ bukan merupakan titik terasing sebab bersisian dengan *matching* $M$ dan $M'$.

Selanjutnya ilustrasi untuk komponen dari $H$ yang memuat siklus $(M, M')$ *alternating* dengan *orde* genap. Pada gambar 3.7. titik $v_8$, $v_5$, $v_{11}$ dan $v_6$ adalah titik memiliki derajat 2 dan masing-masing titik bersisian dengan satu sisi pada $M$ dan satu sisi pada $M'$. Sehingga $v_8, e_6, v_5, e_9, v_{11}, e_{10}, v_6, e_7, v_8$ adalah siklus $(M, M')$ *alternating* dengan *orde* genap.

Kemudian ilustrasi untuk komponen dari $H$ yang memuat lintasan $(M, M')$ *alternating.* Misalkan $x = v_1$ sedemikian hingga $d(x) = 1$, maka terdapat paling sedikit titik lain yaitu $y$ dimana $d(y) = 1$. Pada gambar 3.7. titik $v_{10} = y$ yang memiliki derajat 1. Terdapat lintasan yang menghubungkan $x$ dan $y$ yaitu $v_1 = x, e_1, v_7, e_2, v_3, e_8, v_{10} = y$ yang merupakan lintasan $(M, M')$ *alternating.*




**Gambar 3.6. Contoh graf $G$ dengan matching $M$ dan matching $M'$**




**Gambar 3.7.** $H = G(M\Delta M')$ **dari graf** $G$

Pada uraian sebelumnya telah dijelaskan mengenai *matching* maksimum. Berikut ini diberikan teorema yang berkaitan dengan *matching* maksimum.

**Teorema 3.2. (Teorema Berge)**

Diberikan graf $G$. *Matching* $M$ pada graf $G$ adalah *matching* maksimum jika dan hanya jika $G$ tidak memuat lintasan $M$ *augmenting*.

**Bukti**:

$(\rightarrow)$ Diketahui *matching* $M$ pada graf $G$ adalah *matching* maksimum, akan dibuktikan bahwa $G$ tidak memuat lintasan $M$ *augmenting*.

Akan dibuktikan menggunakan kontradiksi. Misalkan $M$ adalah *matching* maksimum pada graf $G$ dan terdapat lintasan $M$ *augmenting* $P$. Dalam hal ini, $P$ haruslah memiliki jumlah sisi yang ganjil, karena agar suatu lintasan $P$ merupakan lintasan $M$ *augmenting*, setiap satu sisi yang merupakan *matching* $M$ harus bertetangga dengan dua sisi lainnya yang bukan *matching* $(E(G)\backslash M)$. Untuk lebih jelasnya, misalkan lintasan $M$ *augmenting* $P$ melalui titik $v_0v_1v_2 \ldots v_{k-1}v_k$. Diperhatikan bahwa $k$ banyaknya sisi yang berjumlah ganjil, karena $v_0$ dan $v_k$ *unsaturated* $M$, artinya $v_0v_1$ dan $v_{k-1}$ $v_k$ bukanlah anggota *matching* $M$ diperoleh $M = \{v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{k-2}v_{k-1}\}$. Selanjutnya definisikan himpunan sisi $M' \subseteq E(G)$ dengan $M' = \{v_0v_1, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k$ }. Terlihat bahwa $M'$ adalah $E(G)\backslash M$. Karena setiap sisi $M$ bertetangga dengan $E(G)\backslash M$ atau $M'$, maka haruslah sisi $M'$ lebih banyak dari sisi $M$ atau $|M'| \geq |M|$. $M'$ merupakan *matching* pada graf $G$ dimana $|M'| \geq |M|$ karena $P$ merupakan lintasan $M$ *augmenting*, maka kontradiksi dengan $M$ adalah *matching* maksimum. Dengan kata lain, jika $M$ adalah *matching* maksimum pada graf $G$, maka $G$ tidak mungkin memiliki lintasan $M$ *augmenting*.

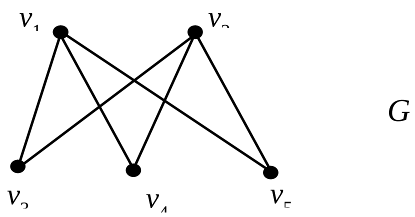
$(\leftarrow)$ Akan dibuktikan jika graf $G$ tidak mengandung lintasan $M$ *augmenting* maka *matching* $M$ pada $G$ adalah *matching* maksimum.

Akan dibuktikan menggunakan kontraposisi. Andai $M$ bukan *matching* maksimum dan ada *matching* lain $M'$ dimana $M'$ adalah *matching* maksimum di $G$. Akibatnya $|M'| \geq |M|$. Definisikan $H = G(M \Delta M')$ dengan $M \Delta M'$ menunjukan beda simetri di $M$ dan $M'$. Berdasarkan Lemma 3.1., diperoleh setiap titik di $H$ berderajat 1 atau 2, karena setiap titik di $H$ bersisian dengan paling banyak satu sisi di $M$ dan satu sisi di $M'$. Dengan demikian, komponen $H$ adalah lintasan *alternating* katakan $P$ di $M$ dan $M'$ atau siklus dengan banyak sisinya adalah genap. Karena $|M'| \geq |M|$ akibatnya $H$ mempunyai lebih banyak sisi $M'$ dibandingkan sisi $M$. Sehingga lintasan $P$ di $H$, sisi awal dan sisi akhirnya adalah anggota dari $M'$. Dengan kata lain titik awal serta titik akhir dari lintasan $P$ merupakan $M$ *unsaturated*. Maka lintasan $P$ adalah lintasan $M$ *augmenting*.

Diperoleh pernyataan, jika $M$ bukan *matching* maksimum di $G$ maka mengandung lintasan $M$ *augmenting*. Pernyataan ini ekuivalen dengan jika $G$ tidak mengandung lintasan $M$ *augmenting*, maka $M$ adalah *matching* maksimum di $G$.

■

Sebelum membahas lebih jauh mengenai *matching* pada graf bipartit, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai himpunan persekitaran. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, dengan $V$ adalah himpunan titik pada $G$ dan $E$ adalah himpunan sisi pada $G$. Selanjutnya $S$ adalah subset dari $V(G)$. Himpunan persekitaran dari $S$ adalah himpunan semua titik yang bertetangga dengan titik-titik di $S$. Himpunan persekitaran $S$ dinotasikan dengan $N_G(S)$, lebih lanjut $|N_G(S)|$ adalah banyaknya titik yang ada pada himpunan persekitaran $S$. Untuk lebih jelasnya, pada gambar 3.8. misalkan $S = \{v_1, v_2\}$ subset dari $V(G)$. Himpunan persekitaran $S$ atau $N_G(S) = \{v_3, v_4, v_5\}$ karena titik $v_3, v_4$ dan $v_5$ bertetangga dengan titik $v_1$ dan juga bertetangga dengan titik $v_2$.




**Gambar 3.8. Graf $G$**

Banyaknya titik pada himpunan persekitaran tergantung pada banyaknya titik yang bertetangga dengan himpunan titik awalnya. Pada multigraf bipartit yang *saturated* di setiap titik pada salah satu partisi , banyaknya titik himpunan persekitaran akan lebih besar atau sama dengan banyaknya titik pada himpunan awalnya, yaitu himpunan titik yang *saturated*, seperti pada teorema berikut.

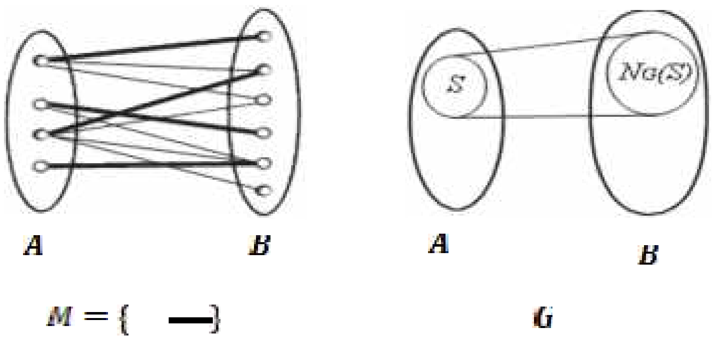
**Teorema 3.3. (Teorema Marriage)**

Diberikan graf $G$. Misalkan $G$ adalah multigraf bipartit dengan partisi $(A, B)$. Graf

$G$ memuat *matching* yang *saturated* $A$ jika dan hanya jika $|N_G(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq A$.

**Bukti**: $(\rightarrow)$ Akan dibuktikan jika $G$ adalah multigraf bipartit dengan $(A,B)$, dan $G$ memuat $matching\ M$ yang *saturated* $A$ maka $|N_G(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq A$.

Diketahui $G$ memuat *matching* $M$ yang *saturated* pada setiap titik di $A$ dan $S$ dimana $S$ adalah subset dari $A$. Karena setiap titik pada $S$ *saturated* $M$ dan setiap titik pada $S$ terhubung dengan titik yang berbeda pada $N_G(S)$, maka diperoleh $|N_G(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq A$.




**Gambar 3.9. Himpunan S dan himpunan persekitaran S**

$(\leftarrow)$ Akan dibuktikan jika $G$ memenuhi $|N_G(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq A$ maka $G$ adalah multigraf bipartit dengan partisi $(A,B)$, dan $G$ mengandung $matching\ M$ yang *saturated* $A$.

Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Andai $G$ adalah multigraf bipartit yang memenuhi $|N_G(S)| \geq |S|,\ \forall S \subseteq A$, akan tetapi $G$ tidak memiliki *matching* $M$ yang *saturated* pada setiap titik di $A$. Misalkan $M'$ adalah *matching* maksimum pada $G$, maka akan terdapat titik $u$ di $A$ yang merupakan *unsaturated* $M'$.

Selanjutnya didefinisikan himpunan titik di $G$ dengan $Z = \{v \in V(G)$: terdapat lintasan $M'\ alternating$ dari $u$ ke $v\}$, artinya $Z$ adalah himpunan semua titik yang terhubung ke $u$ oleh lintasan $M'\ alternating$. Karena $M'$ adalah *matching* maksimum dan $u$ *unsaturated* $M'$, berdasarkan teorema 3.2. diperoleh $u$ adalah satu-satunya titik yang *unsaturated* $M'$ pada $Z$.

Misalkan $S = Z \cap A$ dan $T = Z \cap B$, maka diperoleh titik pada $S \backslash \{u\}$ *saturated* $M'$ dengan titik pada $T$. Sehingga $|T| = |S| - 1$ dimana $T$ adalah himpunan bagian dari $N_G(S)$. Lebih tepatnya $N_G(S) = T$ karena setiap titik di $N_G(S)$ terhubung ke $u$ oleh lintasan $M'\ alternating$. Akan tetapi

$|T| = |S| - 1$ disisi lain $N_G(S) = T$, jadi diperoleh $|N_G(S)| = |S| - 1 < |S|$ hal ini kontradiksi dengan pernyataan $|N_G(S)| \geq |S|$. Haruslah $G$ memiliki *matching* yang *saturated* pada setiap titik di $A$.

■

Tiba pada topik utama pada penelitian ini yaitu faktorisasi graf reguler. Sebelum itu akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai faktor, faktor reguler $k$, *factorable* $k$ dan faktorisasi $k$.

**Definisi 3.6. Faktor**

Misalkan $G$ suatu graf. Faktor dari graf $G$ adalah suatu subgraf merentang dari $G$ . Jika $F_1, F_2, \ldots, F_n$ adalah faktor yang terpisah sisi (*edge-disjoint*) dari graf $G$ sedemikian sehingga

$$E(F_1) \cup E(F_2) \cup \ldots \cup E(F_n) = E(G),$$

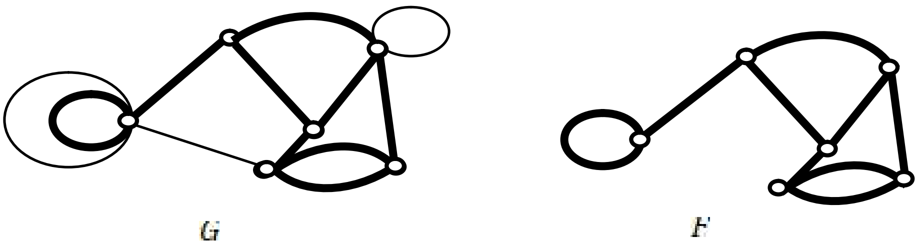
maka $G$ dikatakan *factorable*. Dinyatakan $G = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Pada uraian sebelumnya telah dibahas mengenai faktor dari suatu graf. Lebih khusus, berikut akan dijelaskan faktor dari suatu graf dimana setiap faktornya memiliki derajat yang sama misal $k$ atau bisa dikatakan faktor reguler $k$. Berikut adalah definisi dan contoh dari faktor reguler $k$.

**Definisi 3.7. Faktor reguler *k***

Untuk setiap $k$ bilangan bulat positif, subgraf merentang reguler dimana setiap titik-titiknya memiliki derajat $k$ disebut faktor reguler $k$ atau faktor $k$.

**Contoh 3.3.** Pada Gambar 3.10., $F$ adalah subgraf merentang dari graf $G$ (garis tebal) yang setiap titiknya berderajat 3 atau dapat dikatakan bahwa graf $G$ memiliki faktor 3.




**Gambar 3.10. Graf $G$ dengan faktor 3**

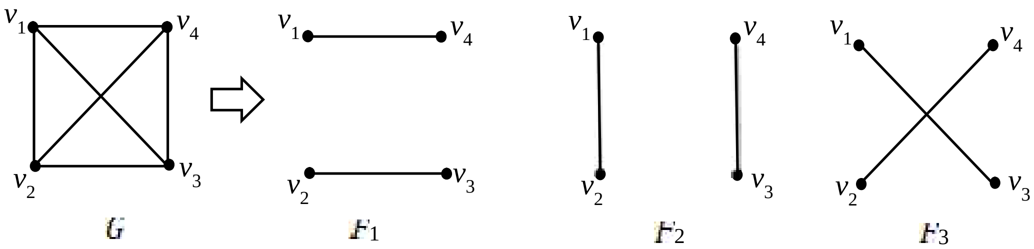
Selanjutnya akan dijelaskan mengenai faktorisasi graf yang merupakan penjumlahan dari sisi dari faktor-faktornya.

**Definisi 3.8. Faktorisasi Graf**

Faktorisasi dari graf $G$ adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $G$.

Faktor reguler $k$ dari graf $G$ dinyatakan sebagai faktor $k$ dari graf $G$. Oleh sebab itu graf $G$ memiliki faktor 1 jika dan hanya jika memuat *matching* sempurna. Jika graf $G$ memiliki faktorisasi dengan demikian setiap $F_i$ adalah faktor $k$, maka graf $G$ memerlukan reguler $r$ dengan $r$ adalah kelipatan dari $k$.

**Contoh 3.4.** Pada Gambar 3.11., diberikan graf $G$. Faktor-faktor dari graf $G$ adalah $F_1$, $F_2$, dan $F_3$, sebab $F_1$, $F_2$, dan $F_3$ adalah subgraf merentang dari graf $G$. Diperhatikan, setiap faktor $F_i$ dari $G$ adalah faktor 1. Karena $G$ graf regular dengan derajat setiap titiknya 3, maka $G$ perlu regular 3 yang merupakan kelipatan dari 1. Graf $G$ memiliki faktor 1 karena $G$ memuat *matching* sempurna yang ditunjukan oleh faktor-faktornya. Faktorisasi dari graf $G$ adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya dapat ditulis $G = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.




**Gambar 3.11. Faktor $F_i$ dari graf G dengan $i = 1, 2, 3$**

Sebelumnya telah disinggung mengenai *factorable* dan faktorisasi graf. Berikut akan dijelaskan mengenai faktorisasi graf $G$ yang setiap faktornya memiliki derajat sama misalkan $k$, sehigga $G$ factorable $k$ dan memiliki faktorisasi k. Berikut penjelasannya.

**Definisi 3.9.** ***Factorable* $k$ dan Faktorisasi $k$**

Diberikan graf $G$. Jika $F_1, F_2, \ldots, F_n$ adalah faktor $k$ yang terpisah sisi (*edge-disjoint*) dari graf $G$ sedemikian sehingga

$$E(F_1) \cup E(F_2) \cup \ldots \cup E(F_n) = E(G),$$

Maka $G$ dikatakan *factorable* $k$. Dekomposisi dari graf G disebut faktorisasi $k$ dari $G$.

Pada penjelasan sebelumnya, dikatakan *factorable* $k$ jika setiap faktornya memiliki derajat $k$. Berikut akan dibahas sebuah teorema yaitu graf reguler yang memiliki faktor 1 atau dapat dikatakan *factorable* 1.

**Teorema 3.4.** Setiap multigraf bipartit reguler adalah *factorable* 1. Selanjutnya multigraf tersebut akan memiliki faktor 1.

**Bukti.**

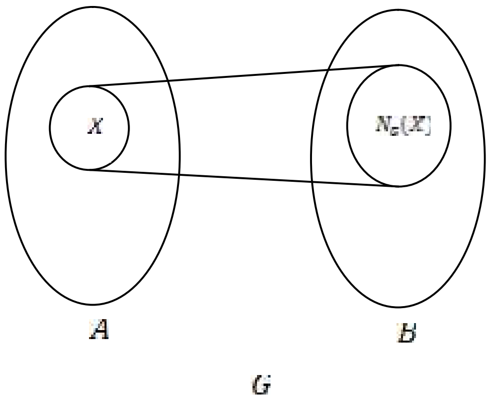
Misalkan $G$ adalah multigraf bipartit reguler $r$ dengan partisi $(A, B)$. Karena $G$ adalah multigraf bipartit reguler dengan setiap titik berderajat *r*, maka setiap titik di $A$ berderajat *r* dan setiap titik di $B$ juga berderajat *r*. Berdasarkan jumlah sisi dari multigraf bipartit reguler, maka diperoleh

$$r|A| = |E(A,B)| = r|B|$$

Sehingga

$$r|A| = r|B|$$

$$|A| = |B|$$




**Gambar 3.12. Himpunan $X$ dan $N_G(X)$(Himpunan persekitaran $X$)**

Untuk setiap $X \subseteq A$, diperoleh

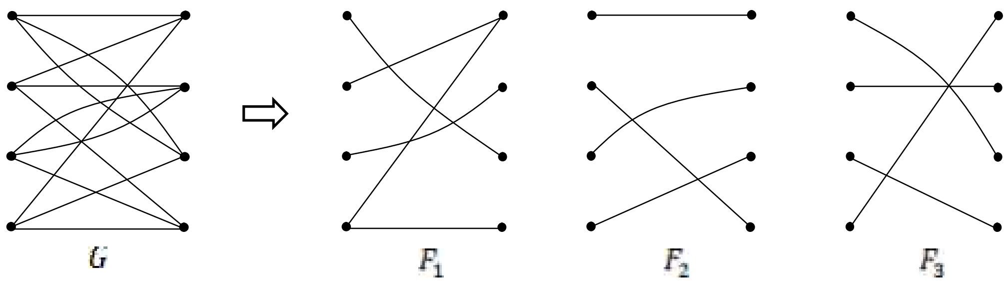
$$r|X| = |E(X, N_G(X)| \leq r|N_G(X)|$$

Jadi

$$r|X| \leq r|N_G(X)|$$

Berdasarkan teorema 3.3., $G$ memiliki *matching* $M$ yang *saturated* $A$. Karena $|A| = |B|$, maka $M$ juga *saturated* $B$. Jadi terbukti $M$ adalah *matching* sempurna atau faktor 1 dari $G$.■

**Contoh 3.5.** Pada Gambar 3.13, $G$ adalah multigraf bipartit reguler 3. $G$ *factorable* 1, karena $E(G) = E(F_1) \cup E(F_2) \cup E(F_3)$. Selanjutnya $F_1$, $F_2$, dan $F_3$ memiliki faktor 1.




**Gambar 3.13. $G$ Multigraf bipartit reguler $r$, dengan $r = 3$ dan memiliki faktorisasi 1**

Misalkan $G$ adalah *factorable* 1, maka

$$E(G) = E(F_1) \cup E(F_2) \cup \ldots \cup E(F_n),$$

$F_i$ memiliki faktor 1, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.

Sampai pada teorema terakhir dalam penelitian ini, yaitu graf reguler yang memiliki faktor 2 atau *factorable* 2.

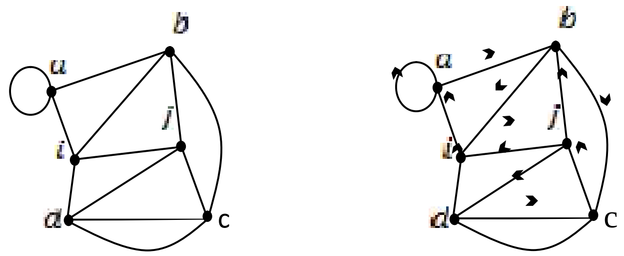
**Teorema 3.4.2.** Untuk sebarang bilangan bulat $r \geq 1$, setiap graf reguler $2r$ adalah *faktorable* 2. Selanjutnya untuk setiap $k$ bilangan bulat dengan $1 \leq k \leq r$, setiap graf reguler $2r$ memiliki faktor reguler $2k$.

**Bukti:**

Misalkan $G$ adalah graf reguler $2r$. Akan dibuktikan bahwa $G$ *faktorable* 2 dengan induksi di $r$, yaitu dibuktikan benar untuk $r = 1$, diasumsikan benar untuk $r = k - 1$, dan kemudian dibuktikan benar untuk $r = k$.

Untuk $r = 1$, karena $G$ graf reguler $2r$, maka $G$ adalah graf reguler 2 yaitu setiap titik $v$ pada graf $G$ berderajat 2. Graf $G$ memuat subgraf merentang reguler berderajat 2 yaitu graf $G$ itu sendiri, sehingga graf G memiliki faktor 2. Selanjutnya diasumsikan benar untuk $r = k - 1$, sehingga G adalah graf reguler dengan derajat $2(k - 1)$ memiliki faktor 2. Kemudian akan ditunjukan benar untuk $r = k$, sehingga graf G reguler dengan derajat $2k$ memiliki faktor 2 dan faktorabel 2.

Diasumsikan $r \geq 2$ dan $G$ adalah graf terhubung. Karena $G$ terhubung dan setiap titiknya memiliki derajat genap, berdasarkan teorema 3.1., maka $G$ memuat sirkuit euler. Misalkan $C$ adalah sirkuit euler dari graf $G$ dan $C$ adalah graf *traversable*, atau dapat dikatakan $C$ dapat ditelusuri. Sehingga dapat diketahui bahwa sirkuit euler $C$ memiliki arah. Dengan demikian didapatkan orientasi arah dari graf $G$.




**Gambar 3.14. Graf G dan $\vec{G}$**

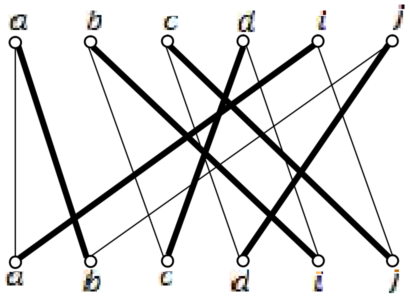
Dengan kata lain, $G$ adalah graf dengan derajat titik $v$ yaitu jumlah dari derajat masuk dan derajat keluar,

$$d(v) = d\,in(v) + d\,out(v),$$

lebih lanjut, graf berarah $G$ dinotasikan dengan $\vec{G}$

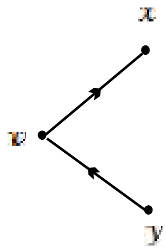
Selanjutnya buat multigraf bipartit $B$ reguler $r$ dengan partisi himpunan titik $(X, Y)$ dimana $x \in X = V(G)$ dan $y \in Y = V(G)$

$X$ dan $Y$ akan terhubung oleh sisi-sisi di $B$ jika dan hanya jika $G$ memiliki sisi berarah $(xy)$.




**Gambar 3.15. Multigraf Bipartit B**

Berdasarkan teorema 3.4. multigraf bipartit $B$ dapat didekomposisi menjadi $r$ faktor , yaitu $H_1$,$H_2$, …, $H_r$. Untuk setiap $H_i$, diperoleh subgraf merentang $F_i = (V(G), H_i)$ dari $G$, dengan memperhatikan setiap sisi dari $H_i$ juga merupakan sisi dari $G$. Karena setiap titik $v$ dari graf $\vec{G}$ maka $H_i$ memiliki 2 sisi berarah yaitu $(vx)$ dan $(yv)$ (sisi keluar dan sisi kedalam).




**Gambar 3.16. Titik $v$ dengan $vx$ adalah sisi keluar dan $yv$ adalah sisi masuk**

Disisi lain $x$ dan $y$ adalah titik dari $G$ juga. Karena $H_i$ memiliki 2 sisi berarah dan $F_i = (V(G), H_i)$ maka $Fi$ juga graf reguler dengan derajat 2 dan faktor 2. Jadi $G - F$ adalah graf reguler dengan derajat $2r$, dengan $r = k - 1$. Karena $G$ memiliki faktor 2 maka $G - F$ juga memiliki faktor 2 dan *factorable* 2, dengan kata lain $G$ dapat didekomposisi menjadi faktor $F_i$ yang memiliki faktor 2. ■

**SIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan peneliti tentang faktorisasi pada graf reguler, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf $G$ dikatakan *factorable* $k$ atau dapat difaktorkan menjadi faktor $k$, jika $E(G)$ dapat didekomposisi atau diuraikan kedalam subgraf merentang $F_i$, dimana setiap $F_i$ memiliki faktor $k$ dan terpisah sisi (*edge*-disjoint) dari $G$, yaitu $E(F_1) \cup E(F_2) \cup \ldots \cup E(F_n) = E(G)$.
2. Syarat suatu graf yang memiliki faktorisasi 1 yaitu, jika graf tersebut adalah multigraf bipartit reguler $r$, dengan $r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$.
3. Syarat suatu graf yang memiliki faktorisasi 2 yaitu, jika graf tersebut adalah graf reguler $2r$, dengan $r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$.

## DAFTAR PUSTAKA

Akiyama, J. dan Kano, M. 2007. *Factors and Factorizations of Graph*. Diambil pada tanggal 13 maret 2019, dari http://gorogoro.cis.ibaraki.ac.jp/web/papers/FactorGraphVer1A4.pdf.

Chartrand, G. dan Leniak, L. 2000. *Graphs & Digraphs (3$^{th}$ ed).* California: Chapman and Hall.

Chartrand, G. dan Leniak, L. 1986. *Graphs & Digraphs* . California: a Division of Wadsworth, Inc.

Hasanah, S. 2008. *Digraf dari Tabel Cayley Grup Dihedral*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Program Sarjana UIN Malang.

James, Robert C. 1992. *Mathematics Dictionary*. New York: Chapman and Hall.

Kerami, D. dan Sitanggang, C. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Munir, R. 2014. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.