MASALAH NORM MINIMUM PADA RUANG HILBERT DAN APLIKASINYA

Karyati dan Dhoriva Urwatul Wutsqa
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstract

In this paper, will be discussed about the minimum norm in the pre- Hilbert Space, Hilbert space and its modification, and its application.

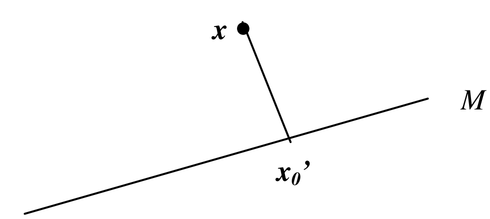
The results are: Let X be a pre-Hilbert space and M is a sub space of X. If an element $x \in X$ *is fixed, then :* $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\| \Leftrightarrow (x - m_0) \perp M$ *. If there is* $m_0 \in M$ *such that* $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$*, then* $m_0 \in M$ *is unique. Let* H *be a Hilbert space and* M *be a closed sub space of* H *. If* $x \in H$ *, then there is a unique element* $m_0 \in M$ *such that* $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$*,* $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\| \Leftrightarrow (x - m_0) \perp M$ *. Let* X *be a Hilbert space ,* M *be a closed sub space of* X *. If* $V = x + M$*, for an element* $x \in X$*, then there is a unique element of* $v_0 \in V$ *such that* $\|v_0\| = \min_{v \in V} \|v\|$*,* $v_0 \perp M$*.*

Key words : minimum norm, pre-Hilbert space, Hilbert space , orthogonality

1. PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Dalam geometri dijumpai masalah jarak dalam $\boldsymbol{R^2}$ dari suatu titik $\boldsymbol{x}$ ke garis $\boldsymbol{M}$**.** Jarak tersebut didefinisikan sebagai jarak terdekat dari $\boldsymbol{x}$ ke semua titik-titik dalam $\boldsymbol{M}$, yaitu titik $\boldsymbol{x_0}$**’** dalam $\boldsymbol{M}$ sedemikian sehingga garis yang melalui $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x_0}$**’** tegak lurus dengan garis $\boldsymbol{M}$ (lihat Gambar 1).



Gambar 1

Dari masalah tersebut, diperoleh bahwa masalah jarak terdekat berkaitan erat dengan orthogonalitas. Orthogonalitas sendiri, didefinisikan pada ruang hasil kali dalam (ruang Pre-Hilbert). Dengan demikian, masalah tersebut juga terkait juga dengan suatu hasil kali dalam (*Inner Product*) pada suatu ruang bernorma.

Ruang vektor R^2 merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap (ruang Hilbert). Dalam geometri, hasil kali dalam didefinisikan sebagai : $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ dengan $x=(x_1,x_2)$ dan $y=(y_1,y_2)$. Akan tetapi, hasil kali dalam tidak hanya demikian, masih ada banyak sekali hasil kali dalam yang didefinisikan lain. Sehingga, perlu dikaji lebih lanjut mengenai masalah proyeksi ini secara lebih umum (dalam Ruang hasil kali dalam umum).

Dalam tulisan ini akan diselidiki masalah norm minimum (jarak) pada ruang pre-Hilbert dan dikhususkan pada ruang Hilbert.

2. LANDASAN TEORI

Untuk kepentingan dalam tulisan ini, diperlukan definisi dan sifat-sifat tentang beberapa hal yang berkaitan dengan masalah optimisasi. Berikut diberikan definisi ruang vektor yang dirujuk pada [1]

A. Ruang Vektor

Definisi 2.1. (**Smith** : p.15) *Suatu ruang vektor V atas K adalah suatu himpunan bersama dua operasi biner, yaitu operasi jumlah vektor dan pergandaan skalar yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

a. $(\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{V})\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

b. $(\forall a,b,c\in V)\ (a+b)+c=a+(b+c)$

c. $(\exists!\boldsymbol{0}\in \boldsymbol{V})\ (\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V})\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

d. $(\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V})\ (\exists!(\boldsymbol{-a})\in \boldsymbol{V})\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{-a})=\boldsymbol{0}$

e. $(\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{V})(\forall r\in \boldsymbol{K})\ r(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=r\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{b}$

f. $(\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V})(\forall r,s\in \boldsymbol{K})(r+s)\boldsymbol{a}=r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{a}$

g. $(\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V})(\forall r,s\in \boldsymbol{K})\ (rs)\boldsymbol{a}=r(s\boldsymbol{a})$

h. $(\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{V})\ 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

Definisi berikut memberikan suatu batasan bilamana suatu himpunan bagian suatu ruang vektor disebut sub ruang vektor

Definisi 2.2 (Smith: p. 35) *Himpunan bagian tak kosong U dari ruang vektor V atas K disebut sub ruang vektor jika memenuhi kondisi sebagai berikut:*

$(\forall \mathbf{a},\mathbf{b}\in \mathbf{U})\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\in \mathbf{U}$

$(\forall \mathbf{a}\in \mathbf{U})(\forall r\in \mathbf{K})\ (r\,\mathbf{a})\in \mathbf{U}$

Definisi berikut menyatakan hubungan antara suatu vektor yang satu dengan vektor-vektor lainnya:

Definisi 2.3. (Smith : p.38) *Diberikan $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$ adalah vektor-vektor di dalam V. Suatu vektor v dalam V dikatakan* ***kombinasi linear*** *dari $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$, jika **v** dapat dinyatakan dalam bentuk: $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v_n}$, untuk $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots,\alpha_n \in \mathbf{K}$.*

Definisi 2.4. *Diberikan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3},\ldots, \mathbf{v_n}$ adalah vektor-vektor di dalam **V**. Vektor-vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3},\ldots, \mathbf{v_n}$ dikatakan membangun (merentang/span) ruang vektor **V**, jika setiap vektor di V merupakan kombinasi linear dari $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3},\ldots, \mathbf{v_n}$.*

Definisi 2.5. *Diberikan $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$ adalah vektor-vektor di dalam **V**. Vektor-vektor $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$ dikatakan bebas linear jika $\alpha_1\mathbf{v_1}+\alpha_2\mathbf{v_2}+\alpha_3\mathbf{v_3}+\ldots+\alpha_n\mathbf{v_n}=0$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=0$.*

Definisi 2.6. *Diberikan $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$ adalah vektor-vektor di dalam V. Himpunan $\{v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n\}$ disebut basis ruang vektor V jika membangun V dan bebas linear.*

B. Ruang Bernorma

Dalam Luenberger diberikan definisi ruang vektor bernorma sebagai berikut:

Definisi 2.7. *Ruang vektor linear bernorma X adalah ruang vektor X yang di dalamnya didefinisikan suatu fungsi dari vektor x ke bilangan real $\|\mathbf{x}\|$ yang disebut norm dari **x**. Norm tersebut memenuhi aksioma sebagai berikut:*

1. $\|x\|\geq 0$, untuk setiap $x\in X$

   $\|x\|=0$ jika dan hanya jika $x = 0$

2. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ untuk setiap $x,y \in X$
3. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ untuk semua skalar $\alpha \in R$, setiap $x \in X$.

Berikut diberikan definisi titik **closure** *,* closure *suatu himpunan dan himpunan tertutup :*

Definisi 2.8. *Titik $x \in X$ dikatakan titik closure dari himpunan P jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat titik $p \in P$ sedemikian sehingga dipenuhi $||x-p|| < \varepsilon$. Koleksi dari titik closure P disebut closure P dan dinotasikan $\overline{P}$. Suatu himpunan dikatakan tertutup jika* $\boldsymbol{P} = \overline{\mathbf{P}}$

Oleh Depree dan Swartz [1] didefinisikan suatu barisan konvergen pada ruang bernorma sebagai berikut:

Definisi 2.9. *Diberikan X adalah ruang bernorma. Barisan tak berhingga vektor-vektor $\{\boldsymbol{x_n}\}$ dikatakan konvergen ke vektor $\boldsymbol{x}$, jika untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, terdapat $M_\varepsilon \in N$, sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq M_\varepsilon$ berlaku $||x_n - x|| < \boldsymbol{\varepsilon}$*

Selanjutnya didefinisikan suatu barisan bilangan Cauchy sebagai berikut:

Definisi 2.10. *Diberikan X adalah ruang bernorma. Barisan tak berhingga vektor-vektor $\{x_n\}$ dikatakan sebagai barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $M_\varepsilon \in N$, sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \geq M_\varepsilon$ berlaku $||x_m - x_n|| < \varepsilon$.*

Dalam Luenberger [2] didefinisikan kelengkapan suatu ruang bernorma sebagai berikut:

Definisi 2.11. *Ruang bernorma X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen. Selanjutnya ruang tersebut disebut ruang* ***Banach****.*

Berikut diberikan sifat dari sub ruang tertutup dari suatu ruang Banach :

Teorema 2.12. *Sub ruang tertutup dari ruang Banach adalah lengkap.*

C. Ruang Hilbert

Untuk selanjutnya diberikan definisi ruang pre-Hilbert dan ruang Hilbert sebagai berikut:

Definisi 2.13. *Ruang pre-Hilbert* ***X*** *adalah ruang vektor linear* ***X*** *bersama dengan suatu hasil kali dalam (Inner Product) yang didefinisikan pada* ***XxX****. Berkorespondensi dengan* *sertiap pasangan vektor x,y dalam **X**, hasil kali dalam memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ dan $\langle x, x\rangle = 0$ jika hanya jika $x = 0$

Definisi 2.14. *Ruang Hilbert adalah ruang pre-Hilbert yang lengkap.*

Definisi 2.15 . *Diberikan X adalah ruang* ***pre-Hilbert****. Misalkan* ***x,y∈X,*** *maka x dan* ***y*** *dikatakan orthogonal jika* $\langle x, y\rangle = 0$. *Misalkan M⊆X, x∈X dan M dikatakan orthogonal jika* $\langle x, y\rangle = 0$, *untuk setiap y∈M.*

Dari definisi ruang pre-Hilbert tersebut, jelas bahwa ruang tersebut merupakan ruang bernorma dengan normnya didefinisikan oleh: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

3. MASALAH NORM MINIMUM PADA RUANG HILBERT

A. Teorema Proyeksi pada Ruang Pre-Hilbert H

Pada ruang pre- Hilbert, norm suatu vektor didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $x \in H$, maka $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Lemma 3. 1. *Jika* $x \perp y$, *maka* $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, *untuk semua* $x, y \in H$

Bukti:

Menurut definisi norm dalam ruang pre-Hilbert diperoleh:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 0 + 0 + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2\end{aligned}$$

■

Teorema 3. 2. *Diberikan X adalah ruang pre-Hilbert, jika M adalah sub ruang dari X dan* $x \in X$ *, maka berlaku:*

a. $\|x - m_0\| = \min\limits_{m \in M} \|x - m\| \Leftrightarrow (x - m_0) \perp M$

b. Jika terdapat vektor $m_0 \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi $\|x - m_0\| = \min\limits_{m \in M} \|x - m\|$,

maka $m_0 \in M$ tunggal

(Selanjutnya $m_0 \in M$ ini disebut sebagai vektor minimizing)

Bukti:

a. $\Rightarrow$

Diketahui $\|x - m_0\| = \min\limits_{m \in M} \|x - m\|$. Andaikan $x - m_0$ tidak tegak lurus dengan himpunan *M*, maka terdapat suatu vektor $m \in M$ yang tidak orthogonal dengan $x - m_0$. Tanpa mengurangi arti, diasumsikan $\|m\| = 1$ (Asumsi ini tidak mengurangi arti sebab, setiap vektor di X dapat ditransformasi ke norm sama dengan satu, yaitu dengan membagi vektor tersebut dengan normnya). Vektor $m \in M$ tidak orthogonal dengan $x - m_0$, maka $\langle x - m_0, m \rangle = \delta \neq 0$. Selanjutnya dibentuk suatu vektor : $m_1 = m_0 + \delta m$. Dengan demikian $m_1 \in M$, berikutnya dihitung norm $x - m_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|x - m_1\|^2 &= \langle x - m_1, x - m_1 \rangle = \langle x - m_0 - \delta m, x - m_0 - \delta m \rangle \\ &= \langle x - m_0, x - m_0 \rangle - \langle \delta m, x - m_0 \rangle - \langle x - m_0, \delta m \rangle + \langle \delta m, \delta m \rangle \\ &= \|x - m_0\|^2 - \delta\overline{\delta} - \overline{\delta}\delta + \delta\overline{\delta}\langle m, m \rangle \end{aligned}$$

Diketahui $\|m\| = 1$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \|x - m_1\|^2 &= \|x - m_0\|^2 - \delta\overline{\delta} - \overline{\delta}\delta + \delta\overline{\delta} \\ &= \|x - m_0\|^2 - \delta\overline{\delta} \end{aligned}$$

Sehingga $\|x - m_1\|^2 < \|x - m_0\|^2$

Dengan demikian ada $m_1 \in M$ sedemikian sehingga jaraknya lebih dekat ke x dari pada m_0. Dengan demikian $x - m_0$ bukan jarak minimalnya. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui, sehingga yang benar adalah $x - m_0$ orthogonal dengan himpunan M.

($\Leftarrow$)

Diketahui $(x - m_0) \perp M$, selanjutnya dibuktikan $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$.

Bukti:

Untuk setiap $x \in X$ dan $m \in M$ berlaku:

$\|x - m\|^2 = \|x - m_0 + m_0 - m\|^2$

karena $m_0 - m \in M$ dan $(x - m_0) \perp M$, maka berlaku:

$\|x - m\|^2 = \|x - m_0\|^2 + \|m_0 - m\|^2$

Dengan demikian $\|x - m\|^2 > \|x - m_0\|^2$ untuk setiap $m \in M$. Jadi dipenuhi : $\|x - m_0\| < \|x - m\|$, untuk setiap $m \in M$.

b. Bukti ketunggalan dari m_0

Andaikan terdapat $m^*, m_0 \in M$ dengan sifat

$\|x - m^*\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$

$\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$

menurut bagian a berakibat: $(x - m^*) \perp M$, karena $m_0 \in M$, $m^* \in M$ maka $(m^* - m_0) \in M$, sehingga juga berlaku : $(x - m^*) \perp (m^* - m_0)$, dan menurut Lemma 3.1 berlaku: $\|x - m^* + m^* - m_0\|^2 = \|x - m^*\|^2 + \|m^* - m_0\|^2$. Atau

$$\|x - m_0\|^2 = \|x - m^*\|^2 + \|m^* - m_0\|^2 \qquad (1)$$

Akan tetapi $(x - m_0) \perp M$ dan $(m_0 - m^*) \in M$, sehingga berlaku juga $(x - m_0) \perp (m_0 - m^*)$ dan menurut Lemma 3.1 berlaku:

$\|x - m_0 + m_0 - m^*\|^2 = \|x - m_0\|^2 + \|m_0 - m^*\|^2$

$$\left\|x-m^*\right\|^2 = \left\|x-m_0\right\|^2 + \left\|m_0-m^*\right\|^2 \quad (2)$$

Dari persamaan 1 dan 2 diperoleh $2\left\|m_0-m^*\right\|=0$, sehingga $m_0=m^*$.

■

Teorema tersebut hanya memberi jaminan bahwa jika ada vektor minimizing, maka vektor tersebut tunggal. Karakteristik dari vektor minimizing tersebut adalah norm dari selisih vektor minimizing dengan *x* orthogonal dengan himpunannya. Namun, teorema tersebut tidak menjamin bahwa vektor minimizingnya selalu ada. Agar ada jaminan selalu ada vektor minimizing diberikan pada teorema selanjutnya.

B. Teorema Proyeksi pada Ruang Hilbert

Teorema berikut memberikan syarat cukup dan perlu agar eksistensi vektor minimizingnya ada.

Teorema 3.3. *Diberikan H adalah ruang Hilbert. Jika M adalah sub ruang tertutup dari H dan* $x \in H$ *, maka*

a. *terdapat dengan tunggal* $m_0 \in M$ *sedemikian sehingga* $\left\|x-m_0\right\| = \min_{m\in M}\left\|x-m\right\|$

b. $\left\|x-m_0\right\| = \min_{m\in M}\left\|x-m\right\| \Leftrightarrow (x-m_0)\perp M$

Bukti:

a. Langkah pertama adalah menunjukkan bahwa vektor minimizingnya ada. Diasumsikan $x \notin M$. Selanjutnya didefinisikan : $\delta = \inf_{m\in M}\left\|x-m\right\|$ dan dicari suatu $m_0 \in M$ sedemikian sehingga $\left\|x-m_0\right\|=\delta$

Untuk mementukan m_0, maka ambil suatu barisan $\{m_i\}\subset M$. Barisan ini dipilih sedemikian sehingga $\left\|x-m_i\right\| \longrightarrow \delta$ atau $\lim_{i\to\infty}\left\|x-m_i\right\|=\delta$. Dengan mengingat hukum parallelogram berlaku:

$$\left\|m_j-x+x-m_i\right\|^2 + \left\|m_j-x-x-m_i\right\|^2 = 2\left\|m_j-x\right\|^2 + 2\left\|x-m_i\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|m_j-x+x-m_i\right\|^2 = 2\left\|m_j-x\right\|^2 + 2\left\|x-m_i\right\|^2 - \left\|m_j-m_i-2x\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \left\|m_j - m_i\right\|^2 = 2\left\|m_j - x\right\|^2 + 2\left\|x - m_i\right\|^2 - 4\left\|x - \frac{m_j + m_i}{2}\right\|^2$$

dengan $m_i, m_j \in M$, sehingga $\frac{m_j + m_i}{2} \in M$ sebab M sub ruang vektor. Akibatnya $\left\|x - \frac{m_j + m_i}{2}\right\| \geq \delta$, sehingga diperoleh:

$$\left\|m_j - m_i\right\|^2 \leq 2\left\|m_j - x\right\|^2 + 2\left\|x - m_i\right\|^2 - 4\delta^2$$

Karena $\left\|x - m_i\right\| \longrightarrow \delta$, sehingga $\left\|x - m_i\right\|^2 \longrightarrow \delta^2$ untuk $i \to \infty$ dan $\left\|x - m_j\right\|^2 \longrightarrow \delta^2$ untuk $j \to \infty$. Akibatnya $\left\|m_j - m_i\right\|^2 \to 0$ untuk $i, j \to \infty$.

Dengan demikian barisan $\{m_i\} \subset M$ adalah barisan Cauchy. Himpunan M adalah sub ruang tertutup pada ruang Hilbert, akibatnya M adalah lengkap, sehingga setiap barisan Cauchy dui dalamnya konvergen. Misalkan $\{m_i\} \subset M$ barisan Cauchy yang konvergen ke m_0, sehingga : $\lim\limits_{i \to \infty} m_i = m_0$. Norm adalah suatu fungsi kontinu, sehingga berlaku:

$$\lim_{i \to \infty} m_i = m_0 \Rightarrow \lim_{i \to \infty} \left\|m_i\right\| = \left\|m_0\right\|$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \left\|m_i\right\| = \left\|\lim_{i \to \infty} m_i\right\|$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\delta = \lim_{i \to \infty} \left\|x - m_i\right\| &= \left\|\lim_{i \to \infty} (x - m_i)\right\| \\ &= \left\|\lim_{i \to \infty} x - \lim_{i \to \infty} m_i\right\| \\ &= \left\|x - m_0\right\|\end{aligned}$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa : $\left\|x - m_0\right\| = \inf\limits_{m \in M} \left\|x - m\right\|$ atau m_0 adalah vektor minimizing. Selanjutnya untuk bukti bagian yang lain sama dengan bukti teorema sebelumnya.

C. Aplikasi : Aproksimasi Vektor Minimizing

Berikut akan diberikan bagaimana vektor minimizing dapat dicari, jika vektor-vektor pembangun dari sub ruang M diketahui dan dimensinya berhingga.

Misalkan H adalah ruang Hilbert, M adalah sub ruang tertutup dari H. Menurut Teorema 3.3, maka pasti ada $m_0 \in M$ sedemikian sehingga $\|x - m_0\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|$. Misalkan juga dimensi M berhingga dan M dibangun oleh $y_1, y_2, ..., y_n \in H$, serta x adalah vektor sebarang di dalam H. Ambil $m_0 \in M$ adalah vektor minimizing , karena $M = sp[y_1, y_2, ..., y_n]$, maka terdapat $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, dengan F adalah lapangannya, sedemikian sehingga dipenuhi: $m_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Dengan demikian untuk mencari $m_0 \in M$ sama halnya mencari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, sehingga $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\|$ minimal. Menurut Teorema 3.2, m_0 vektor minimizing jika hanya jika $(x - m_0) \perp M$. Diketahui bahwa $M = sp[y_1, y_2, ..., y_n]$, sehingga $y_1, y_2, ..., y_n \in M$. Akibatnya $x - m_0$ juga orthogonal dengan $y_1, y_2, ..., y_n \in M$, dengan demikian dipenuhi:

$$\langle x - m_0, y_j \rangle = 0 \qquad j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Atau:

$\left\langle x - \sum_{i \to \infty}^{n} \alpha_i y_i, y_j \right\rangle = 0$, dan diperoleh sistem persamaan linear:

$$\langle x, y_1 \rangle - \alpha_1 \langle y_1, y_1 \rangle - \alpha_2 \langle y_2, y_1 \rangle - ... - \alpha_n \langle y_n, y_1 \rangle = 0$$

$$\langle x, y_2 \rangle - \alpha_1 \langle y_1, y_2 \rangle - \alpha_2 \langle y_2, y_2 \rangle - ... - \alpha_n \langle y_n, y_2 \rangle = 0$$

………………………………………………..

$$\langle x, y_n \rangle - \alpha_1 \langle y_1, y_n \rangle - \alpha_2 \langle y_2, y_n \rangle - ... - \alpha_n \langle y_n, y_n \rangle = 0$$

Sehingga untuk mencari α_i diperoleh dengan:

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & \dots & \langle x, y_1\rangle & \dots & \langle y_n, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \dots & \langle x, y_2\rangle & \dots & \langle y_n, y_2\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_2, y_n\rangle & \dots & \langle x, y_n\rangle & \dots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & \dots & \langle y_i, y_1\rangle & \dots & \langle y_n, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \dots & \langle y_i, y_2\rangle & \dots & \langle y_n, y_2\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_2, y_n\rangle & \dots & \langle y_i, y_n\rangle & \dots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}}$$

Andaikan matriks koefisien dari SPL di atas dinotasikan dengan G, selanjutnya dinotasikan determinan matriks G , $|G| = g(y_1, y_2, ..., y_n)$, diperoleh:

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & \dots & \langle x, y_1\rangle & \dots & \langle y_n, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \dots & \langle x, y_2\rangle & \dots & \langle y_n, y_2\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_2, y_n\rangle & \dots & \langle x, y_n\rangle & \dots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}}{g(y_1, y_2, .., y_n)}$$

Agar dapat dicari α_i , maka $g(y_1, y_2, ..., y_n)$ tidak boleh nol. Proposisi berikut memberikan syarat cukup dan perlu agar $g(y_1, y_2, ..., y_n)$ tak nol:

Proposisi 3.4 $g(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ jika hanya jika vektor-vektor $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ bebas linear.

Bukti:

Untuk membuktikan proposisi tersebut, digunakan pernyataan kontrapositifnya, yaitu: $g(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ jika hanya jika vektor-vektor $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ bergantung linear.

Bukti :

$\Rightarrow$

Diketahui $g(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$, atau $|G| = 0$, maka terdapat kolom dalam matriks G yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kolom-kolom yang lain.

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$, dipenuhi untuk suatu $\alpha_j \neq 0$, sehingga $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ bergantung linear

$\Leftarrow$

Diketahui $y_1, y_2, ..., y_n \in M$ bergantung linear, sehingga persamaan $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$, dipenuhi untuk α_i tidak semua nol, dengan $i = 1,2,...,n$. Misalkan $\alpha_k \neq 0$, sehingga diperoleh:

$\alpha_k y_k = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_{k-1} y_{k-1} + \alpha_{k+1} y_{k+1} + ... + \alpha_n y_n$. Sehingga pada kolom ke k matriks G dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kolom-kolom yang lain. Berdasarkan sifat determinan matriks, maka kolom ini dapat direduksi menjadi kolom yang elemennya nol semua, sehingga determinannya nol.

D. Teorema Proyeksi yang Dimodifikasi

Sebelum masuk pada teorema Proyeksi yang dimodifikasi, akan diberikan definisi varietas linear sebagai berikut:

Definisi 3.5. Jika X adalah ruang vektor, M adalah sub ruang vektor dari X dan $x_0 \in X$, maka himpunan $V = x_0 + M = \{x_0 + m | m \in M\}$ disebut varietas linear (*Linear Variety*) atau translasi dari *M*.

Teorema Proyeksi yang dimodifikasi merupakan perluasan dari teorema proyeksi pada ruang Hilbert. Dalam hal ini, vektornya bukan lagi anggota sub ruang tertutup, tetapi anggota dari suatu himpunan yang diperoleh dari translasi suatu sub ruang tertutup. Selengkapnya dfiberikan pada teorema berikut:

Teorema 3.6. Diberikan X adalah ruang Hilbert dan M adalah sub ruang tertutup dari X. Jika $V = x + M$, untuk suatu $x \in X$, maka:

1. Terdapat dengan tunggal $v_0 \in V$ sehingga dipenuhi $\|v_0\| = \min_{v \in V} \|v\|$
2. v_0 orthogonal terhadap *M*.

Bukti:

Dibentuk translasi V dengan (-x), sehingga diperoleh: $(-x)+V=(-x)+(x+M)=M$. Diketahui M adalah sub ruang tertutup dari ruang Hilbert X, sehingga menurut Teorema 3.3 terdapat dengan tunggal $m_0 \in M$ sedemikian sehingga :

$\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$. Selanjutnya bentuk $v_0 = x - m_0$, maka $v_0 \in V$, karena $m_0 \in M$ tunggal, maka $v_0 \in V$ juga tunggal. Dengan demikian dipenuhi $\|v_0\| = \min_{v \in V} \|v\|$. Menurut Teorema 3.3, karakteristik x- m_0 ini orthogonal pada M, sehingga v_0 orthogonal terhadap M.

■

4. SIMPULAN

Dari pembahasan di atas, maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika X adalah ruang pre-Hilbert , M adalah sub ruang dari X dan $x \in X$, maka berlaku:

   a. $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\| \Leftrightarrow (x - m_0) \perp M$

   b. Jika terdapat vektor $m_0 \in M$ sedemikian sehingga dipenuhi $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$, maka $m_0 \in M$ tunggal

   Dalam hal ini, vektor minimizing-nya tidak dijamin selalu ada

2. Jika H adalah ruang Hilbert, M adalah sub ruang tertutup dari H dan $x \in H$, maka

   a.terdapat dengan tunggal $m_0 \in M$ sedemikian sehingga $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$

   b. $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\| \Leftrightarrow (x - m_0) \perp M$

3. Jika X adalah ruang Hilbert , M adalah sub ruang tertutup dari X dan $V=x+M$, untuk suatu $x \in X$, maka:

   1. Terdapat dengan tunggal $v_0 \in V$ sehingga dipenuhi $\|v_0\| = \min_{v \in V} \|v\|$
   2. v_0 orthogonal terhadap M

DAFTAR PUSTAKA

[1] Depree, J.D, Swartz, C.W. 1988. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

[2] Luenberger, D.G. 1968. *Optimization by Vector Space Method*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

[3] Smith,L. 1998. *Linear Algebra 3th Edition*. Springer-Verlag. New York.