Jurnal Sainsmat, September 2016, Halaman 191-204 Vol. V, No. 2
ISSN 2579-5686 (Onine) ISSN 2086-6755 (Cetak)
http://ojs.unm.ac.id/index.php/sainsmat

# Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar

## *Analysis and Simulation Of SITR Model on Tuberculosis in Makassar City*

**Syafruddin Side [1)*], Wahidah Sanusi [2)], Nur Fajri Setiawan[3)]**

[1,2,3)] Jurusan Matematika / Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar.

*Received 06th June 2016 / Accepted 11th August 2016*

**ABSTRAK**

Artikel ini bertujuan untuk membahas mengenai model matematika SITR untuk penyebaran Penyakit Tuberkulosis. Data yang digunakan adalah data sekunder penderita tuberkulosis yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2015. Pembahasan dimulai dari membangun model matematika SITR penyakit Tuberkulosis, penentuan titik ekuilibrium, kemudian mencari analisis kestabilan titik ekuilibrium, menentukan nilai bilangan reproduksi dasar ($R_0$), membuat simulasi model, dan menginterpretasikannya. Dalam artikel ini diperoleh model matematika SITR untuk penyakit tuberkulosis, dua titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dari model SITR, kestabilan global keseimbangan bebas penyakit dan endemik dari model SITR dengan nilai bilangan reproduksi dasa, $R_0$ = 1,04336331 ini menunjukkan bahwa penyakit tuberkulosis berstatus epidemik.

Kata Kunci : Model Matematika, Penyebaran Penyakit, Tuberkulosis, Model SITR

**ABSTRACT**

*The paper of this research is to discuss SITR mathematical model for the Spread of tuberculosis disease. The data used is secondary data of tuberculosis patients obtained from Public Health Office of South Sulawesi Province in 2015. The discussion starts from constructing an SITR mathematical model of tuberculosis disease, determining the equilibrium point, then looking for stability analysis of equilibrium point, determining the basic reproduction value (Ro), making model simulation, and interpreting them. In this paper we obtained an SITR mathematical model for tuberculosis, disease-free and endemic equilibrium points of the SITR model, the global stability of disease-free and endemic equilibrium from the SITR model with the basic reproduction value Ro = 1,04336331 indicates that tuberculosis disease is endemic.*

Keyword : mathematical model, spread of disease, tuberculosis, SITR model

**Korespondensi:*
*email: syafruddin@unm.ac.id*

## PENDAHULUAN

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika yang dibuat berdasarkan asumsi-asumsi (Maesaroh, 2013). Model matematika yang telah dibentuk akan dilakukan analisis, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, kimia, biologi, dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya (Maesaroh, 2013).

Model matematika untuk menganalisis penyebaran penyakit diantaranya ada model epidemi *SIR (Susceptible-Infected-Recovered), SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered)*, dan lainnya (Roni, 2011).

Model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model epidemi SITR. Model epidemi SITR (*Susceptible-Infective-Treatment-Recovered*) merupakan model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu rentan (*Susceptible*), subpopulasi individu terinfeksi (*Invective*), subpopulasi individu yang melakukan pengobatan (*Treatment*) dan subpopulasi individu sembuh (*Recovered*). Model epidemi SITR merupakan suatu pengembangan dari model klasik SIR. Model epidemi SIR mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi penyakit akan sembuh, sedangkan model SITR mewakili suatu situasi ketika individu yang terinfeksi harus melakukan pengobatan untuk sembuh.

Penyakit tuberkulosis termasuk ke dalam kelompok penyakit menular dan mematikan tanpa memperhatikan usia dan jenis kelamin. Penularan penyakit tuberkulosis dengan cara menyebarkan bakteri ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak) (Depkes RI, 2007).

Pada tahun 1993, TB telah menginfeksi sepertiga penduduk dunia dengan area penyebaran penyakit TB yang tidak terkendali di sebagian besar negara di dunia. Secara global pada tahun 2012 diperkirakan sekitar 12 juta kasus TB dan sekitar 1,2 kematian yang disebabkan oleh penyakit tuberkulosis. Hal ini mengalami 2 penurunan yakni sekitar 11 juta kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 dengan kasus kematian sekitar 1,1 juta (WHO, 2014).

Indonesia merupakan salah satu negara dengan pengidap penyakit TB terbanyak di dunia. Indonesia berada pada peringkat ketiga dunia setelah India dan China dengan sekitar 680.000 kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 atau diperkirakan setiap 100.000 populasi terdapat 272 penderita TB. Angka kematian akibat penyakit tuberkulosis pada tahun 2013 yakni sekitar 64.000 jiwa atau diperkirakan setiap 100.000 populasi terdapat 25 penderita TB yang meninggal (WHO, 2014).

Beberapa penelitian model epidemik penyakit tuberkulosis telah banyak dilakukan diantaranya K. Queena Fredlina, Tjokorda Bagus Oka, dan I Made Eka Dwipayana yang membahas tentang Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit tuberkulosis, Ulfasari Rafflesia yang membahas tentang Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (TBC).

Pada artikel ini dibahas mengenai analisis dan simulasi model SITR pada penyebaran penyakit tuberculosis. Pengambilan data penelitian dalam artikel ini berasal dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2015, membangun model SITR, menentukan titik ekuilibrium, kemudian mencari analisis kestabilan titik ekuilibrium, dan melakukan simulasi dari model SITR pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar.

Artikel ini bertujuan untuk mengetahui langkah-langkah membuat model dan mengetahui model matematika penyakit tuberkulosis, mengetahui titik ekuilibrium model dan analisis kestabilan titik ekuilibrium model, menginterpretasikan model dengan melakukan simulasi model.

## Model SITR

Model epidemi SITR (*Susceptible-Infective-Treatment-Recovered*) merupakan model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu rentan (*Susceptible*), subpopulasi individu terinfeksi (*Invective*), subpopulasi individu yang melakukan pengobatan (*Treatment*) dan subpopulasi individu sembuh (*Recovered*). Model epidemi SITR merupakan suatu pengembangan dari model klasik SIR. Model epidemi SIR mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi penyakit akan sembuh, sedangkan model SITR mewakili suatu situasi ketika individu yang terinfeksi harus melakukan pengobatan untuk sembuh.

## Analisis Kestabilan

Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu system persamaan diferensial baik linear maupun nolinear dalam defenisi berikut :

Diberikan system persamaan diferensial orde satu dan x (t, $x_0$)

Adalah solusinya pada saat t dengan kondisi awal x (0) = $x_0$ .

1. Vector $\bar{x}$ memenuhi f($\bar{x}$) = 0dikatan sebagai titik ekuilibrium
2. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $||x_0 - \bar{x}|| < \delta$ (dengan ||.|| adalah norm pada $R^n$) maka $||x(t,x_0) - \bar{x}|| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
3. Titik ekuilibrium stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\log_{t\to\infty} ||x(t, x_0) - \bar{x}|| = 0$, asalkan $||x_0 - \bar{x}|| < \delta_1$ [6

## Kriteria *Routh-Hurtwitz*

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut:

a. Persamaan polinom orde-*n* ditulis dalam bentuk seperti berikut:
$$a_0S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + a_3S^{n-3} + \cdots + a_{n-1}S + a_n = 0$$
dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata dan $a_n \neq 0$

b. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.

c. Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti berikut:

Tabel 1. Tabel *Routh*

| $S^n$ | $a_0$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_6$ | $\cdots$ | $a_{n-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S^{n-1}$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_7$ | $\cdots$ | $a_n$ |
| $S^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $\cdots$ | $b_n$ |
| $S^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $\cdots$ | $c_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $S^0$ | | | | | | |

## Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi.Bilangan tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan (model) yang dihitung pada titik equilibrium bebas penyakit. Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan $R_0$ . Beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

1. Jika $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah[6].

## METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian kajian teori dan terapan.Yaitu, dengan mengkaji literatur-literatur yang berhubungan dengan pemodelan matematika yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah dengan terlebih dahulu menyuun konep-konsep sesuai kebutuhan. Data yang digunakan dalam penentian ini adalah data sekunder jumlah penderita penyakit tuberkulosis pada tahun 2015 di Dinas Kesehatan Kota Makassar.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membangun model SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.
   a. Mengasumsikan variabel dan parameter model SITR.
   b. Membentuk model SITR.
2. Menganalisis model SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.
   a. Menentukan titik tetap model SITR
   b. Menentukan tipe kestabilan titik tetap berdasarkan nilai eigen
   c. Menentukan bilangan reproduksi dasar ($R_o$)
3. Mengimplementasikan hasil simulasi penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan *Matlab*.
   a. Mengumpulkan data pasien yang terkena tuberkulosis yang didapatkan dari Dinas Kesehatan Kota Makassar.
   b. Menginput data pasien yang terkena tuberkulosis yang didapatkan dari Dinas Kesehatan Kota Makassar.
   c. Menginput hasil analisis model kedalam software.
   d. Menganalisis hasil simulasi.
   e. Menarik kesimpulan.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

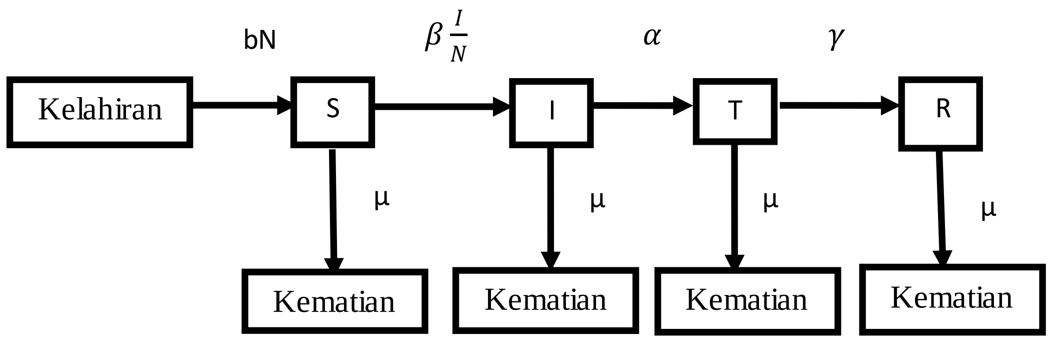
### Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Dalam model penyebaran penyakit tuberkulosis ini populasi manusia dibagi menjadi 4 kelas, yaitu kelas rentan/*susceptible* ($S$) yang menyatakan kelas individu yang belum terjangkit penyakit tuberkulosis dan berpotensi terkena penyakit tersebut, kelas terinfeksi/*infectious* ($I$) yang menyatakan kelas individu yang terinfeksi oleh virus *Mycobacterium tuberculosis* dan memiliki kemampuan menularkan virus *Mycobacterium tuberculosis* tersebut kepada manusia lainnya, kelas pengobatan/*treatment* ($T$) yang menyatakan kelas individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis lalu mendapatkan pengobatan atau *treatment,* kelas sembuh/*recovery* ($R$) yang menyatakan kelas individu yang telah sembuh dari infeksi virus.

Ada beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model, yaitu:

1. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi
2. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan
3. Penyakit berbahaya, jika terinfeksi dapat menimbulkan kematian
4. Individu yang telah terinfeksi jika diberikan *treatment* akan kebal terhadap penyakit tuberkulosis dan tidak menjadi rentan kembali
5. Populasi konstan (tertutup), Artinya $N = (S(t)) + (I(t)) + (T(t)) + (R(t))$. Jumlah populasi dalam waktu t sama dengan jumlah individu rentan, terinfeksi, terobati dan sembuh.

Perubahan yang terjadi pada setiap grup manusia dan nyamuk dapat ditafsirkan dalam bentuk Gambar 2.




Gambar 2. Skema Populasi Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Gambar 2 dapat ditafsirkan dalam bentuk model matematika yang merupakan persamaan differensial tidak linear sebagai berikut:

Populasi manusia

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta\frac{I}{N}S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - \alpha I - \mu I$$

(6)

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

### Analisis Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

#### Penentuan Titik Tetap

akan dicari titik tetap berdasarkan persamaan (6). Titik tetap diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dI}{dt}=\frac{dT}{dt}=\frac{dR}{dt}=0.$$

Persamaan (6) memiliki dua jenis titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit (*disease-free equilibrium*) $\boldsymbol{x}_{dfe}$ dan titik tetap endemik (*endemic equilibrium*) $\boldsymbol{x}_{ee}$ . Dengan menggunakan *software* berbasis fungsional, diperoleh titik tetap $\boldsymbol{x}_{dfe}$

$\boldsymbol{x}_{dfe}\,(S,I,T,R)=(S^*,0{,}0{,}0)$ , ..................(7)

Dengan

$S^*=\frac{bN}{\mu}$,

Dan titik tetap $\boldsymbol{x}_{ee}$

$\boldsymbol{x}_{ee}\,(S,I,T,R)=(S^{**},I^{**},T^{**},R^{**})$, .............. (8)

Dengan

$s^{**}=\frac{(\alpha I+\mu I)N}{\beta I}$ $\qquad T^{**}=\frac{\alpha I}{\gamma+\mu}$

$I^{**}=\frac{(bN-\mu S)N}{\beta S}$ $\qquad R^{**}=\frac{\gamma T}{\mu}$

**Penentuan Matriks Jacobian**

Misalkan diberikan persamaan (6) didefinisikan sebagai fungsi berikut

$\dot{x}=f(x), x\in R^4$ .....................(9)

Dengan $x\in R^4$ adalah variabel-variabel yang terdapat pada persamaan (9).

Matriks Jacobian dari persamaan (9) didefinisikan sebagai

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\delta f_1}{\delta S} & \frac{\delta f_1}{\delta E} & \frac{\delta f_1}{\delta I} & \frac{\delta f_1}{\delta R}\\ \frac{\delta f_2}{\delta S} & \frac{\delta f_2}{\delta E} & \frac{\delta f_2}{\delta I} & \frac{\delta f_2}{\delta R}\\ \frac{\delta f_3}{\delta S} & \frac{\delta f_3}{\delta E} & \frac{\delta f_3}{\delta I} & \frac{\delta f_3}{\delta R}\\ \frac{\delta f_4}{\delta S} & \frac{\delta f_4}{\delta E} & \frac{\delta f_4}{\delta I} & \frac{\delta f_4}{\delta R}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\beta\frac{I}{N}-\mu & -\beta\frac{S}{N} & 0 & 0\\ \beta\frac{I}{N} & \frac{\beta S}{N}-\alpha-\mu & 0 & 0\\ 0 & \gamma & -(\gamma-\mu) & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}$$

**Penentuan Matriks Jacobian untuk Titik Tetap tanpa Penyakit**

Sifat kestabilan titik tetap $\boldsymbol{x}_{dfe}=(\frac{bN}{\mu},0{,}0{,}0)$ dapat dilakukan dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan differensial (9) di sekitar $\boldsymbol{x}_{dfe}$ , sehingga diperoleh matriks Jacobian untuk titik tetap tanpa penyakit sebagai berikut

$$J_0=\begin{bmatrix}-\mu & \frac{-\beta bN^2}{\mu} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-\beta bN^2}{\mu}-\alpha-\mu & 0 & 0\\ 0 & \sigma & -\gamma-\mu & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}$$

Mencari nilai eigen matriks jacobian dipersekitaran $\boldsymbol{x}_{dfe}$ .

$$|J_0-\lambda I|=0$$

$$det\left|\begin{bmatrix}-\mu & \frac{-\beta bN^2}{\mu} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-\beta bN^2}{\mu}-\alpha-\mu & 0 & 0\\ 0 & \sigma & -\gamma-\mu & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$Det\left|\begin{bmatrix}-\mu-\lambda & \frac{-\beta bN^2}{\mu} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-\beta bN^2}{\mu}-\alpha-\mu-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \sigma & -\gamma-\mu-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\lambda\end{bmatrix}\right|=0$$

$$(-\mu-\lambda)\ x\ det=\begin{bmatrix}\frac{\beta bN^2}{\mu}-\alpha-\mu-\lambda & 0 & 0\\ \alpha & -\gamma-\mu-\lambda & 0\\ 0 & \gamma & -\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

$$(-\mu-c)\ (-\mu-\lambda)x\ det=\begin{bmatrix}\frac{\beta bN^2}{\mu}-\alpha-\mu-\lambda & 0\\ \alpha & \gamma-\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut :

$$(-\lambda-\mu)(-\lambda-\mu)\left(\frac{-\beta bN^2}{\mu}-\propto-\mu-\lambda\right)(\gamma-\mu-\lambda)=0$$

$$(\mu^2+\lambda^2+2\mu\lambda)\left(\frac{-\beta bN^2}{\mu}-\propto-\mu-\lambda\right)(\gamma-\mu-\lambda)=0$$

$$\begin{aligned}\lambda^4&+\left(\frac{-\beta bN^2}{\mu}-\propto-\gamma-\mu\right)\lambda^3\\&+\left(\frac{-\beta bN^2\gamma}{\mu}-3\beta bN^2-\alpha\gamma+3\alpha\mu+2\mu^2-\gamma\mu+\mu-2\mu\gamma\right)\lambda^2\\&+(3\alpha\mu^2+2\alpha\gamma\mu+2\mu^3+3\mu^2\gamma+2\beta bN^2\gamma+\beta N^2\mu)\lambda\\&+(\beta bN^2\gamma\mu-\beta bN^2\mu^2-\alpha\gamma\mu^2-\alpha\mu^3+\mu^4+\mu^3\gamma)\\&=0\end{aligned}$$

Karena semua suku positif maka sistem tersebut stabil, maka syarat perlu dan cukup untuk stabil terpenuhi. Sistem stabil saat $e>0$ dimana parameternya $\epsilon\ [0,1]$.

**Penentuan Matriks Jacobian untuk Titik Tetap Endemik**

Sifat kestabilan titik tetap $\boldsymbol{x}_{ee}=(\frac{(\alpha I+\mu I)N}{\beta I},\frac{(bN-\mu S)N}{\beta S},\frac{\alpha I}{\gamma+\mu},\frac{\gamma T}{\mu})$ dapat dilakukan dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan differensial (4.4) di sekitar $\boldsymbol{x}_{ee}$ , sehingga diperoleh matriks Jacobian untuk titik tetap endemik sebagai berikut:

$$J_1=\begin{bmatrix}-\beta\frac{I}{N}-\mu & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0\\ \beta\frac{I}{N} & \beta-\alpha-\mu & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -\gamma-\mu & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}$$

Mencari nilai eigen matriks jacobian dipersekitaran $E_1$.

$$|J_1-\lambda I|=0$$

$$Det\left|\begin{bmatrix}-\beta\frac{I}{N}-\mu & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0\\ \beta\frac{I}{N} & \beta-\alpha-\mu & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -\gamma-\mu & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$Det\left|\begin{bmatrix}-\beta\frac{I}{N}-\mu-\lambda & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0\\ \beta\frac{I}{N} & \frac{-\beta S}{N}-\alpha-\mu-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \alpha & -\gamma-\mu-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\lambda\end{bmatrix}\right|=0$$

$$(-\mu-\lambda)\ x\ det=\begin{bmatrix}\frac{\beta I}{N}-\mu-\lambda & \frac{-\beta S}{N} & 0\\ \frac{\beta I}{N} & \frac{-\beta S}{N}-a-\mu-\lambda & 0\\ 0 & \gamma & -\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

$$(-\mu-\lambda)\ (-\gamma-\mu-\lambda)x\ det=\begin{bmatrix}\frac{\beta I}{N}-\mu-\lambda & \frac{-\beta S}{N}\\ \frac{\beta I}{N} & \frac{-\beta S}{N}-a-\mu-\lambda\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}=&\left(\frac{\beta IS}{N^2}\right)\lambda^4+\left(-3\frac{\beta^2IS\mu}{N^4}-\frac{\beta^3I^2S}{N^3}-\frac{\beta^2IS\gamma}{N^2}-\frac{\beta^2IS\mu}{N^2}-\frac{\beta^2S^2I}{N^3}-\frac{\beta^2IS}{N^2}\right)\lambda^3+\left(-\frac{\beta^2IS\mu^2}{N^3}-\frac{\beta^2IS\alpha\mu}{N^2}-\frac{\beta^2S^2I\mu}{N^3}-\right.\\&\frac{\beta^3I^2S\mu}{N^3}-\frac{\beta I^2\alpha S}{N^3}-\frac{\beta^3S^2I^2}{N^4}-\frac{\beta^2\mu IS\gamma}{N^2}-\frac{\beta^2\mu IS\gamma}{N^2}-\frac{\beta^2IS\alpha\gamma}{N^2}--\frac{\beta^3\alpha IS\gamma}{N^2}-\frac{\beta^3IS^2\gamma}{N^3}-\frac{\beta^2IS\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^2IS\gamma}{N^3}-\\&\frac{\beta^3I^2S\gamma}{N^3}-3\frac{\beta^2\mu^2IS}{N^2}-3\frac{\beta^2IS\alpha\mu}{N^2}-2\frac{\beta^3\mu IS^2}{N^3}-2\frac{\beta^2\mu^2IS}{N^3}-2\frac{\beta^3\mu I^2S}{N^3}-\left.2\frac{\beta^2\mu^2I^2S}{N^3}\right)\lambda^2+\\&\left(\frac{-\beta^2IS\mu^2\gamma}{N^3}-2\frac{\beta^2IS^2\mu^2\gamma}{N^2}-\frac{\beta^3I^2S\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^3IS^2\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^2I^2\alpha S\gamma}{N^3}-\frac{\beta^3S^2I\gamma}{N^4}-2\frac{\beta^3IS\mu^3}{N^3}-2\frac{\beta^2IS\mu^2\alpha}{N^2}-\right.\\&2\frac{\beta^3IS^2\mu^2}{N^3}-2\frac{\beta^3I^2S\mu^2}{N^3}-2\frac{\beta^3I^2\alpha S\mu}{N^3}-2\frac{\beta^3I^2S^2\mu}{N^4}-\frac{\beta^2IS\mu^3}{N^2}-2\frac{\beta^2\alpha IS\mu^2}{N^2}-\frac{\beta^3IS^2\mu^4}{N^3}-\frac{\beta^2IS\mu^3}{N^3}-\\&\left.2\frac{\beta^3IS\mu^2}{N^3}-\frac{\beta^2IS\mu^2\gamma}{N^2}-\frac{\beta^2IS\alpha\mu\gamma}{N^2}\right)\lambda+\left(\frac{\beta^3IS^2\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^2\alpha IS\mu\gamma}{N^2}-\frac{\beta I^2S\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^3I^2\alpha S\mu\gamma}{N^3}-\frac{\beta^3I^2S\mu^2\gamma}{N^3}-\right.\end{aligned}$$

$$\frac{\beta^3 IS^2\mu^2\gamma}{N^3} - \frac{\beta^2 IS\alpha\mu\gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 IS\alpha\mu^2}{N^2} - \frac{\beta^2 IS\mu^3\gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2S^2\mu^2}{N^4} - \frac{\beta^3 I^2\alpha S\mu^2}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 S\mu^3}{N^3} - \frac{\beta^3 IS^2\mu^3}{N^2} - \frac{\beta^2 IS\alpha\mu^3}{N^2} - \frac{\beta^2 IS\mu^3}{N^3}\Big).$$

Polinomial orde empat mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama tabel *routh-Hurwitz* mempunyai tanda yang sama. Sehingga diperoleh ketika $R_0 > 1$ maka titik setimbang endemik stabil asimtotik.

**Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar ($R_0$)**

Diberikan persamaan polinomial orde empat:

$$\lambda^4 + \left(\frac{-\beta bN^2}{\mu} - \alpha - \gamma - \mu\right)\lambda^3 + \left(\frac{-\beta bN^2\gamma}{\mu} - 3\beta bN^2 - \alpha\gamma + 3\alpha\mu + 2\mu^2 - \gamma\mu + \mu - 2\mu\gamma\right)\lambda^2 + (3\alpha\mu^2 + 2\alpha\gamma\mu + 2\mu^3 + 3\mu^2\gamma + 2\beta bN^2\gamma + \beta N^2\mu)\lambda + (\beta bN^2\gamma\mu - \beta bN^2\mu^2 - \alpha\gamma\mu^2 + \alpha\mu^3 + \mu^4 - \mu^3\gamma)=0$$

nilai reproduksi dasar dari persamaan di atas diperoleh dari bagian konstannya, sehingga diperoleh :

$$\beta bN^2\gamma\mu - \beta bN^2\mu^2 - \alpha\gamma\mu^2 + \alpha\mu^3 + \mu^4 - \mu^3\gamma=0$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menyamakan bagian positif dan negatifnya, maka diperoleh:

$$\mu^4 + \alpha\mu^3 + \beta bN^2\gamma\mu = \mu^3\gamma + \alpha\gamma\mu^2 + \beta bN^2\mu^2$$

$$R_0 = \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2}$$

**Simulasi Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis**

Simulasi dilakukan karena pengamatan terhadap sistem sulit dilakukan secara langsung, selain itu dengan simulasi dapat dipelajari hal-hal yang bisa terjadi dalam dinamika populasi. Pemilihan parameter didasarkan pada studi yang dilakukan oleh berbagai sumber terpercaya. Beberapa nilai parameter seperti yang menyangkut populasi, didasarkan pada asumsi tentang situasi penyakit yang paling umum. Nilai-nilai parameter yang diambil disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai parameter pada model SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis

| Simbol | Parameter | Nilai Parameter |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{b}$ | angka kelahiran (*birth rate*) | 0,45 |
| $\boldsymbol{\mu}$ | angka kematian alami (*mortality rate*) | 0.95 |
| $\boldsymbol{\beta}$ | laju penyebaran | 0,75 |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | pemberian treatment | 0,30 |
| $\boldsymbol{\gamma}$ | angka kesembuhan (*revovery rate*) | 1 |
| $\boldsymbol{N}$ | angka total populasi | 1 |

dengan syarat awal yang akan digunakan dalam simulasi model ini adalah; Nilai $S(0), I(0), T(0)$, dan $R(0)$, untuk model SITR ditentukan seperti pada Tabel 3

Tabel 3. Syarat awal model SITR

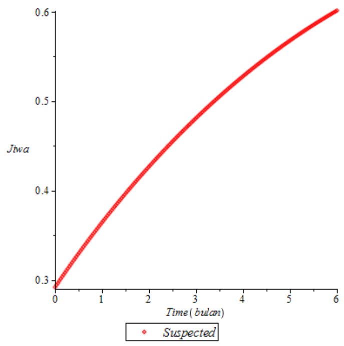
| Variabel | Nilai | Sumber |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{S}(\mathbf{0})$ | $\frac{3361}{11506} = 0{,}2921$ | Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015) |
| $\boldsymbol{I}(\mathbf{0})$ | $\frac{3361}{11506} = 0{,}2921$ | Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015) |
| $\boldsymbol{T}(\mathbf{0})$ | $\frac{3361}{11506} = 0{,}2921$ | Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015) |
| $\boldsymbol{R}(\mathbf{0})$ | $\frac{1423}{11506} = 0{,}1236$ | Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015) |

**Simulasi Komputer Model SITR**

*Simulasi Komputer Model SITR*

Berdasarkan dari tabel parameter di peroleh lima grafik dari setiap nilai parameter

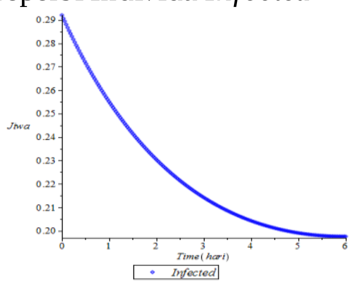
1. Simulasi Nilai Parameter 1
   a. Proporsi Individu *Susceptible*




Gambar 4.2 Proporsi Individu *Susceptible*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis.

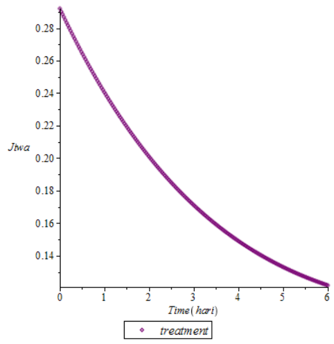
   b. Proporsi Individu *Infected*




Gambar 4.3 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang trinfeksi pada setiap bulannya terus menurun secara drastic dikarenakan adanya faktor *treatment* (pengobatan).

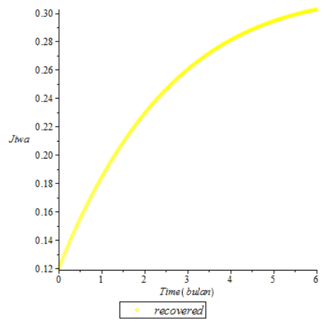
   c. Proporsi Individu *Treatment*




Gambar 4.4 Proporsi Individu *Treatment*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang *Treatment* pada setiap bulannya terus menurun secara drastis dikarenakan individu rentan semakin meningkat.

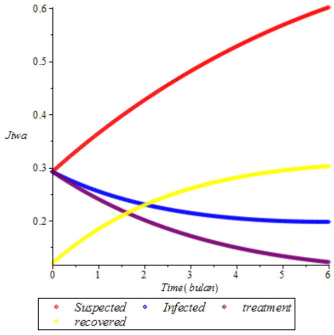
   d. Proporsi individu *Recovered*




Gambar 4.5 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis dikarenakan adanya penambahan faktor *Treatment* (pengobatan).

e. Proporsi individu model SITR

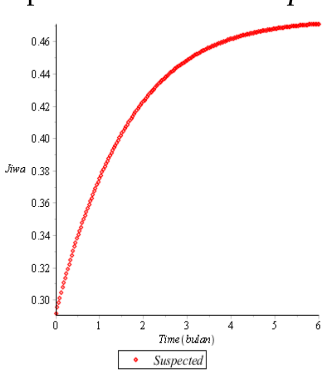



Gambar 4.6 Proporsi individu model SITR

Pada Gambar 4.6 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastic, berbeda dengan populasi individu infected dan treatment terus menurun, tetapi populasi individu terus meningkat.

2. Simulasi Nilai Parameter 2

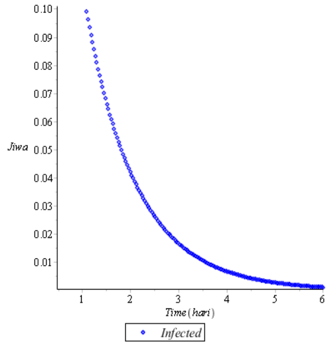
a. Proporsi Individu *Susceptible*




Gambar 4.7 Proporsi Individu *Susceptible*

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu, namun pada bulan ke-5 jumlah individu rentan stabil di titik 4 jiwa. Setiap individu yang sehat namun rentan penyakit masuk ke dalam subpopulasi *susceptible*, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terdeteksi penyakit.

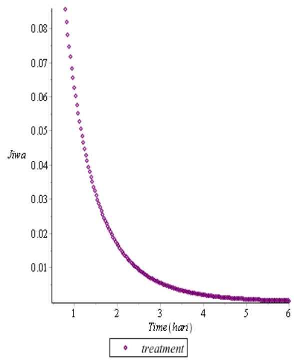
b. Proporsi Individu *Infected*




Gambar 4.8 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi pada bulan pertama menurun secara drastis, dikarenakan adanya jumlah pengurangan individu *infected* ke kelompok subpopulasi *recovered*, hal ini terjadi karena adanya individu yang sembuh dari penyakit. Maka setiap individu yang terinfeksi penyakit akan masuk ke dalam subpopulasi *infected*. Gambar 4.8 juga menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi diatas 10 bulan.

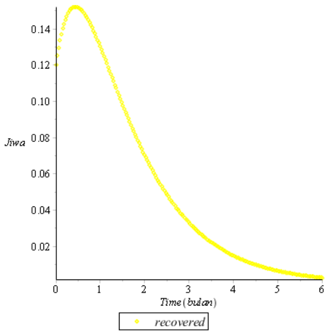
c. Proporsi Individu *Treatment*




Gambar 4.9 Proporsi Individu *Treatment*

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-3. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*.

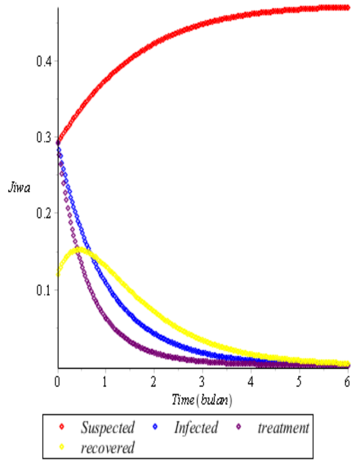
d. Proporsi individu *Recovered*




Gambar 5.0 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 5.0 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh meningkat, namun pada bulan ke-1 jumlah individu *recovered* menurun secara drastis dan stabil di bulan ke-6 dikarenakan individu *recovered* mendapatkan perawatan

e. Proporsi individu model SITR

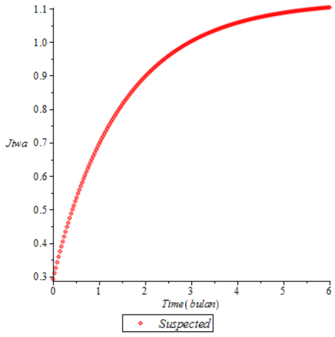



Gambar 5.1 Proporsi individu model SITR

Gambar 5.1 menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu. Berbeda dengan individu yang terinfeksi, pengobatan dan sembuh hanya menunjukkan interval yang paling rendah dan tidak mengalami peningkatan di setiap bulannya.

3. Simulasi Nilai Parameter 3

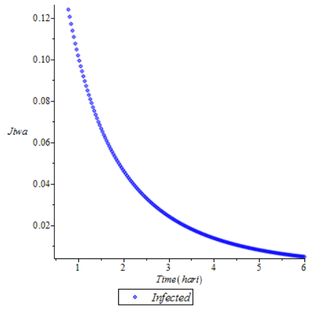
a. Proporsi Individu *Susceptible*




Gambar 5.2 Proporsi Individu *Susceptible*

Gambar 5.2 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu, namun pada bulan ke-5 jumlah individu rentan stabil di titik 1,1 jiwa. Setiap individu yang sehat namun rentan penyakit masuk ke dalam subpopulasi *susceptible*, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terdeteksi penyakit.

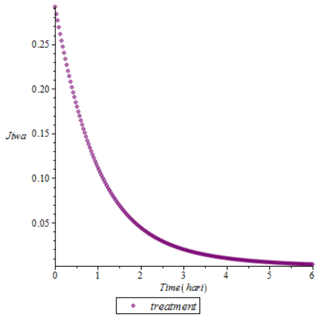
b. Proporsi Individu *Infected*




Gambar 5.3 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 5.3 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi pada bulan pertama menurun secara drastis, dikarenakan adanya jumlah pengurangan individu *infected* ke kelompok subpopulasi *recovered*, hal ini terjadi karena adanya individu yang sembuh dari penyakit. Maka setiap individu yang terinfeksi penyakit akan masuk ke dalam subpopulasi *infected*.

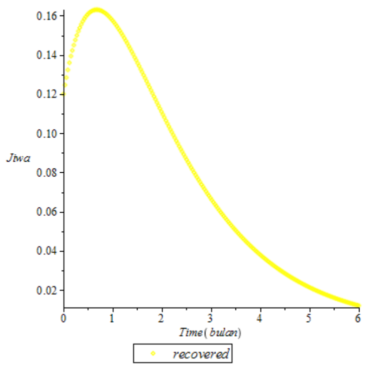
c. Proporsi Individu *Treatment*




Gambar 5.4 Proporsi Individu *Treatment*

Gambar 5.4 menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-6. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*.

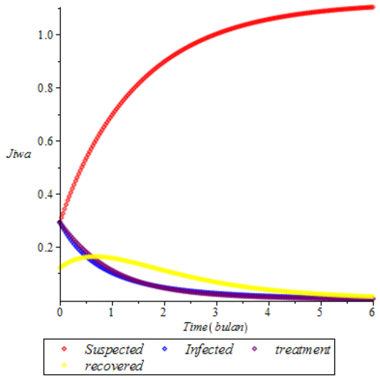
d. Proporsi individu *Recovered*




Gambar 5.5 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 5.0 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh meningkat, namun pada bulan ke-1 jumlah individu *recovered* menurun secara drastis dan stabil di bulan ke-6 dikarenakan individu *recovered* mendapatkan perawatan.

e. Proporsi individu model SITR




Gambar 5.6 Proporsi individu model SITR

Gambar 5.1 menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan setiap bulannya semakin meningkat. Berbeda dengan individu yang terinfeksi, pengobatan dan sembuh hanya menunjukkan interval yang paling rendah dan tidak mengalami peningkatan di setiap bulannya.

### *Kadar Reproduksi Awal*

1. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 1

   Nilai kadar reproduksi awal $R_0$ diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta b N^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta b N^2}$$

$$= \frac{(0.1)^3(0.3) + (0.1)^2(0,2)(0.3) + (0.1)^2(0.5)(0.15)(1)^2}{(0.1)^4 + (0.1)^3(0.2) + (0.1)(0.3)(0.5)(0.15)(1)^2}$$

$$= 0.88235294$$

   Karena nilai $R_0 < 1$ maka hal ini dapat dikatakan bahwa penyakit tersebut tidak dapat menular atau tidak menjadi wabah.

2. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 2

   Nilai kadar reproduksi awal $R_0$ diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2}$$
$$= \frac{(1)^3(2) + (1)^2(0{,}025)(2) + (1)^2(0{,}1)(4)(1)^2}{(1)^4 + (1)^3(0{,}025) + (1)(2)(0{,}1)(4)(1)^2}$$
$$= 1{,}34246575$$

Karena nilai $R_0 > 1$ maka hal ini menjadi status epidemik. Hal ini harus menjadi perhatian serius bagi pemerintah agar segera mengontrol dan mencegah semakin merebaknya wabah penyakit tuberkulosis di kawasan tersebut.

3. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 3

Nilai kadar reproduksi awal $R_0$ diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2}$$
$$= \frac{(0.98)^3(0.85) + (0.98)^2(0,.75)(0.85) + (0.98)^2(0.95)(0.9)(1)^2}{(0.98)^4 + (0.98)^3(0.75) + (0.98)(0.85)(0.95)(0.9)(1)^2}$$
$$= 0{,}95959287$$

Karena nilai $R_0 < 1$ maka hal ini dapat dikatakan bahwa penyakit tersebut tidak dapat menular atau tidak menjadi wabah.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika SITR pada penyebaran penyakit tuberkulosis dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta\frac{I}{N}S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{I}{N}S - \alpha I - \mu I$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

2. Analisis model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis menghasilkan dua titik ekuilibrium yaitu titik ekulibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik.
3. Hasil simulasi diperoleh plot grafik untuk nilai parameter pertama menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis, berbeda dengan populasi individu infected dan treatment terus menurun, tetapi populasi individu terus meningkat.
   Untuk nilai parameter kedua menunjukkan bahwa jumlah individu *Susceptible* setiap bulannya selalu meningkat, jumlah individu *Infected* mengalami penurunan, dan jumlah individu *Treatment* mengalami penurunan, dan jumlah individu *Recovered* mengalami penurunan.,
   Dan parameter ke tiga menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-6. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*. Diperoleh tiga bilangan reproduksi dasar $R_0 = 0{,}88235298$ , $R_0 = 1{,}04336331$ dan , $R_0 = 0{,}95959287$, pada nilai $R_0$ pertama ini berarti seseorang yang terinfeksi tidak dapat menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain tidak terjadi wabah pada populasi tersebut. Pada nilai $R_0$ kedua ini berarti seseorang yang terinfeksi menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain terjadi wabah pada populasi tersebut. Pada nilai $R_0$ pertama ini berarti

seseorang yang terinfeksi tidak dapat menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain tidak terjadi wabah pada populasi tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA


Maesaroh, Ulfa. 2013. *Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi*. [Skripsi]. Yogyakarta: Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

Roni, T.P. 2011. *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemi SEIR dengan kumpulan Infeksi pada Periode Laten*. Padang: Politeknik Negeri Padang.

Depkes RI. 2007. *Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberkulosis 2007*. Jakarta: Departemen Kesehatan RI.

WHO. 2014. *Global Tuberculosis Report 2014*. Geneva: World Health Organization.

Effendy. 2013. *Analisis Stabilitas Pada Penyebaran Penyakit DBD di Kabupaten Jember Dengan Metode SIR Stokastik*. [Skripsi]. Jember: Universitas Jember.

Mulisi, Subro. 2011. *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Dinamika Populasi pada Model SIR (Suspected-Infected-Recovered)*. [Skripsi]. Bogor: Institut Pertanian Bogor.