

## VERTEX ANTIMAGIC TOTAL LABELING PADA GRAPH MULTICYCLE

Dominikus Arif Budi Prasetyo

Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan MIPA  
Fakultas Pendidikan dan Ilmu Keguruan  
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta  
Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman.  
dominic\_abp@yahoo.co.id

### Abstrak

Pelabelan graf merupakan bagian dari graf yang berkembang saat ini. Jenis pelabelan pada graf bergantung pada domainnya, yakni pelabelan sisi ajaib, pelabelan titik ajaib, dan pelabelan total ajaib. Pelabelan total ajaib pada graf dibedakan lagi berdasarkan komponen graf yang dievaluasi, yakni pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total titik ajaib. Pada pelabelan ajaib, bobot dari komponen graf yang dievaluasi adalah sama, jika bobotnya tidak sama maka dinamakan pelabelan tak-ajaib (antimagic). Misalkan  $G$  adalah graf dengan banyak titik  $p$  dan sisi  $q$ . Suatu pemetaan bijektif dari komponen-komponen graf ke bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, (p+q)\}$  disebut called  $(a, d)$  vertex antimagic total labelling (pelabelan total titik ajaib) dari graf  $G$  jika bobot setiap titik (vertex) merupakan barisan aritmetika naik. Pada artikel ini membahas bahwa graf multicycle  $mC_p$  memenuhi  $(a, d)$  vertex antimagic total labelling dan beberapa bentuk pelabelannya.

**Kata kunci** : graph multicycle, vertex antimagic total labeling

### Abstract

Labeling graph is a subject in graph which is growing up nowadays. The kind of labeling graph is based on its domain, they are edge magic labeling, vertex magic labeling and total magic labeling. Total magic labeling graph can be differentiated based on graph component which is evaluated, they are edge magic total labeling and vertex magic total labeling. In magic labeling, the weight of the evaluated graph's component is equal. If the weight isn't equal, it is called antimagic labeling. Let  $G$  is graph with  $p$  vertex and  $q$  edge. A bijective mapping from components of graph to positive integer  $\{1, 2, \dots, (p+q)\}$  is called  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling of  $(p,q)$ -graph  $G$  if the weight of the vertex is an increase arithmetic series. In this case, odd cycle  $C_p$  with  $p \geq 3$  satisfy vertex antimagic total labeling. This article observes how multicycle graph  $mC_p$  satisfy  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling. The result of this observation is that  $mC_p$  satisfy  $(a, d)$  vertex antimagic total labeling, the boundary and the pattern of its labeling.

**Keywords** : graph multicycle, vertex antimagic total labeling.

### PENDAHULUAN

*Graph* merupakan salah satu cabang matematika yang sangat berkembang pesat. Salah satu bagiannya adalah *graph labeling* atau pelabelan *graph*. Di sini *graph* yang dipakai adalah terbatas, sederhana dan tidak berarah. Suatu pelabelan *graph* membawa himpunan dari *vertex* atau *edge* atau keduanya ke himpunan bilangan bulat positif. Jenis dari *labeling* tergantung pada domainnya, yaitu *vertex* (*vertex labeling*), *edge* (*edge*

*labeling*), atau keduanya (*total labeling*).

Beberapa peneliti memperkenalkan *labeling* dengan menggeneralisasi ide dari persegi ajaib. Penelitian ini pertama kali dilakukan oleh Kotzig dan Rosa (1970). Sedangkan *vertex magic total labeling* pertama kali dikenalkan oleh MacDougal, dkk (2002). *Vertex magic total labeling* didefinisikan sebagai pemetaan bijektif

$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$  dengan konstanta  $h$  sedemikian hingga untuk

setiap *vertex*  $u \in V(G)$  memenuhi  $f(u) + f(uv) = h$  dengan  $v$  semua *vertex* yang *adjacent* dengan  $u$  dan  $v \in V(G)$ .

Konsep *antimagic graph* diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Suatu *antimagic labeling* merupakan *edge labeling* dari suatu *graph* dengan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, q\}$  sehingga bobot setiap *vertex* berbeda. Selanjutnya Bodendiek dan Walther (1993) mendefinisikan konsep  $(a, d)$  *antimagic labeling* sebagai suatu *edge labeling* dengan bobot semua *vertex* membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$ . Pada artikel ini membahas bentuk *multicycle graph* ( $mC_p$ ), yakni gabungan beberapa *cycle graph* yang identik, kemudian menentukan keberlakuan dan mencari pola  $(a, d)$  VATL pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ).

## **PEMBAHASAN**

### ***Labeling Graph***

*Labeling graph* adalah pemetaan bijektif yang memetakan semua komponen *graph* tersebut ke suatu himpunan bilangan positif. Ada beberapa macam *labeling*, yaitu *vertex labeling* (*labeling* dengan domain himpunan *vertex*), *edge labeling* (*labeling* dengan domain himpunan *edge*) dan *total*

*labeling* (*labeling* dengan domain gabungan himpunan *vertex* dan himpunan *edge*). Untuk pengkajian masalah dalam artikel ini akan digunakan *total labeling*. Berikut diberikan beberapa definisi tentang *labeling*.

### **Definisi 1.** (Wallis, 2001)

*Vertex magic total labeling* dari  $(p, q)$ -*graph*,  $G$ , adalah pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$  sedemikian hingga untuk setiap  $u \in V(G)$  berlaku  $f(u) + f(uv) = h$  untuk semua  $v \in V(G)$  yang *adjacent* dengan  $u$ . Bilangan  $h$  disebut *magic constant*. *Graph* yang memenuhi *vertex magic total labeling* disebut *vertex magic total graph*.

Jika label dari *vertex* pada *vertex magic total graph* adalah bilangan integer yang terkecil yaitu  $\{1, 2, \dots, p + q\}$  maka *labelingnya* disebut *super vertex magic total labeling* dan *graphnya* disebut *super vertex magic total graph*.

### **Definisi 2.** (Wallis, 2001)

*Super vertex magic total labeling* dari  $(p, q)$ -*graph*,  $G$ , adalah pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$  sedemikian hingga untuk setiap  $u \in V(G)$  berlaku  $f(V(G)) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  dan  $f(u) + f(uv) = h$  untuk semua  $v \in V(G)$  yang *adjacent* dengan  $u$ . Bilangan  $h$  disebut *magic constant*. *Graph* yang memenuhi *super vertex magic total*

labeling disebut *super vertex magic total graph*.

Jika pada *vertex magic total labeling* menghasilkan bobot setiap *vertex* yang tidak sama untuk setiap *vertex*  $u$  dan *vertex*  $v$  merupakan *vertex* yang *adjacent* dengan *vertex*  $u$  maka labelingnya disebut *vertex antimagic total labeling*.

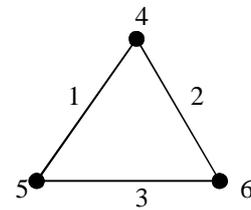
**Definisi 3.** (Baca, dkk., 2003)

Suatu pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$  disebut *vertex antimagic total labeling* dari  $(p, q)$ -*graph*  $G$  jika bobot dari *vertex*  $w_f(u) = f(u) + f(uv)$ , untuk setiap dan  $v \in V(G)$  yang *adjacent* dengan  $u$  semuanya berbeda. Jika bobot-bobot *vertex* pada *vertex antimagic total labeling* membentuk suatu barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelannya disebut  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling*.

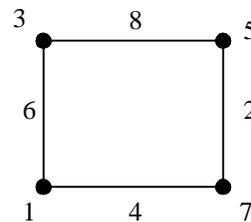
**Definisi 4.** (Baca, dkk., 2003)

Suatu pemetaan bijektif  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$  disebut  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* dari  $(p, q)$ -*graph*  $G$  jika bobot dari semua *vertex* membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$   $W = \{w_f(u) \mid u \in V\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d\}$ . Sebagai contoh, diberikan ilus-trasi pada Gambar 1 berikut, yaitu  $(a, d)$  *vertex*

*antimagic total labeling* atau  $(a, d)$ VATL pada *cycle*.



(a)



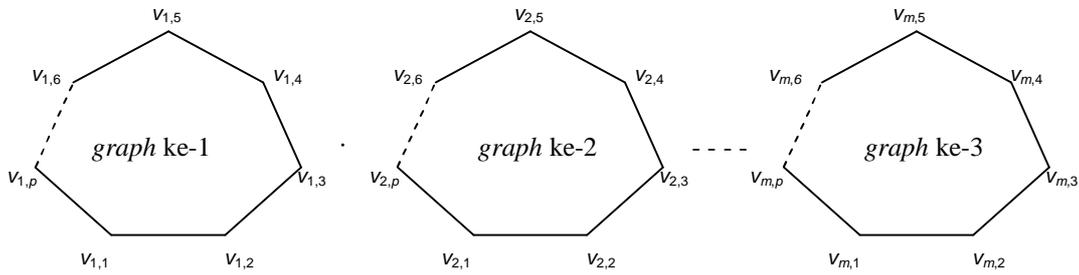
(b)

Gambar 1. (a) :  $(7, 2)$  VATL dan (b) :  $(11, 2)$  VATL.

**Vertex Antimagic Total Labeling pada Multicycle Graph ( $mC_p$ )**

Pada bagian ini adalah hasil dari pengembangan peneliti mengenai *vertex antimagic total labeling* pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ). Pertama, akan dibahas mengenai *basic counting* untuk menentukan batasan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  dari *vertex antimagic total labeling* pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ). Kedua, akan dibahas mengenai *multicycle graph* ( $mC_p$ ) yang memenuhi *vertex antimagic total labeling*.

Pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ), setiap *cycle* memiliki  $p$  buah *vertex* dan  $p$  buah *edge* sehingga *multicycle graph* memiliki  $mp$  buah *vertex* ( $|V| = mp$ ) dan  $mp$  buah *edge* ( $|E| = mp$ ).



Gambar 2. Multicycle Graph ( $mC_n$ )

Jumlah total dari *vertex* dan *edge* adalah  $2mp$  ( $|V| + |E| = 2mp$ ). Misalkan  $S_w$  adalah jumlah semua bobot *vertex*,  $S_v$  adalah jumlah semua label *vertex*, dan  $S_e$  adalah jumlah semua label *edge*. Bobot *vertex* pada *multicycle graph* adalah jumlah dari label *vertex* dan dua *edge* yang *incident* dengan *vertex* tersebut.

$$S_v + 2S_e = S_w$$

$$(S_v + S_e) + S_e = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(mp-1)d)$$

$$mp(2mp+1) + S_e = (mp)a + \left(\frac{mp(mp-1)}{2}\right)d \quad (3.1)$$

Berikut ini diberikan Teorema-teorema hasil pengembangan peneliti tentang  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* pada *multicycle graph*. Teorema pertama tentang batas nilai  $a$  dan  $d$  agar *multicycle graph* memenuhi  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* untuk semua  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .

**Teorema 1.**

Setiap *multicycle graph* ( $mC_p$ ) mempunyai  $(a, d)$  *vertex antimagic total*

*labeling* dengan  $a \geq 6$  dan  $d \leq 6$  untuk semua  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .

**Bukti :**

Karena pelabelan dimulai dari angka 1 maka bobot *vertex* terkecil adalah 6, yaitu jumlah label satu *vertex* dan dua *edge* yang *incident* dengan *vertex* tersebut ambil label-labelnya 1, 2, dan 3 atau  $a = 1 + 2 + 3 \geq 6$ .

Bobot *vertex* yang paling besar adalah

$$a + (mp-1)d \leq 2mp + (2mp-1) + (2mp-2)$$

Untuk  $a = 6$  diperoleh

$$6 + (mp-1)d \leq 6mp - 3$$

$$d \leq \frac{6mp - 9}{mp - 1} \approx 6$$

Jadi untuk sebarang  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$  diperoleh  $a \geq 6$  dan  $d \leq 6$ .  $\square$

Hasil selanjutnya adalah teorema yang menunjukkan bahwa *multicycle graph* memenuhi VATL.

**Teorema 2.**

Pada *multicycle* ( $mC_p$ ) terdapat  $(2mp + 2, 1)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .

**Bukti :**

Konstruksi *multicycle graph* ( $mC_p$ ) dengan label *vertex* ke- $j$  dari *graph* ke- $i$  ( $x_{i,j}$ ) dengan  $i=1,2,\dots,m$  dan  $j=1,2,\dots,p$  sebagai berikut :

$$f(x_{i,j}) = p(2m-i) + j$$

Sedangkan label dari *edgenya* adalah

$$f(x_{i,j}x_{i,j+1}) = ip - j + 1, \quad j = 1,2,\dots,p-1$$

dan

$$f(x_{i,1}x_{i,p}) = p(i-1) + 1$$

Dari konstruksi pelabelan tersebut berakibat label-label *edgenya*  $\{1,2,\dots,mp\}$  dan label-label *vertexnya*  $\{(mp+1), (mp+2), \dots, 2mp\}$

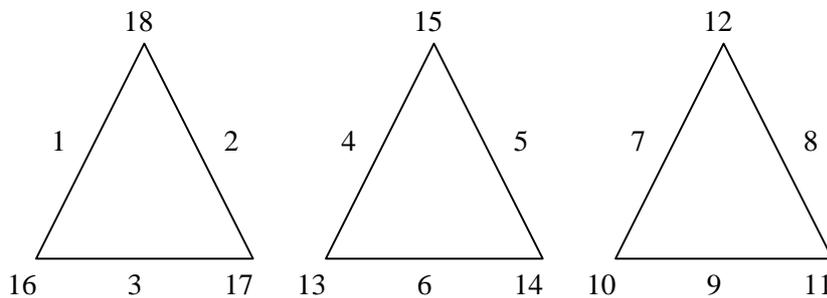
$$\text{sehingga } S_e = \frac{mp(mp+1)}{2}.$$

Untuk  $d = 1$  maka Persamaan (3.1) menjadi

$$\begin{aligned} mp(2mp+1) + \frac{mp(mp+1)}{2} &= (mp)a + \left(\frac{mp(mp-1)}{2}\right) \\ 5mp+3 &= 2a + mp-1 \\ a &= 2mp+2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti *multicycle graph* memenuhi  $(2mp+2, 1)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .  $\square$

Sebagai ilustrasi dari Teorema 2 diberikan contoh pelabelan untuk beberapa *multicycle*. Pada Gambar 3 merupakan contoh pelabelan *multicycle*  $(20, 1)$ VATL untuk  $3C_3$ .



Gambar 3.  $(20, 1)$  VATL untuk  $3C_3$

Teorema selanjutnya diberikan untuk VATL pada *multicycle* dengan  $d = 2$ .

**Teorema 3.**

Pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ) juga mempunyai  $(2mp+3, 2)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .

**Bukti :**

Konstruksi *multicycle graph* ( $mC_p$ ) dengan label *vertex* ke- $j$  dari *graph* ke- $i$  ( $x_{i,j}$ ) sebagai berikut :

untuk  $p$  ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2p(i-1) + 4j - 3 & ; j=1,2,\dots,\frac{p+1}{2} \\ 2p(i-1) + 4\left(j - \frac{p+1}{2}\right) - 1 & ; j=\frac{p+1}{2}+1,\dots,p-1 ; p>3 \\ 2p(m-i) + 2p - 3 & ; j=p \end{cases}$$

untuk  $p$  genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2p(i-1)+1 & ; j=1 \\ 2p(i-1)+2(p-j)+3 & ; j=2, \dots, p-2 \\ 2p(m-i)+2(p-j)-3 & ; j=p-1, p \end{cases} \quad \text{dengan} \quad i=1, 2, \dots, m$$

Sedangkan label-label *edgenya* sebagai berikut :

untuk  $p$  ganjil

$$p = 3, 7, 11, \dots$$

$$f(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} 2p(m-i)+2j & ; j=1, 3, \dots, p-3 \\ 2p(i-1)+2j & ; j=2, 4, \dots, p-2 \\ 2p(i-1)+2j & ; j=p-1 \end{cases} \quad \text{dan}$$

$$f(x_{i,1}x_{i,p}) = 2ip$$

dan  $p = 5, 9, 13, \dots$

$$f(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} 2p(m-i) + \frac{3p+1}{2} - j + 1 & ; j=1, 3, \dots, \frac{p+1}{2} \\ 2p(i-1) + \frac{p-1}{2} - 2 & ; j=2, 4, \dots, \frac{p-1}{2} \\ 2pi & ; j = \frac{p+3}{2} \\ 2p(m-i) + (p-1) - 2(j - \frac{p+5}{2}) & ; j = \frac{p+5}{2}, \frac{p+9}{2}, \dots, p-2 \\ 2p(i-1) + \frac{p-1}{2} - 2 & ; j = \frac{p+7}{2}, \frac{p+11}{2}, \dots, p-1 \end{cases} \quad \text{dan}$$

$$f(x_{i,1}x_{i,p}) = 2ip$$

untuk  $p$  genap

$$f(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} 2p(m-i)+2j & ; j=1, 3, \dots, p-3 \\ 2p(i-1)+2j & ; j=2, 4, \dots, p-2 \\ 2p(i-1)+2j & ; j=p-1 \end{cases} \quad \text{dan}$$

$$f(x_{i,1}x_{i,p}) = 2ip$$

dengan  $i=1, 2, \dots, m$  dan  $x_{i,j}x_{i,j+1}$  merupakan *edge* yang menghubungkan *vertex* ke- $j$  dan *vertex* ke- $(j+1)$  dari *graph* ke- $i$  serta  $x_{i,1}x_{i,p}$  merupakan *edge* yang menghubungkan *vertex* ke-1 dan *vertex* ke- $p$  dari *graph* ke- $i$ .

Dari pelabelan di atas, diperoleh semua label *vertex* berupa bilangan ganjil dan semua label *edge* berupa bilangan genap. Jumlah semua label *vertex*

$$S_v = \sum_{i=1}^{mp} (2i-1) = (mp)^2$$

dan jumlah semua label *edge*

$$S_e = \sum_{i=1}^{mp} 2i = mp(mp+1). \text{ Karena bobot}$$

tiap *vertex* dari *multicycle graph* ( $mC_p$ ) adalah  $w(x) = f(x) + f(xy) + f(xz)$  dengan  $y$  dan  $z$  merupakan *vertex-vertex* yang *adjacent* dengan  $x$ , diperoleh bobot *vertex* semuanya bilangan ganjil.

Untuk  $d = 2$ , Persamaan (3.1) menjadi

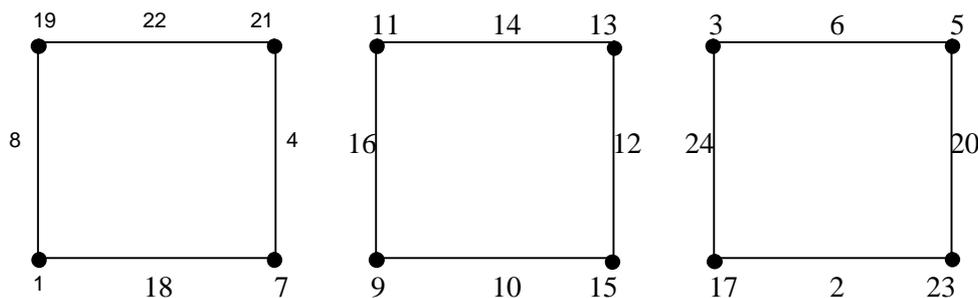
$$mp(2mp+1) + mp(mp+1) = (mp)a + \left(\frac{mp(mp-1)}{2}\right)2$$

$$3mp+2 = a+mp-1$$

$$a = 2mp+3$$

Jadi terbukti bahwa pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ) terdapat  $(2mp + 3, 2)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .  $\square$

Sebagai ilustrasi dari Teorema 3 diberikan contoh pelabelan untuk



Gambar 4  $(27, 2)$  VATL pada  $3C_4$ .

beberapa *multicycle*. Pada Gambar 4 merupakan contoh pelabelan  $(27, 2)$  VATL untuk  $3C_4$ .

**SIMPULAN**

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ), yakni gabungan beberapa *cycle graph* yang identik (a,d) VATL.

- Setiap *multicycle graph* ( $mC_p$ ) mempunyai  $(a, d)$  *vertex antimagic total labeling* dengan  $a \geq 6$  dan  $d \geq 6$  untuk semua  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .
- Pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ) terdapat  $(2mp + 2, 1)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .
- Pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ) juga mempunyai  $(2mp + 3, 2)$  VATL untuk  $m \geq 1$  dan  $p \geq 3$ .

Dalam artikel ini telah dibahas keberlakuan  $(a,d)$  VATL pada *multicycle graph* ( $mC_p$ ) untuk  $d = 1$  dan  $d = 2$ . Pembaca dapat meneliti untuk nilai  $d$  lain

yang berlaku atau keberlakuannya pada gabungan *graph* yang lain.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Baca, M., dkk. (2003). Vertex Antimagic Total Labeling of Graph. *Discuss. Math. Graph Theory*, 23, 67 – 83.
- Bodendiek, R. dan Walther, G. (1993). Arithmetisch Antimagische Graphen. Dalam Wagner, K. dan Bodendiek, R., *Graphentheorie III*, Mannheim : BI – Wiss. Verl.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory*. Boston : Academic Press.
- Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). Magic Valuations of Finite Graphs. *Canad. Math Bull*, 13, 451 – 461.
- MacDougall, J.A., dkk. (2002). Vertex Magic Total Labelings of Graphs. *Util. Math*, 61, 3 – 21.
- Wallis, W.D. (2001). *Magic Graph*, Boston : Birkhauser.