KENDALI OPTIMAL PADA MASALAH INVENTORI YANG MENGALAMI PENINGKATAN

Pardi Affandi[1], Faisal[1], Yuni Yulida[1]

Abstrak: Banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem dan teori kontrol serta aplikasinya. Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol ke dalam masalah inventori. Masalah klasik dalam masalah inventori adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Selain mengalami penurunan ternyata inventori juga bisa mengalami peningkatan, biasanya inventori yang mengalami peningkatan adalah terjadi pada inventori dikarenakan adanya proses produksi yang berlangsung secara terus menerus sedangkan permintaan sedikit. Pada saat proses produksi berlangsung secara terus menerus menyebabkan bertambahnya jumlah inventori. Hal ini mengakibatkan terjadinya peningkatan jumlah inventori. Masalah ini salah satunya dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan menggunakan teknik kontrol optimal

Kata Kunci: peningkatan inventori, kontrol optimal.

PENDAHULUAN

Masalah inventori termasuk salah satu masalah yang berkembang secara pesat. Selain mengalami penurunan ternyata inventori juga bisa mengalami peningkatan, biasanya inventori yang mengalami peningkatan terjadi pada inventori akibat adanya proses produksi yang berlangsung secara terus menerus. Pada saat proses produksi berlangsung secara terus menerus menyebabkan bertambahnya jumlah inventori. Hal ini mengakibatkan terjadinya peningkatan jumlah inventori. Dalam penelitian ini dibahas model matematika dari masalah inventori yang mengalami peningkatan serta bagaimana menyelesaikan bentuk model inventori tersebut menggunakan teknik optimal kontrol.

Pembentukan Model

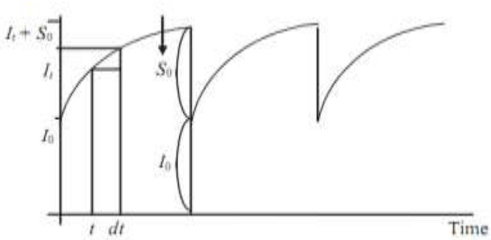
Model ini didasarkan pada sistem Inventori produk barang pada saat terjadi peningkatan inventori. Peningkatan inventori disebabkan karena adanya inventori awal dan kemudian adanya penambahan inventori, sedangkan permintaan terhadap inventori masih belum ada. Panjang perencaannya dinyatakan dengan T dengan asumsi, fase waktu dari 0 hingga T tingkat inventorinya semakin meningkat. Perlu dicatat bahwa waktu dibutuhkan cara untuk menentukan nilainya. Berikut ini

[1]Program Studi Matematika, FMIPA UNLAM
e-mail: pardi_affandi@yahoo.com

notasi yang digunakan untuk menggambarkan sistem dinamik dari inventori yang ada:

I(t) = tingkat fungsi Inventori
P(t) = nilai produksi rata-rata fungsi
I_0 = tingkat nilai awal inventori
m(t) = Rata-rata fungsi kenaikan

Juga diketahui tingkat inventori berkembang dari waktu ke waktu berdasarkan persamaan *state*nya. Fungsi m(t) yaitu rata-rata fungsi kenaikan dikarenakan adanya tingkat produksi maka Inventori akan semakin bertambah.



Gambar 1. Grafik fungsi kenaikan m(t)

Inventori semakin meningkat seiring semakin bertambahnya produksi, ketersediaan Inventori awal dan rata-rata fungsi kenaikan meskipun adanya demand atau permintaan tapi masih dalam tingkat yang rendah sehingga diperoleh persamaan 1.

$$\hat{I} = P(t) + m(t) + I_0(t) \quad t \in [0,T] \quad (1)$$

Untuk menjamin tingkat inventori bertambah dari waktu 0 hingga T maka lebih lanjut memenuhi syarat persamaan 2.

$$P(t) + m(t) + I_0(t) > 0 \quad t \in [0,T] \quad (2)$$

Untuk membangun harga fungsi objektif, maka diasumsikan bahwa tingkat inventori tujuan dan rata-rata produksi tujuan berupa himpunan dan akhirnya mendatangkan selisih dari tujuan. Untuk dapat menuliskan fungsi tujuan secara eksplisit dikenalkan beberapa notasi tambahan berikut ini, yaitu $\hat{P}$ = tingkat produksi tujuan, $\hat{I}$ = tingkat inventori tujuan, h = koefisien biaya penyimpanan, k = koefisien biaya produksi dan λ = konstanta *nonnegative* biaya diskon. Untuk memberikan kenaikan hasil indeks maka kita minimumkan

$$\min_{p\geq 0}\left\{J = \int_0^T \left(\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2 dt\right)\right\} \quad (3)$$

Persamaan (1) hingga (3) merupakan batasan nonnegatif,

$$P(t) \geq 0 \quad t \in [0,T] \quad (4)$$

PEMBAHASAN

Dalam model pencampuran konstrain dari pertidaksamaan melibatkan kedua kontrol dan *variable state*. Kemudian menggunakan *maximum principle* untuk solusi masalah, dengan menggunakan fungsi yang kontinu dan kontinu sepotong-sepotong diketahui λ differensiabel, fungsi μ juga merupakan fungsi kontinu dan kontinu sepotong-

sepotong. Fungsi Hamiltonian didefenisikan oleh:

$$H = -\left(\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right) + \lambda g \quad (5)$$

dimana

$$g = P + mI \qquad t \in [0,T] \qquad (6)$$

dan fungsi Lagrangenya adalah

$$L = -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + (\lambda+\mu)g;\ \ t \in [0,T] \qquad (7)$$

Syarat perlu untuk kondisi optimal diberikan dengan

$H_p = 0$ (8)

$L_I = -\lambda$ (9)

$L_p = 0$ (10)

$\mu \geq 0\,, \mu g\ \geq 0$ (11)

Kondisi ini bergantung pada dua differensial yang bergantung pada keadaan $t \in [0,T]$. Jika ditinjau kasus keadaan$t \in [0,\mathrm{T}]$, maka diperoleh sebagai berikut:

Pada kasus kondisi (pers.8) akan diperoleh

$$H = -\left(\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right) + \lambda(P+VI);\quad t \in [0,T] \qquad (12)$$

$H_p = 0$ dan diperoleh

$$-k\left(P-\hat{P}\right) + \lambda\ = 0\ ; \quad \frac{\lambda}{k}\ = \left(P-\hat{P}\right)$$

$$P\ = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} \qquad (13)$$

Kondisi (pers. 9) ekivalen dengan $L_I = -\dot{\lambda}$, berarti

$$L = -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(I-\hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P-\hat{P}\right)^2\right] + (\lambda+\mu)(P+mI) \qquad t \in [0,T] \qquad (14)$$

Maka

$$-\dot{\lambda} = -h\left(I-\hat{I}\right) + m(\lambda+\mu)$$

$$\dot{\lambda} =\ h\left(I-\hat{I}\right) - V(\lambda+\mu) \qquad (15)$$

Kondisi (10) adalah ekivalen dengan $L_p = 0$ berarti

$-k\left(P-\hat{P}\right) + (\lambda+\mu) = 0$ maka

$$(\lambda+\mu) = k\left(P-\hat{P}\right) \qquad (16)$$

Kondisi (11) dengan (3) diimplikasikan $\mu = 0$. Karena itu (13) dan (1) ketika $t \in [0,t_1]$ menghasilkan

$$\mu \geq 0\,, \mu g\ \geq 0$$

Dari bentuk (1) pada saat $t \in [0,T]$

$$\dot{I} = P + m + I \qquad t \in [0,T]$$

dari persamaan (13)

$$P\ = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$$

Sehingga akan diperoleh

$$\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + mI \qquad (17)$$

Dengan mengkombinasikan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + m + I$ (17) dan $\dot{\lambda} =\ h\left(I-\hat{I}\right) - m(\lambda+\mu)$ (15) diperoleh sebagai berikut:

Dengan menurunkan (17) diperoleh

$$\ddot{I} = \frac{\dot{\lambda}}{k} + \dot{\hat{P}} + \dot{m}I + m\dot{I}$$

serta mensubsitusi nilai–nilai persamaan di atas

$$\dot{\lambda} =\ h\left(I-\hat{I}\right) - m(\lambda+\mu)$$

dan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + mI$

$$\ddot{I} = \frac{h(I-\hat{I}) - m(\lambda+\mu)}{k} + \dot{\hat{P}} + \dot{m}I + m\left(\frac{\lambda}{k} + \hat{P} + mI\right) \qquad (18)$$

dan dari $(\lambda+\mu) = k\left(P-\hat{P}\right)$, pers. (18) menjadi:

$$\ddot{I} - \frac{h}{k}I - m^2 I - \dot{m}I = -\frac{h}{k}\hat{I} - mP + m\hat{P} + \dot{\hat{P}} + m\frac{\lambda}{k} + m\hat{P}\ ) \qquad (19)$$

Dengan menggunakan $P\ = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$ atau $\frac{\lambda}{k} = P - \hat{P}$ ke persamaan 19

$\ddot{I} - \frac{h}{k}I - m^2 I - \dot{m}I = -\frac{h}{k}\hat{I} - mP + m\hat{P} + \dot{\hat{P}} + m(P - \hat{P}\ \ ) + m\hat{P}$ diperoleh

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{k} + m^2 + \dot{m}\right)I = \alpha_1(t) \qquad t \in [0, T] \qquad (20)$$

dengan $\alpha_1(t) = -\frac{h}{k}\hat{I} + m\hat{P} + \dot{\hat{P}}$

Untuk menentukan nilai optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal, kita harus memperoleh solusi dari (20). Dalam sebagian besar kasus, akan sangat tidak mungkin menentukan solusi persamaan differensial dari (20). Namun akan diamati dua kasus dalam bentuk solusi eksplisit dan akan diuraikan kejadian dalam bentuk khusus. Dalam kasus umum persamaan differensial dari (20) dapat diselesaikan dengan cara numerik.

Fungsi m adalah konstanta

Ketika fungsi m adalah dalam bentuk konstanta maka persamaan differensial dari (20) adalah

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{k} + m^2\right)I = \alpha_1(t) \quad t \in [0, T] \quad (21)$$

Maka akan diperoleh persamaan differensial orde dua yang dapat diselesaikan dengan cara memisalkan y = e^{st} maka y'= se^{st} dan y''= s^2e^{st}. Persamaan karakteristik (21) diperoleh:

$$s^2 - \left(\frac{h}{k} + m^2\right) = 0$$

dan akar-akar persamaan yang diperoleh

$r_1 = r = \sqrt{\frac{h}{k} + m^2}$ dan

$r_2 = -r = -\sqrt{\frac{h}{k} + m^2}$

Sehingga solusi dari (20) diberikan dengan bentuk:

$$I(t) = C_{11}e^{rt} + C_{12}e^{-rt} + Q_1(t) \quad t \in [0, T] \ (22)$$

Dimana $Q_1(t)$ dan $Q_2(t)$ merupakan solusi tambahan dari (20), maka dengan menggunakan kondisi I(0) = I_0 dan I(t_1) = M, dan diperoleh:

Untuk nilai $t \in [0, T]$,

$I(0) = C_{11}e^{r0} + C_{12}e^{-r0} + Q_1(0) = I_0$

Maka

$I_0 = C_{11}(1) + C_{12}(1) + Q_1(0)$

$I(t_1) = C_{11}e^{rt_1} + C_{12}e^{-rt_1} + Q_1(t_1 0),$

Sehingga

$$M = C_{11}e^{rt_1} + C_{12}e^{-rt_1} + Q_1(t_1)$$

Nilai C_{11} dan C_{12} dapat ditentukan dengan menggunakan cara matriks seperti berikut:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{rt_1} & e^{-rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_1(t_1) \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan sifat matriks A = BX + C dapat diketahui nilai X, yaitu X = B^{-1}(A - C)

Det B = $e^{-rt_1} - e^{rt_1}$

maka X = $\frac{1}{\det B}$ $(adj\ B)$(A - C)

Maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}} \begin{pmatrix} e^{-rt_1} & -1 \\ -e^{-rt_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ Q_1(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}} \begin{pmatrix} e^{-rt_1} & -1 \\ -e^{-rt_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_0 - Q_1(0) \\ M - Q_1(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}} \begin{pmatrix} e^{-rt_1}(\mathrm{I}_0 - Q_1(0) - (M - Q_1(t_1)) \\ -e^{-rt_1}(\mathrm{I}_0 - Q_1(0) + \mathrm{I}_0 - Q_1(0)) \end{pmatrix}$$

Nilai

$$C_{11} = \frac{Q_1(t_1) - M + ((\mathrm{I}_0 - Q_1(0)e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}} \text{ dan } C_{12} = \frac{-(Q_1(t_1) - M) + ((\mathrm{I}_0 - Q_1(0) - e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$$

Sehingga secara umum diperoleh

$$C_{1j} = \frac{(-1)^{j-1}(Q_1(t_1) - M) + ((\mathrm{I}_0 - Q_1(0) - 1(j)e^{-rt_1})}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$$ dengan j = 1,2.

Berdasarkan persamaan $\dot{I} = \frac{\lambda}{k} + \hat{P} + VI$ untuk $t \in [0, T]$ serta (22) akan diperoleh

$\lambda = \mathrm{K}(\dot{I} - \hat{P} - mI)$ sehingga

$$\lambda = \mathrm{K}(rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)) - \hat{P} - m(C_{11}e^{rt} + C_{12}e^{-rt} + Q_1(t))) \qquad t \in [0, T]$$

$$\lambda = \mathrm{K}((rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)) - \hat{P} - (mC_{11}e^{rt} + mC_{12}e^{-rt} + mQ_1(t)))$$

$$\lambda = \mathrm{K}\left((rC_{11}e^{rt} - rC_{12}e^{-rt} + \dot{Q}_1(t)\right) - \hat{P} - mC_{11}e^{rt} - mC_{12}e^{-rt} - mQ_1(t)$$

$$\lambda = \mathrm{K}(C_{11}(r - m)e^{rt} - C_{12}(r + m)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - mQ_1) \quad t \in [0, T]$$

dan diperoleh

$$\lambda = \mathrm{K}\,\mathrm{x}(C_{11}(r - m)e^{rt} - C_{12}(r + m)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - mQ_1) \quad t \in [0, T] \tag{23}$$

Berarti dengan menggunakan I(t_1) = M, $\lambda(\mathrm{T}) = 0$, akan memberikan :

$$I(t_1) = C_{21}e^{rt_1} + C_{22}e^{-rt_1} + Q_2(t_1) = M$$

$$\lambda(T) = C_{21}(m - r)e^{rt_1} + C_{22}(m + r)e^{-rt_1} - \dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + mQ_2(t_1) = 0$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan matriks diperoleh

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{rt_1} & e^{-rt_1} \\ (m - r)e^{rt_1} & (m + r)e^{-rt_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_2(t_1) \\ -\dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + mQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

Berarti

$$\begin{pmatrix} e^{rt_1} & e^{-rt_1} \\ (m - r)e^{rt_1} & (m + r)e^{-rt_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_2(t_1) \\ -\dot{Q}_2(t_1) + \hat{P} - D + mQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(e^{rt_1})\left((m + r)e^{-rt_1}\right) - (e^{-rt_1})((m - r)e^{rt_1})} \begin{pmatrix} (m + r)e^{-rt_1} & -e^{-rt_1} \\ -(m - r)e^{rt_1} & e^{rt_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{M} - Q_2(t_1) \\ \dot{Q}_2(t_1) - \hat{P} + D - mQ_2(t_1) \end{pmatrix}$$

Sehingga akan diperoleh

$C_{21} = e^{-rt_1}[M - C_{22}e^{-rt_1} - Q_2(t_1)]$

$C_{22} = \frac{\gamma}{(m-r)e^{rT} - e^{(T-2t_1)r}}$

Dimana $\gamma = [Q_2(t_1) - M](r - v)e^{(T-t)r} - \dot{Q}_2(T) + \hat{P} + D(T) + mQ_2(T)$

Sehingga dari (23) dapat disubsitusikan ke persamaan $P = \frac{\lambda}{k} + \hat{P}$ dan diperoleh nilai

$P(t) = \hat{P} + (C_{11}(r-m)e^{rt} - C_{12}(r+m)e^{-rt} + \dot{Q}_1 - \hat{P} - mQ_1) \qquad t \in [0,T]$

Sedangkan fungsi Q_1 *dan* Q_2 dapat dihitung nilainya ketika harga fungsi D diketahui.

Fungsi $\frac{h}{k} + m^2 + \dot{m}$ adalah konstan

Pada saat nilai fungsi $\frac{h}{k} + m^2 + \dot{m}$ adalah konstan, bentuk dari solusi diperoleh berdasarkan nilai konstannya positif atau negatif, akan dibahas solusinya dalam dua kondisi tersebut.

Kondisi 1 Fungsi $\frac{h}{k} + m^2 + \dot{m}$ adalah konstan positif.

Berarti $\frac{h}{k} + m^2 + \dot{m} = {k_1}^2$ (24)

Sehingga persamaan diffrensial dari (20) akan berubah menjadi

$\ddot{I} - ({k_1}^2)I = \alpha_1(t) \quad t \in [0,T]$ (25)

Catatan bahwa untuk menyelesaikan (23), perlu menghitung m terlebih dahulu untuk mendapatkan solusi (24) dan (25). Solusi (25) tergantung dari jenis konstan dari ${k_1}^2 - \frac{h}{k}$.

Mari kita tinjau bentuk $\boldsymbol{{k_1}^2 - \frac{h}{k}}$ **bentuk positif**. Andaikan kita ambil ${k_1}^2 - \frac{h}{k} = a^2$, maka penyelesaian persamaan (25) menjadi:

$$\boldsymbol{m^2} + \dot{\boldsymbol{m}} = {k_1}^2 - \frac{h}{k}$$

$$\boldsymbol{m^2} + \dot{\boldsymbol{m}} = a^2$$

sehingga bentuknya menjadi

$$\frac{dv}{dt} = a^2 - \boldsymbol{m^2} \text{ atau } \frac{dm}{a^2 - \boldsymbol{m^2}} = dt$$

Bentuk tersebut dapat diselesaikan dengan cara $\frac{dm}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} = dt$

Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh

$$\int \frac{dm}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} = t$$

Bentuk integral ruas kiri dapat diselesaikan dengan cara

$$\frac{A}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{m}} + \frac{B}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m}} = \frac{1}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})}$$

$$\frac{(A+B)a + m(A-B)}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} = \frac{1}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})}$$

Sehingga A+B = $\frac{1}{a}$ dan A – B = 0 akan diperoleh nilai A = $\frac{1}{2a}$ dan B = $-\frac{1}{2a}$ selanjutnya disubsitusikan kembali ke persamaan integralnya menjad:

$$\int \frac{dm}{(a-\boldsymbol{m})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} = \int \frac{A}{(a-\boldsymbol{m})} + \frac{B}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} dm = t$$

$$t = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{(a-\boldsymbol{m})} dv - \frac{1}{2a}\int \frac{B}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} dm$$

$$t = \frac{1}{2a} Ln(a - \boldsymbol{m}) - \frac{1}{2a} Ln(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})$$

$$t = \frac{1}{2a} Ln \frac{(a-\boldsymbol{m})}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m})} \text{ atau } t = \left[Ln \left(\frac{a-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m}} \right)^{\frac{1}{2a}} \right]$$

Berarti $\left(\frac{a-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m}}\right)^{\frac{1}{2a}} = e^{t}$ dan $\frac{a-\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{m}} = e^{2at}$

Maka diperoleh a-m = (a+m)(e^{2at})

$$a - v = ae^{2at} + me^{2at}$$

$$a - ae^{2at} = me^{2at} + m$$

$$a(1 - e^{2at}) = m(e^{2at} + 1)$$

Sehingga $m(t) = a\frac{1-e^{2at}}{e^{2at}+1}$

Maka diperoleh rata-rata kenaikan produksi adalah $m(t) = a\frac{1-e^{2at}}{e^{2at}+1}$

KESIMPULAN DAN SARAN

Model Inventori saat terjadi peningkatan inventori, biasanya disebabkan karena adanya inventori awal dan kemudian terjadinya penambahan inventori sedangkan permintaan terhadap inventori masih sedikit, dengan diketahui panjang perencaannya adalah T dari model Inventori diperoleh tingkat fungsi Inventori serta rata-rata kenaikan produksi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 1988. *Calculus.* Drexel University, John Wiley & Sons, New York.

Affandi, P., 2011. *Kendali Optimal system pergudangan dengan produksi yang mengalami kemerosotan*. Tesis, Yogyakarta.

Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control.* John Wiley & Sons. New York.

Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design,* Madison Avenue New York.

Danese, A. E. 1965. *Advanced Calculus an introduction to Applied Mathematics.*

Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.

Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation*. The University of Texas at Arlington. New York.

Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction*.Prentice Hall International, Inc.Philippines.

Murray R. Spiegel Statistic Schaum, 2 edition Renselaer Polytechnic Institut Hartford.

Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1. Delft University of Technlogy. Netherlands.

Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation.* 3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

Shety S.P and Thompson G.L 1985. *Optimal Control Theory: Applied to Management science and economics*. 2 editions.