PERMANEN DAN DOMINAN SUATU MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto
Jurusan Matematika FMIPA UNS
sis.mipauns@yahoo.co.id

Abstrak

Misalkan $\Re$ himpunan bilangan real. Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi maksimum $(\oplus)$ dan penjumlahan $(\otimes)$. Setiap matriks persegi atas aljabar Max-Plus dapat dikaitkan dengan perrmanen dan dominan. Dari aljabar Max-Plus dapat dibentuk aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam $\Re_{max}$ atau $I(\Re)_{max}$ dilengkapi dengan operasi maksimum $(\overline{\oplus})$ dan penjumlahan $(\overline{\otimes})$. Dapat dibentuk himpunan matriks persegi atas aljabar Max-Plus interval. Dalam penelitian ini, akan dikaji tentang permanen dan dominan matriks atas aljabar Max-Plus interval, hubungan antara permanen dan dominan, serta bideterminan matriks atas aljabar Max-Plus interval. Dari hasil penelitian diperoleh formula permanen dan dominan, dominan selalu lebih kecil atau sama dengan permanen dan formula bideterminan.

Kata kunci : Permanen, dominan, matriks, aljabar Max-Plus interval.

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas. (Bacelli, *et.al*, 2001). Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{\varepsilon\}$ dilengkapi operasi maksimum ($\oplus$) dan plus ($\otimes$) dengan $\Re$ himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Elemen identitas terhadap maksimum dan plus berturut-turut adalah $-\infty$ dan 0. Dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen dalam $\Re_{max}$, ditulis $\Re_{max}^{n \times n}$. Himpunan $\Re_{max}^{n \times n}$ selanjutnya disebut himpunan matriks atas aljabar Max-Plus. Himpunan $\Re_{max}^{n \times n}$ dilengkapi dengan operasi maksimum dan plus merupakan dioid yaitu semiring yang idempoten (Akian, *et. al*, 1994; Bacelli, *et al*, 2001; Farlow, 2009)

Dalam aljabar konvensional, telah dibahas mengenai determinan matriks beserta sifat-sifatnya (Hefferon, 2001; Meyer, 2000). Sejalan dengan pembahasan tersebut yaitu tentang determinan suatu matriks di dalam aljabar konvensional beserta sifat-sifatnya, Farlow (2009) telah membahas determinan matriks di dalam aljabar Max-Plus. Namun, terdapat perbedaan antara pengertian determinan matriks di dalam aljabar konvensional dan di aljabar Max-Plus. Hal ini disebabkan tidak adanya invers terhadap penjumlahan di dalam aljabar Max-Plus. Istilah determinan matriks di dalam aljabar Max-Plus digantikan oleh permanen dan dominan suatu matriks.

Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval. Aljabar Max-Plus interval yaitu $I(\Re)_{\max}$ dilengkapi dengan operasi $(\overline{\oplus})$ dan $(\overline{\otimes})$. Dari generalisasi ini muncul himpunan matriks atas aljabar Max-Plus interval yaitu $I(\Re)_{\max}^{m\times n}$ merupakan himpunan matriks berukuran $m \times n$ yang elemen-elemennya dalam $I(\Re)_{\max}$ (Rudhito, 2011). Jika $m = n$ diperoleh himpunan matriks persegi, yaitu $I(\Re)_{\max}^{n\times n}$.

Selanjutnya, dengan adanya matriks atas aljabar Max-Plus interval dan penelitian yang dilakukan oleh Farlow (2009) yaitu tentang permanen dan dominan matriks atas aljabar Max-Plus, hubungan antara permanen dan dominan, serta bideterminan matriks atas aljabar Max-Plus memungkinkan untuk diteliti konsep-konsep tersebut di dalam aljabar Max-Plus interval. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis ingin mengkaji tentang permanen dan dominan matriks atas aljabar Max-Plus interval, hubungan antara permanen dan dominan, serta bideterminan matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Sebelum dibahas hasil penelitian, diberikan hal-hal yang diperlukan untuk penelitian ini. Adapun hal-hal yang diperlukan yaitu definisi, lema, dan teorema tentang aljabar Max-Plus, matriks atas aljabar Max-Plus, permanen dan dominan matriks atas aljabar Max-Plus, aljabar Max-Plus interval serta matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Berikut adalah definisi tentang aljabar Max-Plus dan matriks dalam aljabar Max-Plus beserta operasinya (Bacelli, *et al*, 2001; Cuninghame-Green, 2004; Farlow, 2009; Konigsberg, 2009).

Definisi 1.1. Misalkan $\Re$ himpunan bilangan real, didefinisikan himpunan $\Re_{max} = \Re \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Struktur aljabar dari $\Re_{max}$ yang dilengkapi dengan operasi $\oplus$ yaitu "maksimum" dan $\otimes$ yaitu "plus" merupakan semifield idempoten, selanjutnya disebut aljabar Max-Plus dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max} = (\Re_{max}; \oplus, \otimes)$.

Definisi 1.2. Himpunan matriks berukuran $n\times m$ dengan elemen-elemen dalam $\Re_{max}$ dinotasikan dengan $\Re_{max}^{n\times m}$ yaitu $\Re_{max}^{n\times m} = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in \Re_{max}; i =$

$1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m\}$. Elemen baris ke-$i$ dan kolom ke-j dari matriks $A \in \Re_{max}^{n \times m}$ dinyatakan oleh a_{ij} atau $[A]_{ij}$.

Definisi 1.3. Berikut beberapa operasi matriks dalam Aljabar Max-Plus :

a. Untuk matriks $A, B \in \Re_{max}^{n \times m}$, didefinisikan $A \oplus B$ dengan $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\ [a_{ij}, b_{ij}]$.
b. Untuk $A \in \Re_{max}^{n \times k}$, $B \in \Re_{max}^{k \times n}$, didefinisikan $A \otimes B$ dengan $[A \otimes B]_{ij} = a_{ij} \otimes b_{ij} = \max_{j \in \{1,2,\ldots k\}}[a_{ij}, b_{ij}]$
c. Tranpose dari matrik ditulis A^T dan didefinisikan seperti dalam aljabar konvensional $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$
d. Matriks identitas Max-Plus ditulis E_n, dengan $E_n \in \Re_{max}^{n \times n}$ didefinisikan :
$$[E]_{ij} = \begin{cases} e, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}.$$
e. Matriks netral Max-Plus ditulis $\mathcal{E}_n$, dengan $\mathcal{E}_n \in \Re_{max}^{n \times n}$ didefinisikan $[\mathcal{E}]_{ij} = \varepsilon$.
f. Untuk suatu matriks $A \in \Re_{max}^{n \times n}$ dan bilangan bulat positif k, pangkat k dari A ditulis $A^{\otimes k}$ didefinisikan oleh $A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{k \text{ kali}}$. Untuk $k = 0$, $A^{\otimes 0} = E_n$.
g. Untuk sebarang matriks $A \in \Re max n \times n$ dan $\alpha \in \Re max$, $\alpha \otimes A$ didefinisikan oleh $[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$.

Himpunan $\Re_{max}^{n \times n}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ ditulis $\mathbb{R}_{max}^{n \times n} = (\Re_{max}^{n \times n}; \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral dan elemen identitas masing-masing adalah $\mathcal{E}_n$ dan E_n.

Berikut definisi dan lema yang berkaitan dengan fungi eksponensial, serta permanen dan dominan matriks atas aljabar Max-Plus disajikan sebagai berikut (Farlow, 2009) :

Definisi 1.4. Jika $p : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dan $u \in [-\infty, \infty)$, didefinisikan $p \asymp e^{su}$ jika dan hanya jika $\lim_{s \to \infty} s^{-1} \ln(p) = u$.

Lema 1.5. Jika $f \asymp e^{sa}$ dan $g \asymp e^{sb}$ maka $f + g = e^{s(a \oplus b)}$ dan $fg = e^{s(a \oplus b)}$.

Untuk membuktikan Lema 1.5 digunakan Definisi 1.4.

Dalam aljabar konvensional, misalkan $A = (a_{ij}) \in \Re^{n \times n}$ yaitu matriks berukuran $n \times n$, determinan matriks A adalah $\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} sign(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ dimana P_n

menyatakan himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$ dan $sign\,(\sigma)$ adalah tanda dari permutasi σ. Jika σ permutasi genap maka $sign\,(\sigma)$ adalah " + ", sedangkan jika σ permutasi ganjil maka $sign\,(\sigma)$ adalah " – ".

Misalkan $A = (a_{ij}) \in \Re_{max}^{n\times n}$, permanen dari matriks A didefinisikan hampir sama dengan determinan matriks $A \in \Re^{n\times n}$ tetapi $sign\,(\sigma)$ dihilangkan. Untuk tetap mempertahankan $sign\,(\sigma)$ didefinisikan bideterminan dari matriks $A \in \Re_{max}^{n\times n}$.

Definisi 1.6. Untuk matriks $A = (a_{ij}) \in \Re_{max}^{n\times n}$ permanen dari A didefinisikan $\text{perm}\,(A) = \bigoplus_{\sigma \in P_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$, dengan P_n adalah himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$.

Berikut adalah definisi dari dominan. Untuk merumuskan dominan matriks $A \in \Re_{max}^{n\times n}$ digunakan matriks z^A dengan z adalah variabel. Matriks z^A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen $z^{a_{ij}}$.

Definisi 1.7. Dominan dari matriks A didefinisikan :

$$\text{dom}(A) = \begin{cases} \text{pangkat tertinggi dalam det } (z^A), & \text{jika det } (z^A) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika det } (z^A) = 0 \end{cases}$$

Dengan mengingat lema 1.5 jika z diganti dengan e^s diperoleh definisi tentang matriks e^{sA} dan definisi dom (A) yang merupakan bentuk lain dari definisi dom (A) pada Definisi 1.7 sebagai berikut :

Definisi 1.8. Diberikan matriks $A = (a_{ij}) \in \Re_{max}^{n\times n}$, matriks e^{sA} mempunyai elemen $e^{sa_{ij}}$ dimana $a_{ij} \in \Re_{max}$ adalah elemen dari A atau dapat ditulis, $[e^{sA}]_{ij} = e^{sa_{ij}}$.

Definisi 1.9. Misalkan $A \in \Re_{max}^{n\times n}$,

$$\text{dom}(A) = \begin{cases} \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln |\det(e^{sA})|, & \text{jika } \det(e^{sA}) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika } \det(e^{sA}) = 0 \end{cases}$$

Menurut Definisi 1.4, dikatakan bahwa $|\det\,(e^{sA})| \asymp e^{s\,dom\,(A)}$. Hubungan serupa dipenuhi untuk permanen yaitu $\text{perm}\,(e^{sA}) \asymp e^{s\,\text{perm}\,(A)}$.

Karena perm (A) adalah maksimum dari nilai diagonal untuk semua permutasi kolom pada matriks A maka dom (A) $\leq$ perm (A). Sifat ini disajikan pada lema berikut :

Lema 1.10. Misalkan $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$ maka dom (A) $\leq$ perm (A).

Definisi 1.11. Untuk $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$, misalkan bahwa $w_A(\sigma) = a_{1\sigma(1)} \otimes a_{2\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes a_{n\sigma(n)}$, P_n^e himpunan permutasi genap dan P_n^O permutasi ganjil dari $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bideterminan dari A adalah $\text{Bidet}\,(A) = \begin{pmatrix}\Delta_1\,(A)\\ \Delta_2\,(A)\end{pmatrix}$ dengan $\Delta_1\,(A) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^e} w_A(\sigma)$ dan $\Delta_2\,(A) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^o} w_A(\sigma)$.

Dengan memperhatikan definisi dari bideterminan dan permanen suatu matriks $A \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$, diperoleh bahwa permanen dari matriks A adalah $\text{perm}\,(A) = \Delta_1\,(A) \oplus \Delta_2\,(A)$.

Selanjutnya, disajikan konsep aljabar Max-Plus interval dan matriks di dalamnya (Rudhito, 2011).

Interval tertutup x dalam $\mathfrak{R}_{max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathfrak{R}_{max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \mathfrak{R}_{max} | \underline{\mathrm{x}} \preccurlyeq_m x \preccurlyeq_m \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathfrak{R}_{max}$ disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \mathfrak{R}_{max}$ dapat dinyatakan sebagai interval [x,x].

Definisi 1.12. Dibentuk $I(\mathfrak{R})_{max} = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] | \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathfrak{R}, \varepsilon \prec m\, \underline{\mathrm{x}} \preccurlyeq m \overline{\mathrm{x}}\} \cup \varepsilon$, dengan ε = [$\varepsilon$,$\varepsilon$]. Pada himpunan $I(\mathfrak{R})_{max}$ didefinisikan operasi " $\overline{\oplus}$ " dan " $\overline{\otimes}$ " dengan $\mathrm{x}\ \overline{\oplus}\ \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{y}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{y}]$ dan $\mathrm{x}\ \overline{\otimes}\ \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{y}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{y}]$ untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in I(\mathfrak{R})_{max}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{max}$ dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral ε = $[\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $\overline{0} = [0,0]$. Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan $I(\mathbb{R})_{max} = (I(\mathfrak{R})_{max}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$.

Definisi 1.13. Untuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}], \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{y}}] \in I(\mathfrak{R})_{max}$ didefinisikan $\mathrm{x} \preccurlyeq_{Im} \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{x}\ \overline{\oplus}\ \mathrm{y} = \mathrm{y} \Leftrightarrow \underline{\mathrm{x}} \preccurlyeq_m \underline{\mathrm{y}}$ dan $\overline{\mathrm{x}} \preccurlyeq_m \overline{\mathrm{y}}$.

Definisi 1.14. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\mathfrak{R})_{max}$ yaitu $I(\mathfrak{R})_{max}^{m\times n} = \{\mathrm{A} = [\mathrm{A}_{ij}] | \mathrm{A}_{ij} \in I(\mathfrak{R})_{max};\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Matriks anggota $I(\mathfrak{R})_{max}^{m\times n}$ disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 1.15. Struktur aljabar dari $I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ yang dilengkapi dengan operasi

$\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\mathbb{R})_{max}^{n\times n} = \left(I(\Re)_{max}^{n\times n}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\Re)_{max}^{n\times n}$ merupakan semimodul atas $I(\Re)_{max}$.

Definisi 1.16. Untuk $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}$ didefinisikan matriks $\underline{\mathrm{A}} = [\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{ij}}] \in \Re^{m\times n}$ dan $\overline{\mathrm{A}} = [\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{ij}}] \in \Re^{m\times n}$ masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.

Definisi 1.17. Diberikan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}$, dengan $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu

$$[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = \{A \in \Re_{max}^{m\times n} \mid \underline{\mathrm{A}} \preccurlyeq_m A \preccurlyeq_m \overline{\mathrm{A}}\}$$

dan

$$I(\Re_{max}^{m\times n})_{\mathrm{b}} = \{[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \mid \mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{m\times n}\},$$

dimana $\underline{\mathrm{A}} \preccurlyeq_m A \Leftrightarrow \underline{\mathrm{A}} \overline{\oplus} A = A$.

Definisi 1.18.

1. Untuk $\alpha \in I(\Re)_{max}$, $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] \in I(\Re_{max}^{m\times n})_{\mathrm{b}}$ didefinisikan
   i. $\alpha \overline{\otimes} [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{\mathrm{A}}, \overline{\alpha} \otimes \overline{\mathrm{A}}]$
   ii. $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \overline{\oplus} [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] = [\underline{\mathrm{A}} \oplus \overline{\mathrm{A}}, \underline{\mathrm{B}} \oplus \overline{\mathrm{B}}]$
2. Untuk $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{m\times k})_{\mathrm{b}}$, $[\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] \in I(\Re_{max}^{k\times n})_{\mathrm{b}}$ didefinisikan $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \overline{\otimes} [\underline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}] = [\underline{\mathrm{A}} \otimes \overline{\mathrm{A}}, \underline{\mathrm{B}} \otimes \overline{\mathrm{B}}]$.

Teorema 1.19. Struktur aljabar dari $I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ yang dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\mathbb{R}_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}} = (I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ merupakan semimodul atas $I(\Re)_{max}$.

Semiring $I(\mathbb{R})_{max}^{n\times n} = \left(I(\Re)_{max}^{n\times n}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes}\right)$ isomorfis dengan semiring $I(\overline{\Re}_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}} = (I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}; \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ dengan pemetaan $f: I(\Re)_{max}^{n\times n} \to I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ $f(\mathrm{A}) = [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}], \forall \mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$. Semimodul $I(\Re)_{max}^{n\times n}$ atas $I(\Re)_{max}$ isomorfis dengan semimodul $I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ atas $I(\Re)_{max}$. Dengan demikian untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ dengan $\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}} \in \Re_{max}^{n\times n}$ dapat ditentukan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dimana $[\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{ij}}, \overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{ij}}] \in I(\Re)_{max}$ untuk setiap i dan j. Dengan demikian matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$. Interval matriks $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] \in I(\Re_{max}^{n\times n})_{\mathrm{b}}$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$. Akibat isomorfisme di atas maka berlaku : $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \overline{A}]$, $A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas hasil penelitian ini. Hasil penelitian meliputi permanen dan dominan dari suatu matriks atas aljabar Max-Plus interval, hubungan antara permanen dan dominan, serta bideterminan matriks atas aljabar Max-Plus interval.

Misalkan $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ dan $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$, $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathfrak{R}_{max}^{n\times n}$. Karena $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$ maka $\underline{a}_{ij} \preccurlyeq_m \overline{a}_{ij}$ untuk setiap $i.j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oleh karena itu, $\mathrm{perm}\,(\underline{A}) = \bigoplus_{\sigma \in P_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (\underline{a}_{i\sigma(i)}) \leq \mathrm{perm}\,(\overline{A}) = \bigoplus_{\sigma \in P_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (\overline{a}_{i\sigma(i)})$ dengan P_n adalah himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$. Permanen matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.1. Diberikan matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Permanen matriks A didefinisikan $\mathrm{perm}\,(A) = [\mathrm{perm}\,(\underline{A}), \mathrm{perm}\,(\overline{A})]$.

Untuk mendefinisikan dominan suatu matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ digunakan matriks z^A dengan z adalah variabel. Matriks z^A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen $z^{[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]} = [z^{\underline{a}_{ij}}, z^{\overline{a}_{ij}}]$.

Definisi 2.2. Dominan matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, didefinisikan $\mathrm{dom}\,(A) = \left[\min\left(\mathrm{dom}\,(\underline{A}), \mathrm{dom}\,(\overline{A})\right), \mathrm{dom}\,(\overline{A})\right]$, dengan

$$\mathrm{dom}(\underline{A}) = \begin{cases} \text{pangkat tertinggi dalam det } (z^{\underline{A}}), & \text{jika det } (z^{\underline{A}}) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika det } (z^{\underline{A}}) = 0 \end{cases}$$

dan $$\mathrm{dom}(\overline{A}) = \begin{cases} \text{pangkat tertinggi dalam det } \left(z^{\overline{A}}\right), & \text{jika det } \left(z^{\overline{A}}\right) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika det } \left(z^{\overline{A}}\right) = 0 \end{cases}$$

Dengan mengingat lemma 1.5 jika z diganti dengan e^s diperoleh definisi berikut :

Definisi 2.3. Diberikan matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, matriks e^{sA} mempunyai elemen $e^{[s\underline{a}_{ij}, s\overline{a}_{ij}]} = [e^{s\underline{a}_{ij}}, e^{s\overline{a}_{ij}}]$ dimana $\underline{a}_{ij} \in \mathfrak{R}_{max}$ adalah elemen dari $\underline{A}$ dan $\overline{a}_{ij} \in \mathfrak{R}_{max}$ adalah elemen dari $\overline{A}$.

Dengan memperhatikan Definisi 1.7 dan Definisi 1.9, bahwa definisi dominan matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{max}^{n\times n}$ pada Definisi 2.2 ekuivalen dengan definisi dominan pada definisi sebagai berikut :

Definisi 2.4. Misalkan matriks $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, $\text{dom}\,(\mathrm{A}) = \left[\min\left(\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})\right), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})\right]$, dengan

$$\text{dom}(\underline{\mathrm{A}}) = \begin{cases} \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln\left|\det(e^{s\underline{\mathrm{A}}})\right|, & \text{jika } \det(e^{s\underline{\mathrm{A}}}) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika } \det(e^{s\underline{\mathrm{A}}}) = 0 \end{cases}$$

dan $$\text{dom}(\overline{\mathrm{A}}) = \begin{cases} \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln\left|\det(e^{s\overline{\mathrm{A}}})\right|, & \text{jika } \det\left(e^{s\overline{\mathrm{A}}}\right) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika } \det\left(e^{s\overline{\mathrm{A}}}\right) = 0 \end{cases}.$$

Menurut Definisi 1.4, dapat dikatakan bahwa $\left|\det(e^{s\underline{\mathrm{A}}})\right| \asymp e^{s\,\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}})}$ dan $\left|\det(e^{s\overline{\mathrm{A}}})\right| \asymp e^{s\,\text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})}$. Hubungan serupa dipenuhi untuk permanen yaitu perm $(e^{s\underline{\mathrm{A}}}) \asymp e^{s\,\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}})}$ dan $\text{perm}\left(e^{s\overline{\mathrm{A}}}\right) \asymp e^{s\,\text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})}$.

Karena perm ($\underline{\mathrm{A}}$) dan perm ($\overline{\mathrm{A}}$) adalah maksimum dari nilai diagonal untuk semua permutasi kolom dalam matriks $\underline{\mathrm{A}}$ dan $\overline{\mathrm{A}}$ maka diperoleh lema berikut :

Lema 2.5. Misalkan $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ maka dom (A) $\preccurlyeq_{Im}$ perm (A).

Bukti : Perhatikan bahwa, $\text{dom}\,(\mathrm{A}) = \left[\min\left(\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})\right), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})\right]$ dan

$\text{perm}\,(\mathrm{A}) = [\text{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})]$.

Menurut lema 1.10, jika $A \in \Re_{max}^{n\times n}$ maka dom (A) $\leq$ perm (A). Dalam hal ini, dapat ditulis bahwa, jika $A \in \Re_{max}^{n\times n}$ maka $\text{dom}\,(A) \preccurlyeq_m \text{perm}\,(A)$. Oleh karena itu, karena $\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}} \in \Re_{max}^{n\times n}$ maka $\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}}) \preccurlyeq_m \text{perm}\,(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}}) \preccurlyeq_m \text{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})$.

Terdapat 2 kemungkinan :

a. $\text{dom}\,(\mathrm{A}) = [\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})] \preccurlyeq_{Im} [\text{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})] = \text{perm}\,(\mathrm{A})$,

b. $\text{dom}\,(\mathrm{A}) = [\text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}}), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})] \preccurlyeq_{Im} [\text{dom}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{dom}\,(\overline{\mathrm{A}})]$

$\preccurlyeq_{Im} [\text{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})] = \text{perm}\,(\mathrm{A})$.

Oleh karena itu, dom (A) = $\left[\min\left(\text{dom}(\underline{\mathrm{A}}), \text{dom}(\overline{\mathrm{A}})\right), \text{dom}(\overline{\mathrm{A}})\right]$

$\preccurlyeq_{Im} [\text{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \text{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})]$

$= \text{perm}\,(\mathrm{A})$.

Selanjutnya, sejalan dengan pembahasan pada aljabar Max-Plus dapat didefinisikan bideterminan matriks $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ sebagai berikut :

Definisi 2.6. Untuk $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij}) \in I\Re max n\times n$ dengan A≈A, A, misalkan bahwa $w_{\underline{\mathrm{A}}}(\sigma) = \underline{\mathrm{a}}_{1\sigma(1)} \otimes \underline{\mathrm{a}}_{1\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{\mathrm{a}}_{n\sigma(n)}$ dan $w_{\overline{\mathrm{A}}}(\sigma) = \overline{\mathrm{a}}_{1\sigma(1)} \otimes \overline{\mathrm{a}}_{1\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \overline{\mathrm{a}}_{n\sigma(n)}$, P_n^e himpunan permutasi genap dan P_n^O permutasi ganjil dari $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bideterminan matriks A adalah $\mathrm{Bidet}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} [\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_1(\overline{\mathrm{A}})] \\ [\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})] \end{pmatrix}$ dengan $\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^e} w_{\underline{\mathrm{A}}}(\sigma)$, $\triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^e} w_{\overline{\mathrm{A}}}(\sigma)$, $\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^o} w_{\underline{\mathrm{A}}}(\sigma)$ dan $\triangle_2(\overline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^o} w_{\overline{\mathrm{A}}}(\sigma)$.

Berdasarkan definisi dari bideterminan dan permanen suatu matriks $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij}) \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, diperoleh teorema berikut :

Teorema 2.7. Misalkan $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij}) \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$. Jika bideterminan matriks A adalah $\mathrm{Bidet}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} [\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_1(\overline{\mathrm{A}})] \\ [\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})] \end{pmatrix}$ dengan $\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^e} w_{\underline{\mathrm{A}}}(\sigma)$, $\triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^e} w_{\overline{\mathrm{A}}}(\sigma)$, $\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^o} w_{\underline{\mathrm{A}}}(\sigma)$ dan $\triangle_2(\overline{\mathrm{A}}) = \bigoplus_{\sigma\in P_n^o} w_{\overline{\mathrm{A}}}(\sigma)$ P_n^e himpunan permutasi genap dan P_n^O permutasi ganjil dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ maka permanen matriks A adalah

$\mathrm{perm}\,(\mathrm{A}) = [\mathrm{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \mathrm{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})]$

dengan $\mathrm{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}) = \triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) \oplus \triangle_2(\underline{\mathrm{A}})$

dan $\mathrm{perm}\,(\overline{\mathrm{A}}) = \triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) \oplus \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})$.

Bukti : Misalkan $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij}) \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$ dengan $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$ dan $\underline{\mathrm{A}} = (\underline{\mathrm{a}}_{ij})$, $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{\mathrm{a}}_{ij}) \in \Re_{max}^{n\times n}$. Karena $\mathrm{Bidet}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} [\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_1(\overline{\mathrm{A}})] \\ [\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})] \end{pmatrix}$ maka $\mathrm{Bidet}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} [\triangle_1(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_1(\overline{\mathrm{A}})] \\ [\triangle_2(\underline{\mathrm{A}}), \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})] \end{pmatrix} \approx \left[\begin{pmatrix} \triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) \\ \triangle_2(\underline{\mathrm{A}}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) \\ \triangle_2(\overline{\mathrm{A}}) \end{pmatrix}\right] = [\mathrm{Bidet}\,(\underline{\mathrm{A}}), \mathrm{Bidet}\,(\overline{\mathrm{A}})]$. Oleh karena itu, $\mathrm{Bidet}\,(\underline{\mathrm{A}}) = \begin{pmatrix} \triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) \\ \triangle_2(\underline{\mathrm{A}}) \end{pmatrix}$ dan $\mathrm{Bidet}\,(\overline{\mathrm{A}}) = \begin{pmatrix} \triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) \\ \triangle_2(\overline{\mathrm{A}}) \end{pmatrix}$. Dengan demikian permanen matriks A adalah $\mathrm{perm}\,(\mathrm{A}) = [\mathrm{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}), \mathrm{perm}\,(\overline{\mathrm{A}})]$ dengan $\mathrm{perm}\,(\underline{\mathrm{A}}) = \triangle_1(\underline{\mathrm{A}}) \oplus \triangle_2(\underline{\mathrm{A}})$ dan $\mathrm{perm}\,(\overline{\mathrm{A}}) = \triangle_1(\overline{\mathrm{A}}) \oplus \triangle_2(\overline{\mathrm{A}})$.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diperoleh formula permanen dan dominan matriks $\mathrm{A} \in I(\Re)_{max}^{n\times n}$, dominan matriks A selalu lebih kecil atau sama dengan permanen matriks A dan formula bideterminan matriks A.

Setelah dikaji matriks yang mempunyai invers, selanjutnya dapat dikaji lebih lanjut kaitan permanen dan dominan matriks A dengan matriks yang mempunyai invers.

DAFTAR PUSTAKA

Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. (1994). Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.

Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. (2001). *Synchronization and Linearity,* New York : Joh Wiley & Sons.

Cuninghame-Green, R.A. Butkovi'c, P. (2004) Bases in Max-Algebra. *Linear Algebra and its Applications*. 389. 107–120

Farlow, K. G. (2009). *Max-Plus Algebra*, Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.

Hefferon, J. (2001). *Linear Algebra*, Vermont USA 05439 : Mathematics, Saint Michael's College Colchester.

Konigsberg Z. R. (2009). A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.

Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, New York : The Mac millan Publishing Company.

Rudhito, Andy. (2011). *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.